முக்கோணவியல்

செ. கோட்டாளம், க. இயோகராசன்,

நாகேசுவரன் இராசேந்திரன்

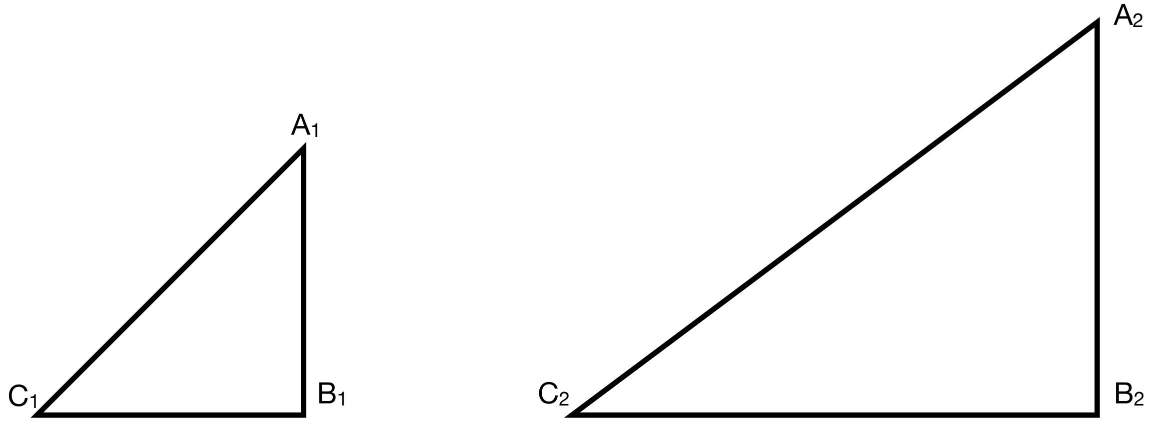
முன்னுரை

கல்வியை கற்பிப்பதே ஒரு கலை. பல மாணவர்களுக்கு, ஒரு குறிப்பிட்ட பாடப்பகுதியில் ஆர்வம் ஏற்பட அதை அவர்களுக்கு கற்பித்த ஆசிரியர்களே காரணமாகிறார்கள். ஒவ்வொரு ஆசிரியருக்கும் ஒரு தனிநடை இருக்கிறது. அதைப்போலவே ஒவ்வொரு பாடத்துக்கும் ஒரு சிறந்த முறை இருக்கிறது. இந்த கட்டுரையில் முக்கோணவிய சமன்பாடுகளையும் முற்றொருமைகளையும் மாணவர்களின் மனங்களில் எளிதில் நிற்கும்வகையில் கற்பிக்கும் ஒரு முறையாக நாங்கள் கருதுவதை விவரிக்கிறோம்.

முதனோக்கில் முக்கோணவியலில் எண்ணற்கரிய வாய்ப்பாடுகளும் சமன்பாடுகளும் முற்றொருமைகளும் இருப்பதாக தோன்றுகிறது. இவற்றை முதலில் வடிவிய நோக்கில் புரிந்துகொண்டால் நினைவில் வைப்பது எளிது. தொடக்கத்தில் இயற்கணிதச்சமன்பாடுகளாகவே கற்றாலும் பிறகு வடிவிய நோக்கில் மீள்பார்க்கும்போது பாடம் மேலும் நன்கு விளங்கும்.

முக்கோணவிய சார்பன்கள்

முக்கோணவியல் முழுவதுமாக செங்கோண முக்கோணங்களின் அடிப்படையில் எழுந்தது; குறிப்பாக, செங்கோண முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் விகிதங்களின் அடிப்படையில் எழுந்தது. விகிதங்களின் அடிப்படையில் எழுந்ததால், முக்கோணவிய வாய்ப்பாடுகளனைத்தும் செங்கோணமுக்கோணத்தின் அளவை சாராதவை. அதாவது படத்தில் காட்டியபடி நிகரான கோணங்களும் வெவ்வேறு அளவுகளுமுள்ள செங்கோண முக்கோணங்களை நாம் கருதினால், ஒன்றிலிருந்து நாம் பெறும் முக்கோணவியச்சமன்பாடுகள் மற்றதிலிருந்து பெறுபவற்றிலிருந்து வேறுபடாதவை.

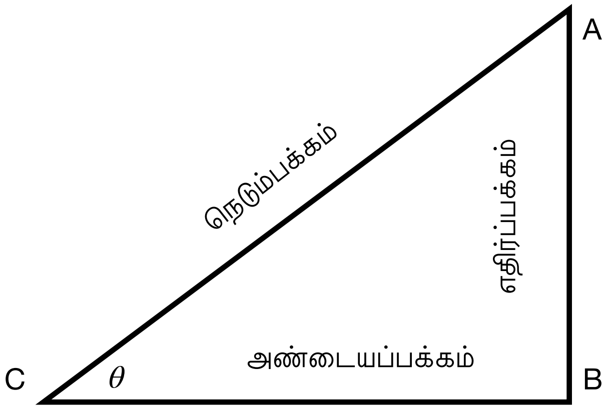


வடிவொத்த செங்கோண முக்கோணங்கள்

மேல் காட்டிய இரண்டு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை. அதாவது, அவை அளவில் வேறுபடினும் வடிவில் வேறுபடவில்லை. குறிப்பாக, ஒவ்வொன்றிலும் ஒரு செங்கோணம் இருக்கிறது. மேலும், இரண்டு முக்கோணங்களின் மேலுள்ள (A_1இலும் A_2இலுமுள்ள) கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமம்; அதைப்போல, இடப்பக்கமுள்ள கோணங்களும் (C_1, C_2) ஒன்றுக்கொன்று சமம். இதனால், நிகரான பக்கங்களின் விகிதங்களும் சமம் என்பதை நாம் அறிவோம். அதாவது

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}$$

அதனாலே இவை வடிவொத்த முக்கோணங்களாகின்றன. இனி, இவ்வாறான ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகளை A, B, C என்று குறிப்போம்.



முக்கோணவியச்சார்பன்களின் வரையறையில்
பயன்படும் அளவுருகள்

பொதுவாக ஒரு முக்கோணத்தை விவரிக்க மூன்று அளவுருகள் தேவை என்பது நாமறிந்தது. இவை மூன்று பக்கங்களாகவோ மூன்று கோணங்களாகவோ, இரண்டு பக்கங்களும் ஒரு கோணமுமாகவோ, ஒரு பக்கமும் இரண்டு கோணங்களுமாகவோ இருக்கலாம். இரண்டு பக்கங்களுக்குப்பதிலாக ஒரு பக்கமும் இரண்டு பக்கங்களின் விகிதமும் இருக்கலாம். செங்கோண முக்கோணத்தில் ஒரு செங்கோணம் எப்போதும் இருப்பதால், மேலும் இரண்டு அளவுருகளை குறிப்பிடவேண்டும். வடிவொத்த முக்கோணங்களை மொத்தமாக ஒரே கணமாக கருதுவதால், அதாவது பக்கங்களின் விகிதங்களையே கருதுவதால், ஒரு வடிவொத்த செங்கோண முக்கோணங்களின் கணத்தை விவரிக்க ஒரே ஒரு அளவுரு போதும். அது ஒரு கோணமாகவோ இரண்டு பக்கங்களின் விகிதமாகவோ இருக்கலாம். நாம் $\angle ACB = \theta$ என்ற கோணத்தால் இந்த கணத்தை குறிப்போம். ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $180°$ என்பதால், மற்றக்கோணம் $\angle CAB = 90° - \theta$ என்றாகிறது.

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் சாத்தியமான எல்லா விகிதங்களையும் பட்டியலிட்டு அவற்றை θவின் முக்கோணவிய சார்பன்கள் என்று அழைக்கிறோம். மேற்கண்ட படத்தில் செங்கோண முக்கோணத்தின் நெடும்பக்கத்தையும் θவின் அண்டையப்பக்கத்தையும் எதிர்ப்பக்கத்தையும் குறித்திருக்கிறோம். அவற்றின்வழி முக்கோணவியச்சார்பன்களை கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கிறோம்.

$$\text{வளைவி}(\theta) = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{நெடும்பக்கம்}}$$

$$\text{உடன்வளைவி}(\theta) = \frac{\text{அண்டையப்பக்கம்}}{\text{நெடும்பக்கம்}}$$

$$\text{தொடுவி}(\theta) = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அண்டையப்பக்கம்}}$$

$$\text{உடன்றொடுவி}(\theta) = \frac{\text{அண்டையப்பக்கம்}}{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}$$

$$\text{வெட்டுவி}(\theta) = \frac{\text{நெடும்பக்கம்}}{\text{அண்டையப்பக்கம்}}$$

$$\text{உடன்வெட்டுவி}(\theta) = \frac{\text{நெடும்பக்கம்}}{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}$$

செங்கோண முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களால் ஏற்படும் சாத்தியமான ஆறு விகிதங்களையும் பட்டியலிட்டு பெயரிட்டிருக்கிறோம். அவ்வளவே! இந்த பெயர்களிலுள்ள வி என்ற எழுத்து இவை விகிதங்கள் என்பதை நமக்கு நினைவூட்டுகின்றது. கணித வாய்ப்பாடுகளிலும் சமன்பாடுகளிலும் இவற்றை முறையே வெவி, உவெவி, தொவி, உதொவி, வெவி, உவெவி என்று சுருக்கி எழுதுவதுண்டு.

இந்த ஆறு விகிதங்களையும் மூன்று சோடிகளாக காணலாம். வளைவியில் எதிர்ப்பக்கம் இருக்குமிடத்தில் உடன்வளைவியில் அண்டையப்பக்கம் இருக்கிறது. அதைப்போல, வெட்டுவியில் அண்டையப்பக்கம் இருக்குமிடத்தில் உடன்வெட்டுவியில் எதிர்ப்பக்கம் இருக்கிறது. தொடுவியிலும் உடன்றொடுவியிலும் எதிர்ப்பக்கமும் அண்டையப்பக்கமும் இடம்மாறியிருக்கின்றன. அதாவது, ஒரு சார்பனுக்கும் அதன் உடன்சார்பனுக்குமுள்ள தொடர்பு என்னவென்றால், எதிர்ப்பக்கமும் அண்டையப்பக்கமும் இடம்மாறி இருக்கின்றன.

மேலும், வளைவியும் உடன்வெட்டுவியும் ஒன்றுக்கொன்று புரட்டுகள்; உடன்வளைவியும் வெட்டுவியும் ஒன்றுக்கொன்று புரட்டுகள்.

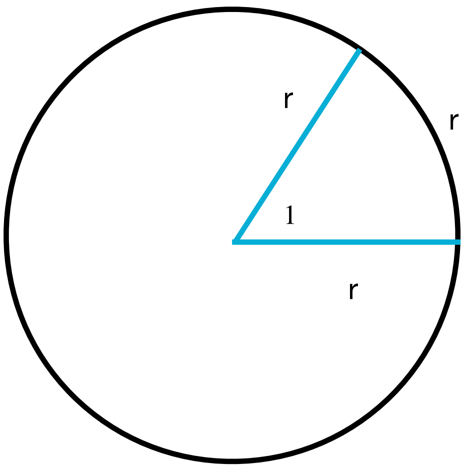
தொடுவியும் உடன்றொடுவியும் ஒன்றுக்கொன்று புரட்டுகள். மேலும் இவற்றை வளைவிக்கும் உடன்வளைவிக்குமான விகிதங்களாகவோ வெட்டுவிக்கும் உடன்வெட்டுவிக்குமான விகிதங்களாகவோவும் காணலாம்.

மேலுள்ள படத்தில் $\angle CAB = 90^\circ - \theta$ என்ற கோணத்தின் எதிர்ப்பக்கம் θ வின் அண்டையப்பக்கமாகவும் அதன் அண்டையப்பக்கம் θ வின் எதிர்ப்பக்கமாகவும் இருப்பதை காண்கிறோம். இதிலிருந்தும் மேற்கண்ட வரையறையிலிருந்தும்

$\text{வவி}(90^\circ - \theta) = \text{உவவி}(\theta)$	$\text{உதொவி}(90^\circ - \theta) = \text{தொவி}(\theta)$
$\text{உவவி}(90^\circ - \theta) = \text{வவி}(\theta)$	$\text{வெவி}(90^\circ - \theta) = \text{உவெவி}(\theta)$
$\text{தொவி}(90^\circ - \theta) = \text{உதொவி}(\theta)$	$\text{உவெவி}(90^\circ - \theta) = \text{வெவி}(\theta)$

என்ற உறவுகளை உடனடியாக பெறுகிறோம். அதாவது, ஒரு கோணத்தின் சார்பன் 90° யிலிருந்து அதன் நிரப்புக்கோணத்தின் உடன்சார்பன்; திருப்பியவாறும். இவற்றை நீங்கள் மனப்பாடஞ்செய்யவேண்டியதில்லை. மேற்கண்ட சித்திரத்தை மனத்தில் பதித்து எந்தெந்த விகிதத்துக்கு என்னென்ன பெயர் என்பதையும் நினைவில் வைத்தால் இந்த உறவுகளை வேண்டும்போது எழுதிக்கொள்ளலாம். இதே உறவுகளை வேறொரு சித்திரத்திலும் பின்பு காண்போம்.

பாகையும் ஆரையனும்



இதுவரை கோணங்களை பாகையிலே குறிப்பிட்டோம். அவற்றை ஆரையன் என்ற அலகிலும் குறிக்கலாம். ஒரு ஆரையன் என்பது ஒரு வட்டத்தின் ஆரத்துக்கு சமமான நீளமுள்ள வில் வட்டத்தின் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் என்று வரையறுக்கிறோம். படத்தில் வட்டத்தின் ஆரத்தை r என்று குறித்தோம். அதில் காட்டிய வில்லின் நீளமும் r. இந்த வில் மையத்தில் தாங்கும் θ என்ற கோணம் 1 ஆரையன் அளவானது.

வட்டத்தின் சுற்றளவு $2\pi r$ என்பதை நாம் அறிவோம். முழுச்சுற்றளவுக்கும் நிகரான கோணம் $360°$ என்பதையும் அறிவோம். எனவே $180° = \pi$ ஆரையன் என்று பெறுகிறோம். இவ்வாறு $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ ஆகிய கோணங்கள் முறையே $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ ஆரையன் ஆகின்றன. படத்தில் காட்டப்பட்ட 1 ஆரையன் சுமார் $57.3°$க்கு சமம்.

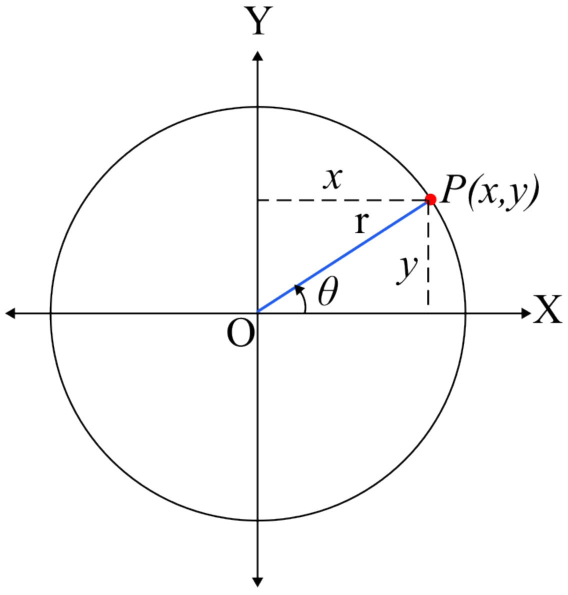
கோணங்களை குறிக்கும்போது ஆரையன் என்ற சொல்லை விட்டுவிடுவது வழக்கம். பாகையாக குறிக்காமல் வெறும் எண்களாக குறித்தால் அவை ஆரையன்கள் என்பதை சொல்லாமலே விளங்கிக்கொள்ளலாம்.

வாசிக்கும்போது 2πஐ இருபை என்றும் $\pi/2$ஐ அரைப்பை என்றும் $\pi/4$ஐ காற்பை என்றும் $\pi/3$ஐ பையின்கீழ் மூன்று என்றோ மூன்றிலொரு பை என்றோவும் சொல்லலாம்.

எல்லா கோணங்களுக்கும் நீட்டல்

மேற்கண்ட உரையில் முக்கோணவியச் சார்பன்களை செங்கோண முக்கோணத்தின் அடிப்படையில் $0° \le \theta \le 90° \ (0 \le \theta \le \pi/2)$ என்ற களத்தில் வரையறுத்தோம். இதை $0° \le \theta < 360° \ (0 \le \theta \le 2\pi)$ என்ற களத்துக்கு நீட்டலாம். உண்மையில் $-\infty < \theta < \infty$ என்ற களத்துக்கு நீட்டலாம்.

படத்தில் காட்டியபடி, x, y தளத்திலுள்ள $P(x, y)$ என்ற புள்ளியை கருதுக. மூலத்திலிருந்து (Oவிலிருந்து) Pக்கான தொலைவை r என்றும் OP என்ற கோடு x அச்சுடன் தாங்கும் கோணத்தை θ என்றும் குறிக்கிறோம். Pயிலிருந்து x அச்சுக்கு ஒரு செங்கோட்டை வரைவோம். அப்படியெனில், OPR ஒரு செங்கோண முக்கோணம். θ இந்த முக்கோணத்தின் ஒரு கோணமாகிறது. இப்போது, முக்கோணவியச்சார்பன்களை கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கிறோம்.



முக்கோணவியச்சார்பன்களை பொதுவாக வரையறுக்க பயன்படும் சித்திரம்

வவி$(\theta) = \dfrac{y}{r}$

உவவி$(\theta) = \dfrac{x}{r}$

தொவி$(\theta) = \dfrac{y}{x}$

உதொவி$(\theta) = \dfrac{x}{y}$

வெவி$(\theta) = \dfrac{r}{x}$

உவெவி$(\theta) = \dfrac{r}{y}$

இவை $0 \leq \theta \leq \pi/2$ என்ற களத்தில் நம் முந்தைய வரையறையுடன் ஒவ்வுவதை நோக்குக. ஆனால் இப்போது இந்த வரையறைகள் P என்ற புள்ளி தளத்தில் எங்கிருந்தாலும் பயனாகின்றன. சான்றாக, P இரண்டாம் காற்பகுதியில் இருக்கும்போது, θ $\pi/2$இலிருந்து πவரை செல்கிறது இங்கு, x எதிர்மம்; r ஒரு தொலைவு என்பதால் அது எப்போதும் நேர்மம். அப்போது, உவவி$(\theta) = \dfrac{x}{r}$ எதிர்மமாகிறது. இவ்வாறு, சுழியத்திலிருந்து 2πவரையான θமதிப்புகளுக்கு P எந்த காற்பகுதியில் இருக்கிறது என்பதைச்சார்ந்து சில முக்கோணவியச்சார்பன்கள் நேர்ம மதிப்புகளையும் மற்றவை எதிர்ம மதிப்புகளையும் எடுக்கின்றன. குறிப்பாக, வவிச்சார்பனுக்கு y இன் கணிதக்குறியும் உவவிச்சார்பனுக்கு x இன் குறியும் இருக்கின்றன. இவற்றிலிருந்து மற்ற விகிதங்களின் குறியை ஒவ்வொரு காற்பகுதியிலும் எளிதில் பெறலாம்.

ஒரு புள்ளி ஓரலகு ஆரமுள்ள வட்டத்தில் சீராக அசையும்போது அந்த அசைவின் yஅகையை வவிச்சார்பனும் xஅகையை உவவிச்சார்பனும் விவரிப்பதாக நாம் மனங்காணலாம். வேறுவிதமாகச்சொன்னால், ஒரு சக்கரம் சீரான வேகத்தில் இடஞ்சுழியாக சுழலும்போது அதன் விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளி மேலுங்கீழுமாக அசைவதை வவிச்சார்பனும் வலமிடமாக அசைவதை உவவிச்சார்பனும் விவரிக்கின்றன. இதை கீழ்வரும் வரைபடங்களிலிருந்து மேலும் தெளிவாக காணலாம்.

சில கோணங்களின் முக்கோணவிய விகிதங்கள்

இப்போது, $\theta = 0°$ என்றபோது மேற்கண்ட முக்கோணத்துக்கு என்னாகிறது என்று சிந்தியுங்கள். நெடும்பக்கம் அண்டையப்பக்கத்தின்மீது விழுந்து எதிர்ப்பக்கம் சுழியமாகிறது. எனவே,

வவி$(0°) = 0$

உவவி$(0°) = 1$

தொவி$(0°) = 0$

உதொவி$(0°) = \infty$

வெவி$(0°) = 1$

உவெவி$(0°) = \infty$

என்றாகின்றன. உதொவி$(0°)$, உவெவி$(0°)$ ஆகியவற்றின் மதிப்பை ∞ என்று குறித்தோம். இதை முடிவிலியாக கருதலாம். ஆனால், இந்த சார்பன்கள் சுழியத்தில் வரையறுக்கப்படவில்லை என்றும் சிலர் சொல்வார்கள்.

இதன் மறுபக்கமாக, $\theta = 90°$ என்றபோது, எதிர்ப்பக்கம் நெடும்பக்கத்துக்கு சமமாகி, அண்டையப்பக்கம் சுழியமாகிறது. எனவே,

வவி$(90°) = 1$

உவவி$(90°) = 0$

தொவி$(90°) = \infty$

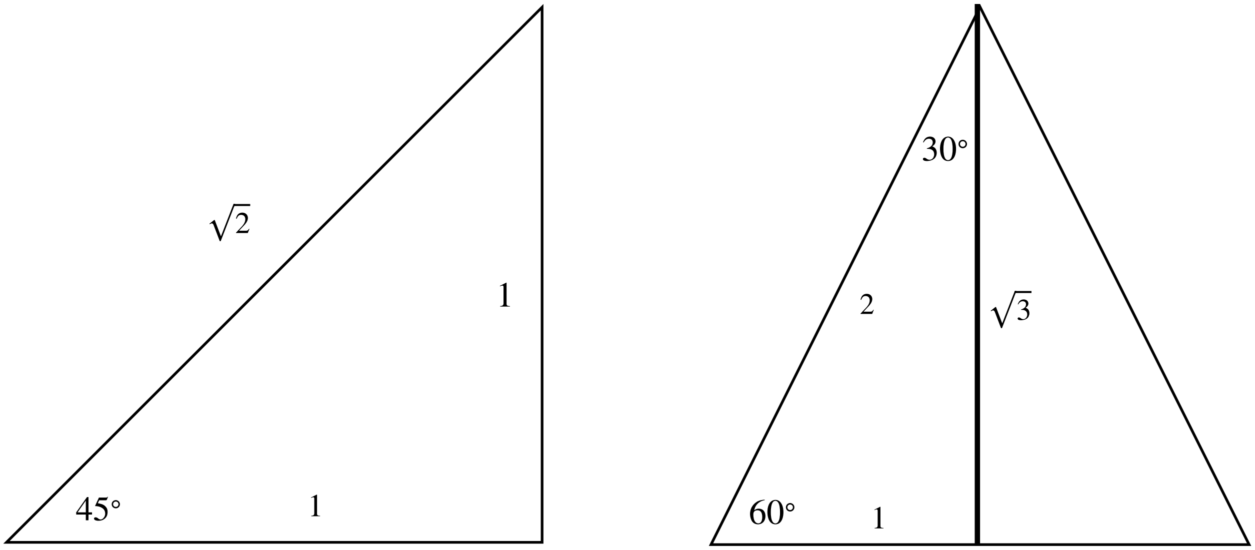
உதொவி$(90°) = 0$

வெவி$(90°) = \infty$

உவெவி$(90°) = 1$

என்று பெறுகிறோம்.

அடுத்து, $30°, 45°, 60°$ ஆகிய கோணங்களில் முக்கோணவியச்சார்பன்களின் மதிப்புகளை காணும் ஒரு சித்திரத்தை விவரிக்கிறோம்.



சில கோணங்களின் முக்கோணவியச்சார்பன்களை மனங்காண உதவும் சித்திரம்

இந்த சித்திரத்தில் இடப்பக்கமிருப்பது ஒரு இருசமப்பக்க செங்கோண முக்கோணம். சமப்பக்கங்களின் நீளத்தை 1 என்று எடுத்திருக்கிறோம். அப்படியெனில் நெடும்பக்கம் $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ என்றாவதை நாம் அறிவோம். இதிலிருந்து $45°$ இன் சார்பன்மதிப்புகளை உடனடியாக காணலாம். அவை

$$\text{வவி}(45°) = \text{உவவி}(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{வெவி}(45°) = \text{உவெவி}(45°) = \sqrt{2}$$

$$\text{தொவி}(45°) = \text{உதொவி}(45°) = 1$$

மேற்கண்ட படத்தின் வலப்பக்கத்தில் ஒரு சமப்பக்க முக்கோணத்தை இரண்டு பகுதிகளாக பிரித்திருக்கிறோம். சமப்பக்க முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளத்தை 2 என்று எடுத்திருக்கிறோம். அப்படியெனில் அதில் பாதியான செங்கோண முக்கோணத்தில் ஒரு பக்கம் 1 எனவும் மற்றொரு பக்கம் $\sqrt{3}$ எனவும் காண்கிறோம். இதிலிருந்து $30°, 60°$ ஆகிய கோணங்களின் சார்பன்மதிப்புகளை கீழ்க்காணுமாறு எழுதிவிடலாம்.

$$\text{வவி}(30°) = \frac{1}{2}$$

$$\text{உவவி}(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{தொவி}(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{உதொவி}(30°) = \sqrt{3}$$

$$\text{வெவி}(30°) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{உவெவி}(30°) = 2$$

$$\text{வவி}(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{உவவி}(60°) = \frac{1}{2}$$

$$\text{தொவி}(60°) = \sqrt{3}$$

$$\text{உதொவி}(60°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{வெவி}(60°) = 2$$

உவெவி$(60°) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

மேற்கண்ட சார்பன்மதிப்புகளை கீழ்க்கண்ட அட்டவணை சுருங்கவுரைக்கிறது.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
வவி	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
உவவி	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
தொவி	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

இந்த அட்டவணையின் முதல் கிடக்கையில் சுழியம், கால், அரை, முக்கால், ஒன்று ஆகிய எண்களின் வர்க்கமூலங்கள் தோன்றுவதையும் இரண்டாம் கிடக்கையில் அதே வர்க்கமூலங்கள் திருப்புமுறைமையில் தோன்றுவதையும் மூன்றாம் கிடக்கையில் அவற்றின் விகிதங்கள் தோன்றுவதையும் நோக்குக. இது அந்த மதிப்புகளை நினைவில் வைக்க உதவுகிறது.

காருட்டீசிய ஒருங்களவுகளும் முனைய ஒருங்களவுகளும்

தளத்தில் ஒரு புள்ளியை குறிக்க ஒரு நோக்கீட்டுப்புள்ளியிலிருந்து ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரண்டு திசைகளில் புள்ளியின் குறியிட்ட தொலைவுகளை குறிக்கலாம் என்பதை நாம் அறிவோம். நோக்கீட்டுப்புள்ளியை **மூலம்** என்றும், நோக்கீட்டுத்திசைகளை x**அச்சு,** y**அச்சு** என்றும், குறியிட்ட தொலைவுகளை **காருட்டீசிய ஒருங்களவு**கள் என்றும் அழைக்கிறோம். தளத்தில் புள்ளியை குறிக்க இந்த காருட்டீசிய அமைப்பைப்போல் மற்ற அமைப்புகளும் இருக்கின்றன. அவற்றுள் ஒன்றை **முனைய ஒருங்களவமைப்பு** என்று அழைக்கிறோம். இதில் மேல் நாம் பயன்படுத்திய r என்ற தொலைவும் θ என்ற கோணமும் ஒருங்களவச்சுகளாக செயலாற்றுகின்றன. இங்கு r $[0,\infty)$ என்ற இடைவெளியிலும் θ $(-\pi, \pi]$ என்ற இடைவெளியிலும் இருக்கின்றன. இந்த இடைவெளிகளிலுள்ள ஒவ்வொரு (r, θ) சோடிக்கும் நிகராக தளத்தில் ஒரு புள்ளி இருக்கிறது. தளத்திலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் நிகராக இவ்வாறான ஒரு சோடி உள்ளது. காருட்டீசிய ஒருங்களவுகளான (x, y) க்கும் முனைய ஒருங்களவுகளான (r, θ)வுக்குமிடையில்

$x = r$உவவி(θ) $\qquad\qquad$ $y = r$வவி(θ)

என்ற உறவு இருப்பது தெளிவு.

முக்கோணச்சார்பன்களிடையில் சில உறவுகள்

முக்கோணச்சார்பன்களின் நீட்டிய வரையறையிலிருந்து அவற்றிடையில் பல உறவுகளை வருவிக்கலாம். முதலில், θ 2π க்கு மேல் செல்லும்போது என்னாகிறது என்று பார்ப்போம். படத்திலிருந்து θ என்ற கோணமும் $\theta + 2\pi$ என்ற கோணமும் ஒரே இடத்தில் இருப்பதை காணலாம். எனவே, வவி$(\theta + 2\pi) =$ வவி(θ) என்றாகிறது. இவ்வாறே, θ வும் $\theta - 2\pi$ யும் ஒரே இடத்தில் இருப்பதால் வவி$(\theta - 2\pi) =$ வவி(θ) என்பதும் உண்மை. இது எல்லா முக்கோணவியச்சார்பன்களுக்கும் பொருந்தும். பொதுவாக, எந்த முக்கோணவியச்சார்பனுக்கும்

சார்பன்$(\theta \pm 2n\pi) =$ சார்பன்(θ)

என்பது உண்மையாகிறது. அதாவது, இந்த சார்பன்களின் மதிப்புகள் ஒவ்வொரு 2πக்குப்பின்னும் மீள்வருகின்றன. இதனால், இந்த சார்பன்கள் **சீரொழுங்கானவை** என்றும் இவற்றின் **சீரொழுங்கு** 2π என்றும் சொல்கிறோம். (தொவியும் உதொவியும் πக்குப்பின் மீள்வருகின்றன. இவற்றின் சீரொழுங்கு π.)

அடுத்ததாக, $-\theta$வின் சார்பன்கள் θவின் சார்பன்களுடன் தொடர்புடையனவா என்று பார்ப்போம். θ கோணமுள்ள புள்ளி $P(x, y)$ எனில், $-\theta$ கோணமுள்ள புள்ளி $P(x, -y)$ என்பதை படத்தை பார்த்து நீங்கள் அறியலாம். (இதை காட்டும் படத்தை நீங்களே வரைந்துபாருங்கள்). அதாவது $P(x, y)$ என்ற புள்ளி xஅச்சில் எதிரொளித்து $P(x, -y)$ ஆகிறது. இதிலிருந்து

$$\text{வவி}(-\theta) = \frac{-y}{r} = -\,\text{வவி}(\theta) \qquad \text{உவவி}(-\theta) = \frac{x}{r} = \text{உவவி}(\theta)$$

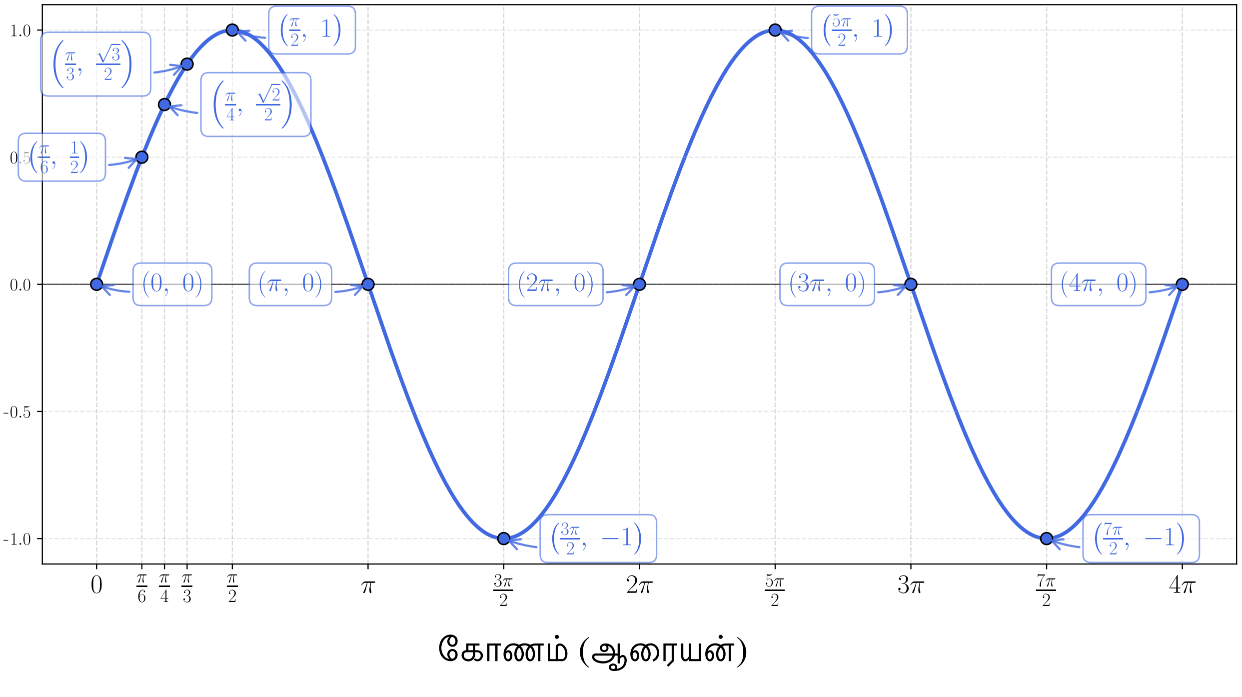
என்று காண்கிறோம். மற்ற சார்பன்களின் மதிப்புகளையும் இவ்வாறே எழுதிக்கொள்ளலாம். இந்த உறவுகள் P எந்த காற்பகுதியில் இருந்தாலும் உண்மையாவதை சரிபார்த்துக்கொள்ளுங்கள். இதே முறையை பின்பற்றி

$$\text{வவி}\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\,\text{உவவி}(\theta) \qquad \text{உவவி}\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\,\text{வவி}(\theta)$$

என்று நிறுவுவதை உங்களுக்கு பயிற்சியாக விடுகிறோம். மேலும் $(\theta \pm \pi)$ போன்ற வேறு சில கோணங்களுக்கான உறவுகளை நீங்களாகவே கண்டுபிடிக்க முயலுங்கள்.

வரைபடங்கள்

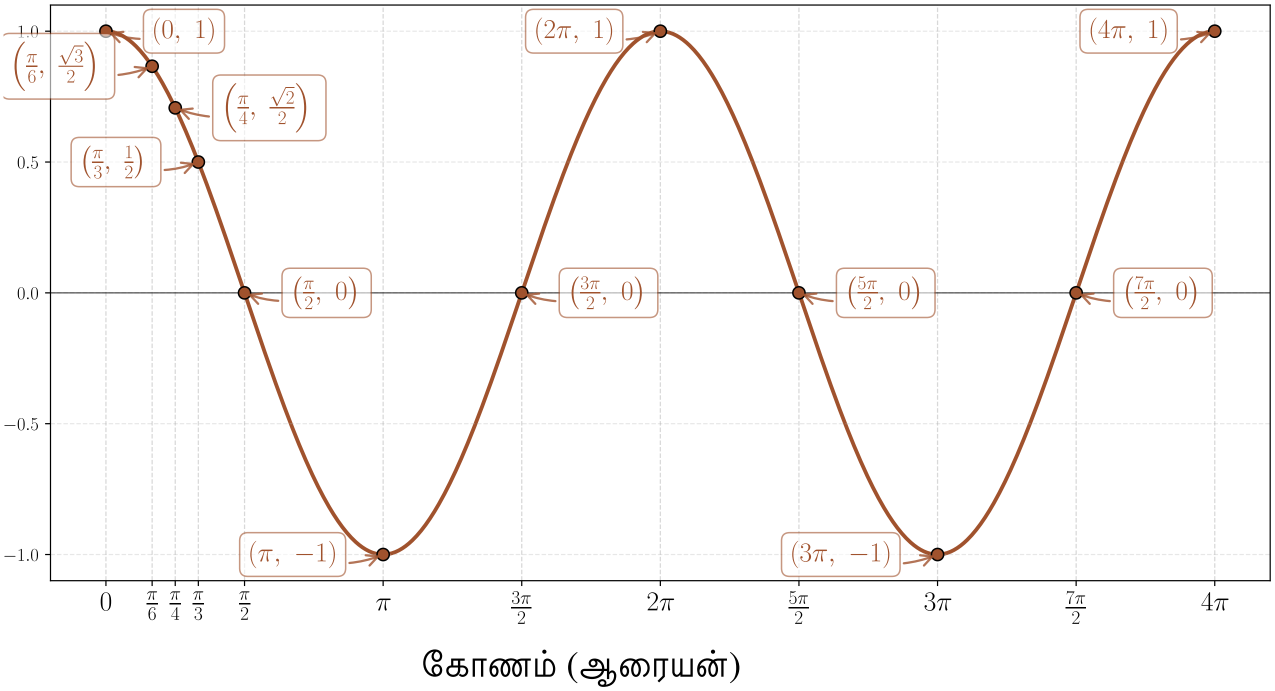
$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ ஆகிய கோணங்களுக்கு முக்கோணவியச்சமன்பாடுகளின் மதிப்புகளை முன்பு கணக்கிட்டோம். மற்ற கோணங்களுக்கும் உயர்கணிதத்தை பயன்படுத்தி கணக்கிடலாம்.



வவிச்சார்பனின் வரைபடம் (xஅச்சு π ஆரையனில்)

இவ்வாறு கணக்கிட்டு எல்லா முக்கோணவியச்சார்பன்களையும் கோணத்துக்கு எதிராக வரைபடங்களாக வரையலாம். இங்கு வவியின் வரைபடத்தையும் உவவியின் வரைபடத்தையும் காட்டுகிறோம்.

முதலில் வவியின் வரைபடத்தை கருதுவோம். கோணம் (θ) சுழியத்தில் தொடங்கி அதிகரிக்கும்போது வவியின் மதிப்பும் சுழியத்தில் தொடங்கி அதிகரிக்கிறது. கோணம் $\pi/2$ ஐ அடையும்போது வவி மீப்பெருமத்தை அடைந்து பிறகு குறையத்தொடங்குகிறது. πயில் சுழியமாகி பின்பு எதிர்ம மதிப்புகளை எடுக்கிறது. இது $3\pi/2$ இல் மீச்சிறுமத்தை அடையும்வரை தொடர்கிறது. பிறகு சார்பன் அதிகரித்து 2π இல் சுழியத்தை அடைகிறது. இவ்வாறு சார்பனின் ஒரு சுழற்சி முடிவடைகிறது. கோணம் மேலும் அதிகரிக்க ஒவ்வொரு 2πக்கும் இதே சுழற்சி மீள்வருகிறது. இனி கோணம் சுழியத்திலிருந்து குறையும்போது என்ன ஆகிறது என்று பார்ப்போம். எதிர்மக்கோணங்களுக்கு சார்பன் குறையத்தொடங்கி மீச்சிறுமத்தை அடைந்து மீண்டும் அதிகரித்து மீப்பெருமத்தை அடைந்து இறுதியில் -2π இல் சுழியத்தை அடைகிறது. படத்தில் இந்த இரண்டு சுழற்சிகளையும் காட்டியிருக்கிறோம். எந்தவொரு கோண மதிப்பிலும் தொடங்கி 2π அகலமான இடைவெளியை ஒரு சுழற்சியாக கருதலாம் என்பதை நோக்குக. குறிப்பாக $-\pi$யிலிருந்து πவரையான இடைவெளியை ஒரு சுழற்சியாக கருதலாம்.



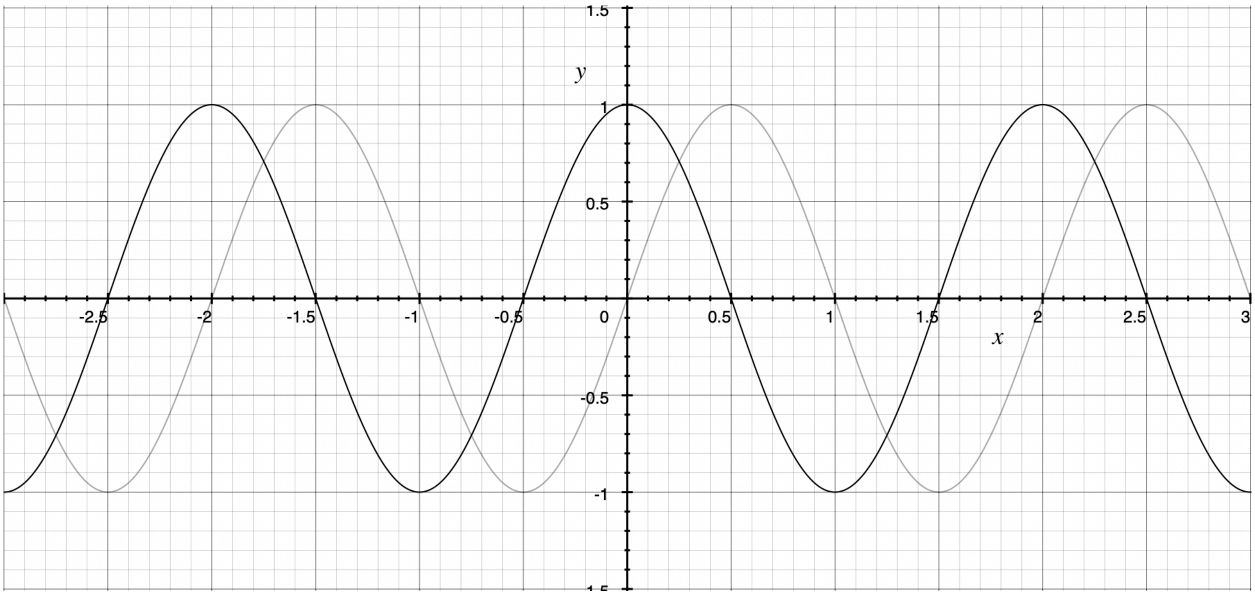
உவவிச்சார்பனின் வரைபடம் (xஅச்சு π ஆரையனில்)

இனி உவவிச்சார்பனை காண்போம். கோணம் சுழியமாயிருக்கும்போது இந்த சார்பன் 1இல் தொடங்குகிறது. கோணம் அதிகரிக்க இதன் மதிப்பு குறைந்து $\pi/2$ இல் சுழியத்தை அடைகிறது. பிறகு எதிர்ம மதிப்புகளுக்கு குறைந்து πயில் மீச்சிறுமத்தை அடைகிறது. அதன்பிறகு அதிகரித்து $\frac{3\pi}{2}$

இல் சுழியத்தை கடந்து மீண்டும் நேர்மமாகிறது. இறுதியில் 2π இல் 1 ஐ அடைந்து ஒரு சுழற்சி முடிகிறது. அதன்பின் ஒவ்வொரு 2π க்கும் சுற்று மீள்வருகிறது. இதே நடத்தையை கோணம் சுழியத்திலிருந்து குறைந்து எதிர்மமாகும்போதும் காண்கிறோம். அருகிலுள்ள படம் உவவிச்சார்பனின் இரண்டு சுழற்சிகளை காட்டுகிறது. இங்கும், $-\pi$ யிலிருந்து π வரைபோன்ற எந்தவொரு 2π இடைவெளியையும் ஒரு சுழற்சியாக காணலாம்.

நாங்கள் இங்கு வவிச்சார்பனையும் உவவிச்சார்பனையும் காட்டியிருக்கிறோம். மற்ற முக்கோணவியச்சார்பன்களை வவி, உவவி ஆகியவற்றின்வழி எழுதலாம் என்பதால், இந்த இரண்டு படங்களையும் பார்த்து மற்றவற்றின் வரைபடங்கள் எவ்வாறிருக்கும் என்று நீங்கள் வரைந்துபாருங்கள்.

அடுத்ததாக, இரண்டு சார்பன்களை ஒரே தாளில் வரைந்துபார்ப்போம். படத்தில் வவிச்சார்பனையும் உவவிச்சார்பனையும் மூன்று சுழற்சிகளுக்கு காட்டியிருக்கிறோம். இந்த சித்திரத்தை நீங்கள் மனத்தில் இறுத்திக்கொண்டால் இதிலிருந்து பல உண்மைகளை உடனே அறிந்துகொள்ளலாம். ஒரு சித்திரம் ஆயிரம் சொற்களுக்கு சமானம் என்று ஒரு பழமொழி உண்டு. குறிப்பாக வவிச்சார்பன் சுழியத்திலும் உவவிச்சார்பன் 1 இலும் தொடங்குவதை நோக்குக. நாம் முன்பு கணக்கிட்ட எல்லா மதிப்புகளும் இந்த சித்திரத்துடன் ஒவ்வுவதை சரிபார்த்துக்கொள்க.



வவிச்சார்பனும் (மெல்லிய கோடு) உவவிச்சார்பனும் (தடித்த கோடு)

உவவிச்சார்பனுக்கு சுழியத்தைப்பற்றி ஒரு சமச்சீர்மை இருப்பதை நோக்குக. உவவி$(-\theta) =$ உவவி(θ) என்பது எல்லா θ மதிப்புகளுக்கும் உண்மையாவது படத்திலிருந்து தெளிவாக தெரிகிறது. அதாவது, செயலுருபின் (θவின்) குறியை மாற்றும்போது சார்பனின் மதிப்பு மாறாமலிருக்கிறது. இந்த பண்புள்ள சார்பன்களை **சமச்சீரான சார்பன்**கள் என்கிறோம். மாறாக, வவிச்சார்பனுக்கு வவி$(-\theta) = -$ வவி(θ) என்பது உண்மையாகிறது. அதாவது, செயலுருபு குறிமாறும்போது சார்பன்மதிப்பும் குறிமாறுகிறது. இந்த பண்புள்ள சார்பன்களை **எதிர்ச்சமச்சீரான சார்பன்**கள் என்கிறோம். பொதுவாக ஒரு சார்பனுக்கு θ இலும் $-\theta$ இலுமுள்ள மதிப்புகளிடையில் எவ்விதமான உறவும் இருப்பதில்லை என்பதை நோக்குக. அவ்வாறான சார்பன்கள் சமச்சீரற்ற

சார்பன்கள். வவிச்சார்பனுக்கும் உவவிச்சார்பனுக்குமுள்ள இந்த சமச்சீர்மைப்பண்புகளை இந்த சார்பன்களின் பொது வரையறையிலிருந்தே முன்பு கண்டிருக்கிறோம்.

சுழியத்தில் மட்டுமல்லாமல், இந்த சார்பன்கள் வேறு இடங்களிலும் சமச்சீரானவை. சான்றாக, $\theta = \pi/2$இல் வவிச்சார்பனின் நடத்தையை நோக்குக. இந்தச்சார்பனை இந்தப்புள்ளியிலிருந்து வலப்பக்கமும் இடப்பக்கமும் நோக்கினால் ஒரு சமச்சீர்மை தெரிகிறதா? இந்த சமச்சீர்மையை கணிதச்சமன்பாடாக எவ்வாறு எழுதலாம்? சிந்தியுங்கள்! வவி$(\pi/2 - \theta) =$ வவி$(\pi/2 + \theta)$ என்று எழுதலாமா? இதே இடத்தில் உவவிச்சார்பனுக்கு ஒரு சமச்சீர்மை இருக்கிறதா? என்ன, எதிர்ச்சமச்சீர்மை இருக்கிறது என்கிறீர்களா? ஆம்! இதை கணிதச்சமன்பாடாக எழுதுக.

இவ்வாறே $\pi, 3\pi/2, 2\pi, -\pi/2, -\pi, -3\pi/2, -2\pi$ ஆகிய இடங்களிலும் இரண்டு சார்பன்களுக்கும் சமச்சீர்மையோ எதிர்ச்சமச்சீர்மையோ இருப்பதை படத்தை பார்த்து உணர்ந்துகொள்க. அதற்கான சமன்பாடுகளையும் எழுதுக.

இதுவரை எதிரொளிப்புச்சமச்சீர்மையை கருதினோம். இனி நகர்ச்சிச்சமச்சீர்மையை கருதுவோம். உவவிச்சார்பனை x அச்சில் அதன் நேர்மத்திசையில் $\pi/2$ அளவுக்கு நகர்த்தினால் என்னாகிறது? படத்திலுள்ள வளைவரைகளை பார்த்து சொல்லுங்கள்! அவ்வாறு நகர்த்தும்போது உவவிவரை வவிவரையுடன் மேற்பொருந்துகிறதா? இதிலிருந்து என்ன தெரிகிறது? உவவி$(\theta) =$ வவி$(\theta + \pi/2)$ என்ற முடிவுக்கு வரலாமா? வரலாம்! இதையே சற்று வேறு வடிவில் நாம் முன்பு கண்டோம். அங்கு, உவவி$(\theta - \pi/2) =$ வவி(θ) என்ற வடிவில் கண்டோம். இரண்டும் ஒரே உறவை குறிக்கின்றனவன்றோ! இதைப்போன்ற வேறு பல உறவுகளையும் நீங்கள் கண்டறியலாம்.

முக்கோணவியலை மிகப்பல உறவுகளை மனப்பாடஞ்செய்யவேண்டிய ஒரு களமாக கருதாமல், உங்கள் விருப்பபடி கண்டுபிடிப்புகளை நிகழ்த்தத்தக்க ஒரு விளையாட்டுக்களமாக கருதலாம்.

பித்தாகரசின் முற்றொருமைகள்

மூலத்திலிருந்து $P(x, y)$ என்ற புள்ளியின் தொலைவு r எனில்,

$r^2 = x^2 + y^2$

என்பதை நாம் அறிவோம். பித்தாகரசின் தேற்றமும் இதையே சொல்கிறது. இதிலிருந்து கீழ்க்காணும் முக்கோணவிய முற்றொருமைகளை உடனடியாக பெறுகிறோம்.

வவி$^2(\theta) +$ **உவவி**$^2(\theta) = 1$

தொவி$^2(\theta) + 1 =$ வெவி$^2(\theta)$

$1 +$ உதொவி$^2(\theta) =$ உவெவி$^2(\theta)$

பிந்தைய இரண்டு முற்றொருமைகளையும் சிலர் வேறு வடிவில் எழுதியிருப்பார்கள்.

வெவி$^2 -$ தொவி$^2 = 1$

உவெவி$^2(\theta) -$ உதொவி$^2(\theta) = 1$

என்று எழுதியவையும் பித்தாகரசுத்தேற்றத்தின் அடிப்படையில் எழுந்தவையே என்று உணர்ந்துகொள்ளுங்கள்.

கூட்டுக்கோணங்களின் சார்பன்கள்

இப்போது α, β ஆகியவை இரண்டு கோணங்கள் எனில், வவி$(\alpha + \beta)$வை α, β ஆகிய கோணங்களின் முக்கோணவியச்சார்பன்களின்வழி எழுதலாமா என்று கேட்கிறோம். இதற்காக, படத்தில் காட்டியபடி Aயில் α என்ற கோணத்தையும் $\alpha + \beta$ என்ற கோணத்தையும் தாங்கும் இரண்டு கோடுகளை கருதுக. α கோணமுள்ள கோட்டில் C என்ற ஒரு புள்ளியை எடுத்து அதிலிருந்து ஒரு

செங்குத்துக்கோட்டை வரைந்து $\alpha+\beta$ கோணமுள்ள கோட்டுக்கு நீட்டுவோம். அது B என்ற புள்ளியில் சந்திப்பதாக கொள்வோம். ABC என்ற செங்கோண முக்கோணத்தை வரைந்து அதை செவ்வகத்தால் படத்தில் காட்டியபடி உள்வரைவோம். $AB = 1$ எனவும் கொள்வோம். அப்படியெனில், $AC =$ உவவி β என்பதும் $BC =$ வவி β என்பதும் தெளிவு.

இப்போது, $\angle BCE = \alpha$ என்பதை சரிபார்த்துக்கொள்க.

நமக்கு வவி$(\alpha+\beta) = AF$ தேவை. இதை α, β ஆகியவற்றின் முக்கோணவியச்சார்பன்களின்வழி எழுத விரும்புகிறோம். AFஐ

$AF = DC + CE$

என்று இருபகுதிகளாக பிரிக்கலாம். ஆனால்,

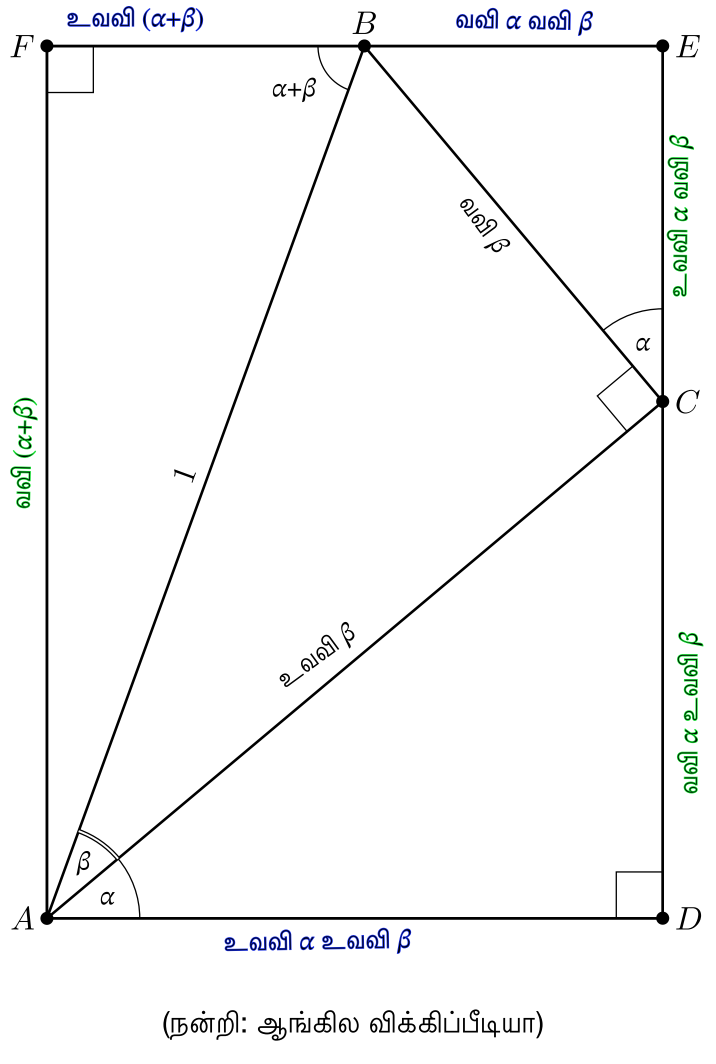
$DC = AC$ வவி$(\alpha) =$ வவி(α) உவவி(β)

$CE = BC$ உவவி$(\alpha) =$ உவவி(α) வவி(β)

என்று படத்திலிருந்து எளிதாக காண்கிறோம். எனவே,

வவி$(\alpha+\beta) =$ வவி(α) உவவி$(\beta) +$ உவவி(α) வவி(β)

என்ற இறுதிவிடையை பெறுகிறோம்.



(நன்றி: ஆங்கில விக்கிப்பீடியா)

இதே முறையை பின்பற்றி

உவவி$(\alpha+\beta)=$ உவவி(α) உவவி$(\beta)-$ வவி(α) வவி(β)

என்பதையும் நீங்கள் காணலாம்.

இங்கு படத்தை $\alpha,\beta,\alpha+\beta$ ஆகிய மூன்று கோணங்களும் தளத்தின் முதற்காற்பகுதியில் இருக்கும்படி வரைந்தோம். இவற்றுள் ஒன்றோ இரண்டோ மூன்றுமோ வேறு எந்த காற்பகுதியில் இருந்தாலும் நாம் வருவித்த முற்றொருமைகள் உண்மையே. இதையும் சரிபார்க்க முயலுங்கள்.

மேற்கண்ட இரண்டு முற்றொருமைகளையும் மனத்தில் கொண்டால், அவற்றிலிருந்து மிகப்பல முற்றொருமைகளை வருவிக்கலாம். அவற்றுள் ஒன்று

$$\text{தொவி}(\alpha+\beta)=\frac{\text{தொவி}(\alpha)+\text{தொவி}(\beta)}{1-\text{தொவி}(\alpha)\ \text{தொவி}(\beta)}$$

என்பது. (எவ்வாறு வருவிக்கலாம் என்று தெரிகிறதா?) இதை தொவி(α), தொவி(β), தொவி$(\alpha+\beta)$ ஆகியவற்றுள் எதுவும் முடிவிலியாகாதபோதே பயன்படுத்தலாம் என்பதை நோக்குக. அதாவது, $\alpha,\beta,(\alpha+\beta)$ ஆகியவற்றுள் எதுவும் $\pi/2$ இன் ஒற்றைப்படைமடங்காக இல்லாதபோது பயன்படுத்தலாம். வேறு சில முற்றொருமைகளையும் கீழ் தருகிறோம். அவற்றையும் நீங்கள் எளிதில் நிறுவலாம்.

$$\text{உதொவி}(\alpha+\beta)=\frac{\text{உதொவி}(\alpha)\ \text{உதொவி}(\beta)-1}{\text{உதொவி}(\beta)+\text{உதொவி}(\alpha)}$$

$$\text{வவி}(\alpha-\beta)=\text{வவி}(\alpha)\ \text{உவவி}(\beta)-\text{உவவி}(\alpha)\ \text{வவி}(\beta)$$

$$\text{உவவி}(\alpha-\beta)=\text{உவவி}(\alpha)\ \text{உவவி}(\beta)+\text{வவி}(\alpha)\ \text{வவி}(\beta)$$

$$\text{உதொவி}(\alpha-\beta)=\frac{\text{உதொவி}(\alpha)\ \text{உதொவி}(\beta)+1}{\text{உதொவி}(\beta)-\text{உதொவி}(\alpha)}$$

மடங்குக்கோண உறவுகள்

கூட்டுக்கோண உறவுகளில் $\alpha=\beta=\theta$ என்று வைத்தும் நாம் முன்பே கண்ட வேறு சில முற்றொருமைகளை பயன்படுத்தியும்

$$\begin{aligned}\text{வவி}(2\theta)&=2\text{வவி}(\theta)\ \text{உவவி})(\theta)\\&=\frac{2\text{தொவி}(\theta)}{1+\text{தொவி}^2(\theta)}\\ \text{உவவி}(2\theta)&=\text{உவவி}^2(\theta)-\text{வவி}^2(\theta)\\&=2\text{உவவி}^2(\theta)-1\\&=1-\text{வவி}^2(\theta)\\&=\frac{1-\text{தொவி}^2(\theta)}{1+\text{தொவி}^2(\theta)}\end{aligned}$$

என்றெல்லாம் வருவிக்கலாம். இதிலிருந்து தொவி(2θ) வுக்கான முற்றொருமையையும் நீங்கள் எழுதலாம். மேலும் $3\theta,\ 4\theta$ என்று எழுதிக்கொண்டே போகலாம்.

கூட்டல்வாய்ப்பாடுகளும் பெருக்கல்வாய்ப்பாடுகளும்

மேலும் பலவகையானவற்றையும் எழுதலாம். நாங்கள் இங்கு கூட்டல் வாய்ப்பாடுகள், பெருக்கல் வாய்ப்பாடுகள் என்று அழைக்கப்படுபவற்றை மட்டும் பட்டியலிடுகிறோம்.

வவி$(\alpha+\beta)$வுக்கும் வவி$(\alpha-\beta)$ வுக்கும் நாம் கண்ட முற்றொருமைகளை கூட்டி, அதில் $A=\alpha+\beta, B=\alpha-\beta$ என்று இடுவதன்மூலம்

$$\text{வவி}(A) + \text{வவி}(B) = 2\text{வவி}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{உவவி}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

என்ற கூட்டல்வாய்ப்பாட்டை பெறுகிறோம். இதையே

$$2\text{வவி}(C)\,\text{உவவி}(D) = \text{வவி}(C+D) + \text{வவி}(C-D)$$

என்ற வடிவில் எழுதினால் அது பெருக்கல்வாய்ப்பாடாகிறது.

கூட்டுவதற்குப்பதிலாக கழித்தால்,

$$\text{வவி}(A) - \text{வவி}(B) = 2\text{உவவி}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{வவி}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$2\text{உவவி}(C)\,\text{வவி}(D) = \text{வவி}(C+D) - \text{வவி}(C-D)$$

என்றவாறு ஒரு கழித்தல்வாய்ப்பாட்டையும் மற்றொரு பெருக்கல்வாய்ப்பாட்டையும் பெறுகிறோம். ஆனால், இவை முன்பு கண்ட கூட்டல், பெருக்கல் வாய்ப்பாடுகளிலிருந்து எவ்விதத்தில் வேறுபடுகின்றன என்று சிந்தியுங்கள்.

இவ்வாறே, உவவியின் கூட்டுக்கோண முற்றொருமைகளிலிருந்து

$$\text{உவவி}(A) + \text{உவவி}(B) = 2\,\text{உவவி}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{உவவி}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$2\,\text{உவவி}(C)\,\text{உவவி}(D) = \text{உவவி}(C+D) + \text{உவவி}(C-D)$$

$$\text{உவவி}(A) - \text{உவவி}(B) = -2\,\text{வவி}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{வவி}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$-2\,\text{வவி}(C)\,\text{வவி}(D) = \text{உவவி}(C+D) - \text{உவவி}(C-D)$$

என்பனவற்றை பெறலாம்.

முடிவுரை

ஒரு வடிவொத்த செங்கோணமுக்கோணக்கணத்தை விவரிக்க ஒரே அளவுரு போதுமானது என்பதில் தொடங்கினோம். அந்த அளவுருவை θ என்ற ஒரு கோணமாக எடுத்தால் அதன்வழி முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கிடையான எல்லா விகிதங்களையும் எழுதிவிடலாம். இவற்றையே இந்த கோணத்தின் முக்கோணவியச்சார்பன்கள் என்கிறோம். இந்த விகிதங்கள் ஒன்றையொன்று சாராதவை அல்ல. இவற்றிடையில் பல உறவுகள் இருப்பதால் அந்த உறவுகளிலிருந்து மேலும் எண்ணற்கரிய உறவுகளை நாம் வருவிக்கலாம். இந்த உறவுகளின் தொகுப்பே முக்கோணவியல் ஆகிறது.

எந்தவொரு பலகோணத்தையும் பல முக்கோணங்களால் வடிவடுக்கலாம். செங்கோண முக்கோணமல்லாத எந்தவொரு முக்கோணத்தையும் இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்களாக பிரிக்கலாம். வட்டம், நீள்வட்டம் போன்ற மூடிய வளைவரைகளையும் முடிவிலி எண்ணிக்கையான பக்கங்களுள்ள பலகோணங்களாக கருதலாம் என்பதால் அவற்றையும் செங்கோணமுக்கோணங்களாக குறைக்கலாம். இவ்வாறு முக்கோணவிய உறவுகள் தளத்திலுள்ள எல்லா வடிவங்களுக்கும் பயனாவதை நாம் எளிதில் புரிந்துகொள்ளலாம். இருபருமான வெளியை ஒரு தொலைவாலும் ஒரு கோணத்தாலும் வீச்சளந்ததுபோலவே முப்பருமானவெளியை ஒரு தொலைவாலும் இரண்டு கோணங்களாலும் வீச்சளக்கலாம். இவ்வாறு முக்கோணவியவுறவுகள் முப்பருமானவடிவியலுக்கும் பலபருமானவடிவியலுக்கும் பயனாகின்றன. மற்ற கணிதத்துறைகளில் எழும் மிகப்பல் கருத்துருகளையும் நாம் வடிவியலின் உவமையில் புரிந்துகொள்வதால் அங்கும் முக்கோணவியல் பயனாகிறது. மேலும், அறிவியல், பொருளியல், சமூகவியல், கலையியல் போன்ற துறைகளிலும் எழும் கணிதவொப்புருகளிலும் வடிவியலும் அதனால் முக்கோணவியலும் பயன்படுகின்றன.

முக்கோணவிய உறவுகளுள் சிலவற்றை பட்டியலிட்டு மாணவர்களை இவற்றை மனப்பாடஞ்செய்யவைத்து எவ்வளவு நன்றாக மனப்பாடஞ்செய்திருக்கிறார்கள் என்று சோதித்து அதற்குத்தக மதிப்பெண்வழங்குவது மிகவும் மோசமான கல்விமுறை. இந்த கல்விமுறை சிந்தனையாளர்களை உருவாக்காது.

இந்த உறவுகள் எவ்வாறு எழுகின்றன, அவற்றை எப்படி பயன்படுத்தலாம், அறிவியலிலும் கட்டுமானம், வானியல், வழிகாணல் போன்ற பொறியியற்றுறைகளிலும் எழும் சிக்கல்களை எவ்வாறு தீர்க்கலாம் என்று மாணவர்களை சிந்திக்கத்தூண்டும் நோக்கில் கல்வி இருக்கவேண்டும். சிக்கல்களில் தேவையானபோது இந்த முற்றொருமைகளை வருவித்துக்கொண்டிருக்கவேண்டாம் என்பதால் முன்கூட்டியே சிலவற்றை பட்டியலிட்டு வைத்துக்கொள்வது வசதியானது. அவ்வாறான பட்டியலை தேவைப்படும்போது நோக்கிக்கொள்ளலாம். வேறுவிதமாகச்சொன்னால், தேர்வின்போது பட்டியலை மாணவர்களின் கைகளில் கொடுத்துவிடவேண்டும். இதற்கு **திறந்த தேர்வு** என்று பெயர். மாணவர்களை பட்டியலிட்ட ஒரு கட்டுக்குள் வைக்காமல் அவர்கள் விருப்பப்படி புதிய கண்டுபிடிப்புகளை நிகழ்த்துமாறு தூண்டுவது திறந்த கல்வி. திறந்த கல்வியே சிறந்த கல்வி.