படலம் 1

கணங்கள்

1.1 அறிமுகம்

கணம் என்னும் கருத்துரு கணிதத்தில் அடிப்படையானது. பெரும்பாலான கணிதப் புலங்களில் கணக்கோட்பாடு பயன்படுகிறது. சான்றாக, வடிவியல், தொடரிகள், நிகழ்தகவு போன்ற புலங்களில் கணக்கோட்பாடுகள் பயன்படுகின்றன. கியோர் கான்றோர் (1845 – 1918) எனும் இடாய்ச்சுக்கணிதவியலர் முக்கோண வியலில் தொடரிகளைப்பற்றி ஆராய்ச்சிசெய்த போது, கணக்கோட்பாட்டை உருவாக்கினார்.

கணம் என்பது வரையறுக்கப்பட்ட பொருள்களின் தொகுப்பு. அவ்வாறு தொகுக்கப்பட்ட பொருள்களுக்கிடையான தொடர்புகளையும் சார்புகளையும் கணங்களால் விளங்கிக்கொள்ளலாம்.

1.2 கணங்களும், கணங்களின் குறியீடும்

இயல்புவாழ்க்கையில் நாம் காணும் தேனீக்கூட்டம், எறும்புக்கூட்டம், மக்கட்குழு, சீட்டுக்கட்டு, விளையாட்டுக்குழு என்பவை பலதரப்பட்ட பொருட்களின் தொகுப்பையோ உயிரினங்களின் தொகுப்பையோ குறிக்கின்றன. அதைப்போல் கணிதத்திலும் பல்வேறுவகைப்பட்ட குழுக்களையோ தொகுப்பையோ காணலாம்; இயலெண்கள், புள்ளிகள், ஒற்றைப்படை யெண்கள், இரட்டைப்படையெண்கள், பகாவெண் கள் போன்ற தொகுப்புகளும் கணங்களாகின்றன.

10க்கும் குறைவான ஒற்றைப்படையெண்கள்: $1, 3, 5, 7, 9$

தமிழ்நாட்டிலுள்ள மாவட்டங்கள்

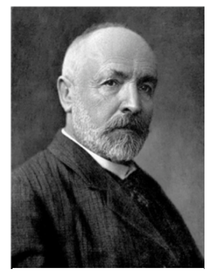
திராவிட மொழிகள்: தமிழ், மலையாளம், தெலுங்கு, கன்னடம், துளு, கோந்தி, பிராகுயி

தமிழில் உயிரெழுத்துகள்

முக்கோணத்தின் வகைகள்

$x^2 - 5x + 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்: $2, 3$

இவ்வாறு நாம் பார்த்த எல்லாம் சரிவர வரையறுக்கப்பட்ட தொகுப்பு என்பதை உணரலாம். முதற்சான்றில், 11 கணத்தில் சேரவில்லை; ஏனெனில் அது 10க்கு குறைவானதன்று. 2 கணத்தில் சேரவில்லை; ஏனெனில் அது ஒற்றைப்படையன்று. இவ்வாறு தெளிவாக வரையறுக்கப்பட்ட உறுப்புகள் உள்ளவை கணங் கள். இவ்வாறே வேறு பல எண்கணங்களையும் வரைய றுக்கலாம்



கியோர் கான்றோர் (1845-1918)

$\mathbb{N}$: இயலெண்களின் கணம்

$\mathbb{Z}$: முழுவெண்களின் கணம்

$\mathbb{Q}$: விகிதமுறு எண்களின் கணம்

$\mathbb{R}$: மெய்யெண்களின் கணம்

$\mathbb{Z}^+$: நேர்ம முழுவெண்களின் கணம்

$\mathbb{Q}^+$: நேர்ம விகிதமுறு எண்களின் கணம்

$\mathbb{R}^+$: நேர்ம மெய்யெண்களின் கணம்

மேலுள்ள குறியீடுகளை இந்நூலின் முழுவதிலும் அந்தந்த கணங்களை குறிக்க பயன்படுத்துகிறோம்.

தெளிவாக வரையறுக்கப்படாத தொகுப்பை கணமாக கொள்ளவியலாது. சான்றாக, பிடித்தமான 10 அறிவியலர்களையோ பிடித்த மான 10 உணவுப்பொருள்களையோ தொகுக்கச் சொன்னால், ஒவ்வொருவரும் அவரவரது விருப்பத்துக்கேற்ப ஒவ்வொரு பட்டியலை எழுதுவார்.

ஆக, ஒரு கணம் என்பது திட்டவட்டமாக வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு தொகுப்பு என்பதை நினைவில் கொள்க.

குறிப்புரை

1. கணத்திலுள்ள பொருள்களை அந்தக்கணத் தின் உறுப்பினர்கள் என்றோ உறுப்புகள் என்றோ அழைக்கிறோம்.

2. கணங்களை பொதுவாக A, B, C, X, Y, Z போன்ற உரோமானிய எழுத்துகளால் குறிக்கிறோம். அச்சிட்ட நூல்களிலும் ஆவணங்களிலும் $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ போன்ற இரட்டைக்கோட்டு எழுத்துகளால் குறிக்கலாம்.

3. கணங்களின் உறுப்புகளை a, b, c, x, y, z போன்ற உரோமானிய சிறிய எழுத்துகளால் குறிக்கிறோம்.

ஒரு கணத்தின் உறுப்புகளை நெளியடைப்புக் குறிக்குள் எழுதுகிறோம். சான்றாக, $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e, f\}$

A என்ற கணத்தில் a என்ற உறுப்பு அடங்கியுள்ளது என்பதை $a \in A$ என்றோ $A \ni a$ என்றோ குறிக்கிறோம். இந்த கணத்தில் b என்ற உறுப்பு இல்லாவிட்டால் அதை $b \notin A$ என்றோ $A \not\ni b$ என்றோ குறிக்கிறோம். இங்கு ∊ என்ற கிரேக்க அடையாளம் 'அடங்குகிறது' என்பதையும் ∉ 'அடங்கவில்லை' என்பதையும் குறிக்கின்றன. $A \ni a$ என்பதை Aயிலுள்ள a என்றும் $A \not\ni b$ என்பதை Aயில் இல்லாத b என்றும் வாசிக்கலாம்.

கணங்களை பட்டியற்குறியீடு, பண்புக் குறியீடு ஆகிய இரு வழிகளில் எழுதலாம்.

(1) பட்டியற்குறியீடு

கணங்களை பட்டியலாகவே எழுதும் முறை கணங்களின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் பட்டியிலிட்டு சொல்வது. சான்றாக, 10ஐ விடக்குறைவான எண்களில், இரட்டைப்படை யெண்களின் கணம் என்பதை, பட்டியற்குறியீட்டில் எழுதும்போது, $E = \{2,4,6,8\}$ என பட்டியலிட்டு எழுதுவோம்.

> **குறிப்பு**: மேலுள்ள கணத்தில், அதன் கூறுகளை (உறுப்புகளை) முறைமைமாற்றி எழுதலாம். $E = \{2,4,6,8\}$ என்பதை $E = \{8,4,6,2\}$ என எழுதலாம். $V = \{a, e, i, o, u\}$ என்பதை $V = \{e, a, u, i, o\}$ என மாற்றியெழுதலாம்.

ஆகையால் பட்டியற்குறியீட்டில் உறுப்புகளை எழுதும் முறைமைக்கு பொருளில்லை.

வேறு சில சான்றுகள் பின்வருமாறு:

(அ) தமிழின் உயிரெழுத்துக்கணம் உயிர் $=$ {அ, ஆ, இ, ஈ, உ, ஊ, எ, ஏ, ஐ, ஒ, ஓ, ஔ}

(ஆ) ஆங்கிலத்தில் உயிரெழுத்துகள் $\mathbb{V} = \{a, e, i, o, u\}$

(இ) ஒற்றைப்படையெண்களின் கணம் $\mathbb{O} = \{1,3,5, \dots\}$. இதிலுள்ள புள்ளிகள், ஒற்றைப்படை யெண்கள் முடிவிலாது நிறைய இருக்கின்றன என்பதை குறிக்கின்றன.

(ஈ) school எனும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துகளின் கணம் $\{s, c, h, o, l\}$

> **குறிப்பு:** $school$இல் o என்ற எழுத்து இரண்டுமுறை வந்துள்ளது. கணங்களில் ஒவ்வோருறுப்பும் தனிப்பட்டது என்பதால், oவை ஒரு முறையே எழுதுகிறோம்.

(2) பண்புக்குறியீடு

இம்முறையில், கணத்தின் எல்லா உறுப்புகளுக்கும் இருப்பதும் கணத்தில் இல்லாத எந்த உறுப்புக்கும் இல்லாததுமான ஒரு பொதுவான பண்பை குறிப்பிட்டு எழுதுகிறோம். சான்றாக, ஆங்கில எழுத்துகளிலுள்ள உயிரெழுத்துகளை குறிக்கும் கணத்தை, இவ்வாறு எழுதுவோம்.

$\mathbb{V} = \{x :\ x$ ஆங்கில உயிரெழுத்து$\}$

இதில் x ஏதோவொரு ஆங்கில உயிரெழுத்தை குறிக்கிறது. xக்குப்பதிலாக y, z போன்ற வேறெந்த அடையாளத்தையும் பயன்படுத்தலாம். இதில் : எனும் குறி கணத்தின் "உறுப்பாக இருப்பதற்கு வேண்டிய அடிப்படைப்பண்பு" இது என்று குறிக்கிறது. குறிப்பிட்ட பண்பு இல்லாதது கணத்தில் இல்லை. மற்றொரு சான்றாக

$\mathbb{O} = \{a : a$ ஒற்றைப்படையெண்$, 0 < a < 6\}$

என்பது ஆறுக்குக்குறைந்த நேர்ம ஒற்றைப்படையெண்களின் கணம். அதில் 1,3,5 ஆகிய உறுப்புகள் உள்ளன.

மேலே குறிப்பிட்ட (அ)முதல் (ஈ)வரையான கணங்களை பண்புக்குறியீட்டில் கீழ்க்காணுமாறு எழுதலாம்.

(அ) உயிர்$=\{x : x$ தமிழின் உயிரெழுத்து$\}$

(ஆ) $\mathbb{V} = \{x : x$ ஆங்கிலத்தின் உயிரெழுத்து$\}$

(இ) ஒ$=\{z : z$ ஒற்றைப்படையெண்$\}$

(ஈ) $\mathbb{S} = \{l :\ l\ school$ என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்து$\}$

சான்று 1 $x^2 + x - 2 = 0$ எனும் இருபடிச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் கணத்தை பட்டியற்குறியீட்டில் எழுதுக.

தீர்வு மேலுள்ள இருபடிச்சமன்பாட்டை இரண்டு காரணிகளாக பிரித்து எழுதலாம்

$(x - 1)\ (x + 2) = 0.$

அதன்படி $x = 1, -2$. இத்தீர்வுகள் பட்டியற்கண வடிவில் $\{1, -2\}$

சான்று 2 $\{x : x$ ஒரு நேர்ம முழுவெண், $x^2 < 40\}$ என்ற கணத்தை பட்டியற்குறியீட்டில் எழுதுக.

தீர்வு $x^2 = 40$ என்பதன் தீர்வுகள் $x = \pm\sqrt{40}$. வேண்டியது நேர்ம எண்களின் கணம் என்பதால், இதை கணமாக எழுத, $\{1,2,3,4,5,6\}$

சான்று 3 $\mathbb{A} = \{1,4,9,16,25, \dots\}$ எனும் கணத்தை பண்புக்குறியீட்டில் எப்படி எழுதலாம்?

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் கணத்தின் உறுப்புகள் இயலெண்களின் இருமடியை குறிக்கிறது. எனவே

$\mathbb{A} = \{x :\ x$ என்பது இயலெண்ணின் இருமடி$\}$

இதை கணிதக்குறியீடுகளைப்பயன்படுத்தி மேலும் சுருக்கமாக எழுதலாம்.

$\mathbb{A} = \{x :\ x = n^2,$ இங்கு $n \in N\}$

சான்று 4

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}\right\}$$

எனும் கணத்தை பண்புக்குறியீட்டில் எழுதுக

தீர்வு இக்கணத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பிலுள்ள பின்னத்திலும் கீழ்க்காரணி மேற்காரணியை

விட ஒன்று அதிகமாக உள்ளதை காணலாம். இதை பொதுவாக $^{n}/_{(n+1)}$ என்று குறிக்கலாம். பண்புக்குறியீட்டில்

$\{x : x = \dfrac{n}{(n+1)}, n$ ஒரு இயலெண், $1 \le n \le 6\ \}$ என எழுதலாம்.

சான்று 5 பொருத்துக:

பட்டியற்குறியீடு	பண்புக்குறியீடு
(i) $\{P, R, I, N, C, A, L\}$	(அ) $\{x: x$ ஒரு நேர்ம எண், 18இன் வகுவெண் $\}$
(ii) $\{0\}$	(ஆ) $\{x: x$ ஒரு முழுவெண், $x^2 - 9 = 0\}$
(iii) $\{1,2,3,6,9,18\}$	(இ) $\{x: x$ ஒரு முழுவெண், $x + 1 = 1\}$
(iv) $\{3, -3\}$	(ஈ) $\{x: x\ PRINCIPAL$ என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்து$\}$

தீர்வு (ஈ)இலுள்ள சொல்லில் 9 எழுத்துகள் இருப்பினும் P, I ஆகியவை மீண்டும் வருகின்றன. எனவே (i) (ஈ)உடன் பொருந்துகிறது. $x + 1 = x$ எனில் $x = 0$. எனவே (ii) (இ)உடன் பொருந்துகிறது. $1,2,3,6,9,18$ ஆகியவை எல்லாமே 18ஐ வகுக்கின்றன. இறுதியில், $x^2 - 9 = 0$ என்பது $x = 3, -3$ என்பதை உள்ளுரைப்பதால் (iv)உம் (ஆ)உம் சமம். சுருக்கவுரையாக,

பட்டியற்குறியீடு	பண்புக்குறியீடு
$\{P, R, I, N, C, A, L\}$	$\{x: x\ PRINCIPAL$ என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்து$\}$
$\{0\}$	$\{x: x$ ஒரு முழுவெண், $x + 1 = 1\}$
$\{1,2,3,6,9,18\}$	$\{x: x$ ஒரு நேர்ம எண், $18 -$ இன் வகுவெண் $\}$
$\{3, -3\}$	$\{x: x$ ஒரு முழுவெண், $x^2 - 9 = 0\}$

பயிற்சி 1.1

1. கீழ்வருவனவற்றுள் எவை கணங்கள்? விடைக்கான காரணத்தை உரைக்க.
   a. ஆண்டிலுள்ள ஆங்கில மாதங்களுள் 'ந'வில் தொடங்களும் மாதமோ மாதங்களோ
   b. இந்தியாவின் மிகச்சிறந்த 10 எழுத்தாளர்கள்
   c. உலகின் மிகப்புகழ்வாய்ந்த 10 திரைப்பட நடிகர்கள்
   d. உங்கள் வகுப்பிலுள்ள ஆண்மாணவர்கள்
   e. 100க்கு குறைவான இயலெண்களின் தொகுப்பு
   f. நோபற்பரிசுபெற்ற இயற்பியர்களின் பெயர்கள்
   g. இரட்டைப்படை முழுவெண்களின் தொகுப்பு
   h. இப்பாடத்திலுள்ள கேள்விகளின் தொகுப்பு
   i. ஆபத்தான விலங்குகளின் தொகுப்பு
2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ என்ற கணத்துக்கு, $\in$, $\notin$ ஆகிய தொடர்புக்குறியீடுகளை கீழ்க்காணும் கேள்விகளிலுள்ள வெற்றிடங்களில் சரியாக நிரப்புக.
   a. $5 \ldots A$
   b. $8 \ldots A$
   c. $0 \ldots A$
   d. $4 \ldots A$
   e. $2 \ldots A$
   f. $10 \ldots A$
3. கீழ்க்காணும் கணங்களை பட்டியற்குறியீட்டில் எழுதுக.
   a. $A = \{x: x$ஒரு முழுவெண், $-3 \le x < 7\}$
   b. $B = \{x: x\ 6$ஐவிட குறைந்த ஒரு இயலெண்$\}$
   c. $C = \{x: x$ ஒரு ஈரிலக்க இயலெண், இரண்டு இலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $8\ \}$
   d. $D = \{x: x$ ஒரு பகாவெண், 60இன் வகுவெண்$\}$
   e. $E = TRIGONOMETRY$ என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துகளின் கணம்
   f. $F = BETTER$ என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துகளின் கணம்
4. பண்புக்குறியீட்டால் கணத்தை அமைக்க.
   a. $\{3, 6, 9, 12\}$
   b. $\{2, 4, 8\ 16, 32\}$
   c. $\{5, 25, 125, 625\}$
   d. $\{2, 4, 6 \ldots\}$
   e. $\{1, 4, 9, \ldots, 100\}$
5. கீழ்க்காணும் கணங்களிலுள்ள எல்லா உறுப்புகளையும் எழுதுக.
   a. $A = \{x: x$ ஒரு ஒற்றைப்படை இயலெண்$\}$
   b. $B = \{x: x$ ஒரு முழுவெண், $1/2 < x < 9/2\}$
   c. $C = \{x: x$ ஒரு முழுவெண், $x^2 \le 4\}$
   d. $D = \{x: x\ LOYAL$ என்ற சொல்லின் ஒரு எழுத்து$\}$

e. $E = \{x: x$ 31 நாட்கள் இல்லாத ஆங்கில மாத்ததின் பெயர்$\}$

f. $F = \{x: x$ kக்கு முந்திய ஆங்கில மெய்யெழுத்து$\}$

6 பட்டியற்குறியீட்டையும் பண்புக்குறியீட்டையும் பொருத்துக.

a. $\{1,2,3,6\}$	1. $\{x: x$ ஒரு பகாவெண், 6இன் வகுவெண்$\}$
b. $\{2,3\}$	2. $\{x: x$ 10ஐவிட குறைவான ஒற்றைப்படை$\}$
c. $\{M, A, T, H, E, I, C, S\}$	3. $\{x: x$ ஒரு இயலெண், 6இன் வகுவெண்$\}$
d. $\{1,3,5,7,9\}$	4. $\{x:\ x$ $MATHEMATICS$ என்பதிலுள்ள எழுத்து$\}$

1.3 வெற்றுக்கணம்

$\mathbb{A}$ என்ற ஒரு கணத்தை கருதுவோம், அக்கணத்தை பண்புக்குறியீட்டில் இவ்வாறு எழுதுவோம்.

$\mathbb{A} = \{x : x$ 11ஆம்வகுப்பிலுள்ள ஒரு மாணவர்$\}$

பதினோராம் வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களை பட்டியலிட்டு இந்த கணத்தில் சேர்க்கலாம். அதைப்போல் $\mathbb{B}$ எனும் மற்றொரு கணத்தை வரையறுப்போம்

$\mathbb{B} = \{x : x$ 10ஆவதிலும் 11ஆவதிலும் படிக்கும் மாணவர்$\}$

ஆனால் இருவேறு படிநிலைகளில் ஒரு மாணவர் இருக்கவியலாது. எனவே, $\mathbb{B}$ என்ற கணத்தில் ஒருவரும் இல்லை. அவ்வாறெனில் அக்கணத்தை **வெற்றுக்கணம்** என்று அழைக்கிறோம்.

வரையறை 1 ஒரு கணத்தில் எந்தவொரு உறுப்பும் இல்லை எனில், அதை வெற்றுக்கணம் என்கிறோம்.

வரையறையின்படி, மேற்சொன்ன $\mathbb{B}$ ஒரு வெற்றுக்கணம்; $\mathbb{A}$ வெற்றுக்கணமன்று. வெற்றுக்கணத்தை $\{\}$ என்றோ ϕ என்றோ குறிக்கிறோம். வெற்றுக்கணத்துக்கு மற்றும் சில சான்றுகளை காண்போம்.

$\mathbb{A} = \{x : 1 < x < 2, x$ இயலெண்$\}$ எனில் A ஒரு வெற்றுக்கணம்

$\mathbb{B} = \{x :\ x^2 - 2 = 0, x$ ஒரு விகிதமுறு எண்$\}$ எனில் $\mathbb{B}$ ஒரு வெற்றுக்கணம். ஏனெனில் $x^2 - 2 = 0$ எனும் இருபடி சமன்பாடு $\pm\sqrt{2}$ எனும் விகிதமுறா எண்ணை தீர்வாகத்தருகிறது.

$\mathbb{C} = \{x : x$ 2ஐவிடப்பெரிய இரட்டைப்படைப்பகாவெண்$\}$

எனில் $\mathbb{C}$ ஒரு வெற்றுக்கணம், ஏனெனில், இரட்டைப்படையெண்கள் வரையறையின்படி இரண்டால் வகுபடுபவை. எனவே, அது பகாவெண் ஆகாது.

$\mathbb{D} = \{x : x^2 = 4, x$ ஒற்றைப்படை$\}$ எனில், $\mathbb{D}$ ஒரு வெற்றுக்கணத்தை தோற்றுவிக்கிறது. ஏனெனில், $x^2 = 4$, ஒற்றைப்படையெண்ணை தராது.

1.4 முடிவுறு கணமும் முடிவிலாக்கணமும்

சான்றாக, சில கணங்களை கருதுவோம்.

$\mathbb{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $\mathbb{B} = \{a, b, c, d, e, g\}$;

$\mathbb{C} = \{$உலகத்தில் வெவ்வேறு பகுதிகளில் வாழும் மனிதர்கள்$\}$

$\mathbb{A}$இல் 5 உறுப்புகளும் $\mathbb{B}$இல் 6 உறுப்புகளும் உள்ளன. $\mathbb{C}$இலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை நாம் அறுதியிட்டுக்கூறவியலாத மிகப்பெரிய எண்ணாயிருப்பினும் அதற்கு ஏதோவொரு மதிப்பு இருக்கவேண்டும்.

$\mathbb{S}$ என்ற கணத்தில் n **தனித்துவமான** உறுப்புகள் இருந்தால், கணத்திலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை $n(\mathbb{S})$ என்று குறிப்போம். இதில் $n(\mathbb{S})$ ஒரு இயலெண் எனில், $\mathbb{S}$ *வெற்றிலா முடிவுறு கணம்* என்கிறோம்.

இதையே,

$n(\mathbb{S}) \begin{cases} 0, & \text{வெற்றுக்கணம்} \\ \neq 0, & \text{வெற்றிலாக்கணம்} \end{cases}$ என்று

சுருக்கமாகவும் குறிக்கலாம்.

எல்லா இயலெண்களும் அடங்கிய ஒரு கணத்தை கருதுவோம். இக்கணத்தில் முடிவிலா எண்ணிக்கையான உறுப்புகள் உள்ளன; ஏனெனில் இயலெண்கள் முடிவிலிவரை தொடர்கின்றன. ஆகையால், இயலெண்களின் கணம், ஒரு முடிவிலாக்கணம்.

மேற்கண்ட $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ எனும் மூன்று கணங்களின் உறுப்பெண்ணிக்கைகள் $n(\mathbb{A}) = 5$, $n(\mathbb{B}) = 6$, $n(\mathbb{C}) =$ ஏதோவொரு முடிவுறு எண். ஆகவே, இவை முடிவுறு கணங்கள்.

வரையறை *2* ஒரு கணம் வெற்றுக் கணமாகவோ முடிவுறு எண்ணிக்கையான உறுப்புகள் உள்ளதாகவோ இருந்தால், அதை முடிவுறுகணம் என்கிறோம்; முடிவிலி எண்ணிக்கையான உறுப்புகள் உள்ளதை முடிவிலாக்கணம் என்கிறோம்.

சில சான்றுகளை கருதுவோம்.

$\mathbb{W}$ ஒரு வாரத்தின் நாள்கள் அடங்கிய கணம் எனில், $\mathbb{W}$ ஒரு முடிவுறுகணம்.

$x^2 - 16 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் உள்ள கணம் ஒரு முடிவுறுகணம்.

ஒரு கோட்டிலுள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை $\mathbb{G}$ எனில், $\mathbb{G}$ ஒரு முடிவிலாக்கணம்.

பட்டியற்குறியீட்டில் ஒரு கணத்தை எழுதும்போது. கணத்தின் உறுப்புகளை நாம் $\{\}$ எனும் நெளியடைப்புக்குறிக்குள் இடுகிறோம். முடிவிலி எண்ணிக்கையான உறுப்புகளுள்ள முடிவிலாக்கணத்தில் உறுப்புகளை தொடரும்

எனும் பொருள்படும்படி '...' என்று மூன்று புள்ளிகளால் குறிக்கிறோம். சான்றாக,

இயலெண்களின் கணத்தை குறிக்க $\{1,2,3,\ldots\}$ என எழுதுவோம்.

ஒற்றைப்படை இயலெண்களை குறிக்க $\{1,3,5,7,\ldots\}$ என எழுதுவோம்.

முழுவெண்களை குறிக்க

$$\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

என முடிவிலா எதிர்ம முழுவெண்களையும், முடிவிலா நேர்ம எண்களையும் கணத்தில் எழுதுவோம்.

குறிப்பு: எல்லா முடிவிலாக்கணங்களையும் பட்டியற்குறியீட்டில் எழுதவியலாது. சான்றாக, மெய்யெண்களின் கணத்தை பட்டியற் குறியீட்டில் எழுதவியலாது. ஏனெனில், மெய்யெண்கள் உதிரியாயில்லாமல் தொடர்ச்சியாயிருக்கின்றன.

சான்று 6 கீழ்க்காண்பவற்றை முடிவுறு கணம், முடிவுறாக்கணம் என வகைப்படுத்துக.

(அ) $\{\, x : x \in \mathbb{N}, (x-1)(x-2)=0 \,\}$

(ஆ) $\{\, x : x \in \mathbb{N}, (x^2 - 4)=0 \,\}$

(இ) $\{\, x : x \in \mathbb{Z}, (x^2 - 4)=0 \,\}$

(ஈ) $\{\, x : x \in \mathbb{N}, (2x - 1)=0 \,\}$

(உ) $\{x: x \in \mathbb{N}, x$ ஒரு பகாவெண்$\}$

(ஊ) $\{x: x \in \mathbb{N}, x$ ஒற்றைப்படை$\}$

தீர்வு (அ) கொடுக்கப்பட்ட கணம் $=\{1,2\}$, ஆகவே இது ஒரு முடிவுறுகணம்

(ஆ) கொடுக்கப்பட்ட கணம் $\{2\}$, ஆகவே இக்கணம் ஒரு முடிவுறுகணம்

(இ) கொடுக்கப்பட்ட கணம் $\{-2,+2\}$, ஆகவே இது முடிவுறுகணம்

(ஈ) கொடுக்கப்பட்ட கணம் $\{\phi\}$. இது ஒரு முடிவுறு கணம்.

(உ) இக்கணத்தின் உறுப்புகள் பகாவெண்கள். எண்ணிலாப்பகாவெண்கள் இருப்பதால் இது முடிவிலாக்கணம்.

(ஊ) இதிலும் எண்ணிலா ஒற்றைப்படையெண்கள் இருப்பதால் இதுவும் ஒரு முடிவிலாக்கணம்.

1.5 சமக்கணங்கள்

$\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ என இரு கணங்களை கருதுக. $\mathbb{A}$யிலுள்ள ஒவ்வோருறுப்பும் $\mathbb{B}$இலும் $\mathbb{B}$யிலுள்ள ஒவ்வோருறுப்பும் $\mathbb{A}$யிலும் இருந்தால் அந்த கணங்கள் சமம் என்கிறோம். இவ்விரு கணங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையும் சமம் என்பதையும் புரிந்துகொள்ளலாம்.

வரையறை *3* $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ ஆகிய கணங்களில் ஒன்றிலுள்ள எல்லா உறுப்புகளும் மற்றதிலும் இருந்தால், அவற்றை சமக்கணங்கள் என்றழைத்து $\mathbb{A}=\mathbb{B}$ என்று குறிக்கிறோம். இல்லையேல், சமமற்ற கணங்கள் என்றழைத்து $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$ என்று குறிக்கிறோம்.

சில சான்றுகளை காண்போம்

$\mathbb{A}=\{1,2,3,4\}$, $\mathbb{B}=\{1,2,3,4\}$ எனில் $\mathbb{A}=\mathbb{B}$

$\mathbb{A}$ 6க்குக்கீழுள்ள பகாவெண்களின் கணம் என்க. $\mathbb{P}$ 30இன் பகாவெண் காரணிகள் என்க. 6க்குக்கீழுள்ள பகாவெண்கள் 2,3,5. 30இன் பகாவெண் காரணிகள் 2,3,5. எனவே, $\mathbb{A}$யும் $\mathbb{P}$யும் சமம்.

குறிப்பு: ஒரு கணத்தில், எந்தவொரு உறுப்பும் மீண்டும் வந்தால் கணம் மாறுவதில்லை. சான்றாக, $\mathbb{A}=\{1,2,3\}$, $\mathbb{B}=\{2,2,1,3,1\}$ ஆகியவை சமக்கணங்கள். $\mathbb{A}$இன் ஒவ்வோருறுப்பும் $\mathbb{B}$இலும் இருக்கிறது; திருப்பியவாறும். இதன் காரணமாக, கணங்களில் எழுதிய உறுப்பை மீண்டும் எழுதுவதில்லை.

சான்று 7 சமக்கணங்களின் சோடிகள் ஏதுமிருந்தால் காண்க. விடைக்கான காரணத்தை தெளிவுற விளக்குக.

$\mathbb{A}=\{\,0\,\}$

$\mathbb{B}=\{\, x : x > 15, x < 5\}$

$\mathbb{C}=\{x : x-5=0\,\}$

$\mathbb{D}=\{x : x^2=25\,\}$

$\mathbb{E}=\{x : x^2-2x-15=0$ எனும் சமன்பாட்டின் நேர்ம முழுவெண் தீர்வு $\}$

தீர்வு $\mathbb{A}$ எனும் கணத்தில், 0 எனும் உறுப்பு உள்ளது, மற்ற கணங்களில் 0 எனும் உறுப்பு இல்லை. ஆகவே, $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}, \mathbb{A} \neq \mathbb{C}$, $\mathbb{A} \neq \mathbb{D}, \mathbb{A} \neq \mathbb{E}$.

$\mathbb{B}=\phi$ அதாவது $\mathbb{B}$ ஒரு வெற்றுக்கணம், ஆனால் மற்ற எந்தவொரு கணமும் வெற்றுக்கணம் அன்று. ஆகவே $\mathbb{B} \neq \mathbb{C}, \mathbb{B} \neq \mathbb{D}$, $\mathbb{B} \neq \mathbb{E}$.

$\mathbb{C}=\{5\}$, ஆனால், $-5 \in \mathbb{D}$, ஆகையால், $\mathbb{C} \neq \mathbb{D}$; $\mathbb{E}=\{5\}$, என்பதால் $\mathbb{C}=\mathbb{E}$.

$\mathbb{D}=\{-5,5\}$, $\mathbb{E}=\{5\}$ என்பதால் $\mathbb{D} \neq \mathbb{E}$.

ஆகவே, சமக்கணங்களான ஒரே இணை $\mathbb{C}$யும் $\mathbb{E}$யும்.

சான்று 8 எந்தெந்த இணைகள் சமக்கணங்கள் என்று காண்க. விளக்குக.

(அ) *ALLOY* எனும் சொல்லின் எழுத்துக்கணம் $\mathbb{X}$, *LOYAL* எனும் சொல்லின் எழுத்துக்கணம் $\mathbb{B}$.

(ஆ) $\mathbb{A}=\{\, n : n \in \mathbb{Z}, n^2 <= 4\,\}$; $\mathbb{B}=\{\, x : x \in \mathbb{R}, x^2-3x+2=0\,\}$.

தீர்வு $\mathbb{X}=\{A,L,L,O,Y\}$, $\mathbb{B}=\{L,O,Y,A,L\}$, $\mathbb{X}$இல் சில உறுப்புகள் மீண்டும் வந்திருப்பினும், இரு கணங்களிலும் $\{A,L,O,Y\}$ என்ற உறுப்புகளே உள்ளன, எனவே, $\mathbb{X}$உம், $\mathbb{B}$உம் சமக்கணங்கள்.

$\mathbb{A} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $\mathbb{B} = \{1,2\}$, $0 \in \mathbb{A}$, ஆனால் $0 \notin \mathbb{B}$, $\mathbb{A}$உம், $\mathbb{B}$உம் சமக்கணங்களல்ல. $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$

பயிற்சி 1.2

1 எவையெல்லாம் வெற்றுக்கணங்கள்?
 a. இரண்டால் வகுபடும் ஒற்றைப்படை இயலெண்களின் கணம்
 b. இரட்டைப்படை பகாவெண்களின் கணம்
 c. $\{x : x$ ஒரு இயலெண், $x < 5, x < 7\}$
 d. $\{y : y$ இணைகோடுகளின் பொதுப்புள்ளி$\}$

2 எவை முடிவுறுகணங்கள், எவை முடிவுறாக்கணங்கள்?
 a. ஆண்டின் மாதங்களின் கணம்.
 b. $\{1, 2, 3, \ldots\}$
 c. $\{1,2,3, \ldots, 99, 100\}$
 d. நூற்றுக்கும் அதிகமான நேர்மவெண்களின் கணம்
 e. தொண்ணூற்றொன்பதுக்கும் குறைவான பகாவெண்கள்

3 முடிவுறுகணங்களையும் முடிவுறாக்கணங்களையும் காண்க.
 a. xஅச்சுக்கு இணையான கோடுகளின் கணம்.
 b. தமிழெழுத்துகளின் கணம்
 c. 5இன் மடங்குகளான எண்களின் கணம்
 d. இப்புவியில் வாழும் விலங்குகளின் கணம்
 e. மூலப்புள்ளியான $(0,0)$இன்வழி செல்லும் வட்டங்களின் கணங்கள்.

4 Aயும் Bயும் சமமா இல்லையா என்பதை காண்க.
 a. $\mathbb{A} = \{a, b, c, d\}$ $\mathbb{B} = \{d, c, b, a\}$
 b. $\mathbb{A} = \{4, 8, 12, 16\}$ $\mathbb{B} = \{8, 4, 16, 18\}$
 c. $\mathbb{A} = \{2,4,6,8,10]$ $\mathbb{B} = \{x: x$ நேர்ம இட்டடைப்படையெண்கள், $x \leq 10\}$
 d. $\mathbb{A} = \{x: x$ 10இன் மடங்கு$\}$ $\mathbb{B} = \{10, 15, 20, 25, 30, \ldots\}$

5 கீழ்க்காணும் கணங்கள் சமக்கணங்களா என்று காண்க, காரணத்தை விளக்குக.
 a. $\mathbb{A} = \{2, 3\}$, $\mathbb{B} = \{x : x^2 + 5x + 6 = 0\}$
 b. $\mathbb{A} = \{x: x$ $FOLLOW$ என்ற சொல்லின் ஒரு எழுத்து$\}$;

6 $\mathbb{B} = \{x: x$ $WOLF$ என்ற சொல்லின் ஒரு எழுத்து$\}$

7 கீழ்க்காண்பவற்றில் சமக்கணங்களை காண்க.
 a. $\mathbb{A} = \{2,4,8,12\}$, $\mathbb{B} = \{1,2,3,4\}$, $\mathbb{C} = \{4,8,12,14\}$, $\mathbb{D} = \{3,4,1,2\}$,
 b. $\mathbb{E} = \{1, -1\}$, $\mathbb{F} = \{0, a\}$, $\mathbb{G} = \{1, -1\}$, $\mathbb{H} = \{0,1\}$

1.6 உட்கணங்கள்

$\mathbb{X}$ எனும் கணத்தை உங்கள் பள்ளியில் படிக்கும் எல்லா மாணவர்களின் கணமாக கொள்க; $\mathbb{Y}$ எனும் கணத்தை உங்கள் வகுப்பில் படிக்கும் மாணவர்களின் கணமாக கொள்க.

$\mathbb{Y}$ இலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் $\mathbb{X}$இலும் இருப்பதை நோக்குக. $\mathbb{Y}$ $\mathbb{X}$இன் உட்கணம் என்று சொல்கிறோம். இதை $Y \subset \mathbb{X}$ என்று குறிக்கிறோம்; இங்கு, $\subset$ என்ற குறியீடு உட்கணத்தை குறிக்கிறது.

வரையறை *4* $\mathbb{A}$ எனும் கணத்திலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் $\mathbb{B}$ எனும் கணத்தில் இருந்தால் $\mathbb{A}$ $\mathbb{B}$இன் உட்கணம் என்கிறோம்.

வேறுவிதமாகச்சொன்னால், $a \in \mathbb{A}$ என்றபோதெல்லாம் $a \in \mathbb{B}$, எனில் $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ மேலுள்ள சொற்றொடரை $\Rightarrow$ (உள்ளுரைக்கிறது) எனும் கணிதக்குறியீட்டால் எழுதலாம்.

$a \in \mathbb{A} \Rightarrow a \in \mathbb{B}$,எனில் $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$.

இதை *a $\mathbb{A}$இன் உறுப்பாயிருப்பது a $\mathbb{B}$இன் உறுப்பாயிருப்பதை உள்ளுரைக்கிறது எனில்*, $\mathbb{A}$ *$\mathbb{B}$இன் உட்கணம்* என்று வாசிக்கிறோம். $\mathbb{A}$ $\mathbb{B}$இன் உட்கணமன்று என்பதை $\mathbb{A} \not\subset \mathbb{B}$ என்று குறிக்கிறோம்.

$\mathbb{A}$ $\mathbb{B}$யின் உட்கணமாயிருக்க $\mathbb{A}$யிலுள்ள எல்லா உறுப்புகளும் $\mathbb{B}$யில் அடங்கியிருப்பதே போதுமானது; $\mathbb{B}$யிலுள்ள எல்லா உறுப்புகளும் $\mathbb{A}$யில் அடங்கியோ அடங்காமலோ இருக்கலாம். $\mathbb{B}$யின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் $\mathbb{A}$யில் அடங்கியிருந்தால் $\mathbb{B}$ $\mathbb{A}$இன் உட்கணம்; அதாவது $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$. இவ்வாறு, $\mathbb{A}$ $\mathbb{B}$யின் உட்கணமாகவும் $\mathbb{B}$ $\mathbb{A}$யின் உட்கணமாகவும் இருந்தால் $\mathbb{A}$யும் $\mathbb{B}$யும் ஒரே கணம். அதாவது, $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}, \mathbb{B} \subset \mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{A} = \mathbb{B}$ இங்கு $\Leftrightarrow$ இருவழி உள்ளுரைப்பை குறிக்கிறது, அதை சொற்களால் *எனிலும் எனில் மட்டுமேயும்* என்று வாசிக்கிறோம்.

மேலே குறிப்பிட்ட வரையறையின்படி, ஒரு கணம் தனது உட்கணமாகவும் ஆகிறது. $\mathbb{A} \subset \mathbb{A}$.

φ எனும் வெற்றுக்கணத்தில் எந்த உறுப்பும் இல்லாததால், φ ஒவ்வொரு கணத்துக்கும் உட்கணம்.

சில சான்றுகளை காண்போம்

(அ) விகிதமுறு எண்களின் கணமான $\mathbb{Q}$ இயலெண்கணமான $\mathbb{R}$இன் உட்கணம். $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

(ஆ) $\mathbb{A}$ 56இன் வகுவெண்களின் கணமும் $\mathbb{B}$ 56இன் பகாவகுவெண்களின் கணமும் எனில், $\mathbb{B}$ $\mathbb{A}$யின் உட்கணம். $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$.

(இ) $\mathbb{A} = \{1, 3, 5\}$, $\mathbb{B} = \{x : x < 6, x$ ஒற்றைப்படை$\}$ எனில், $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}, \mathbb{B} \subset \mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{A} = \mathbb{B}$.

(ஈ) $\mathbb{A} = \{a, e, i, o, u\}$, $\mathbb{B} = \{a, b, c, d\}$ எனில் $\mathbb{A}$ $\mathbb{B}$யின் உட்கணமன்று; $\mathbb{B}$ $\mathbb{A}$யின் உட்கணமன்று.

$\mathbb{A}$யும், $\mathbb{B}$யும் இருகணங்கள் என்க. $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$, $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$ எனில் $\mathbb{A}$ $\mathbb{B}$யின் தகுவுட்கணம் என்றும், $\mathbb{B}$ $\mathbb{A}$யின் மேற்கணம் என்றும் சொல்கிறோம்.

சான்றாக, $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$, $\mathbb{B} = \{1, 2, 3, 4\}$ எனில், $\mathbb{A}$ $\mathbb{B}$யின் தகுவுட்கணம்.

$\mathbb{A}$யில் ஒரேயொரு உறுப்பு மட்டுமே இருந்தால் $\mathbb{A}$யை ஒற்றையக்கணம் என்கிறோம். சான்றாக, $\{a\}$ ஒரு ஒற்றையக்கணம்.

சான்று 9 φ, $\mathbb{A} = \{1,3\}$, $\mathbb{B} = \{1,5,9\}$, $\mathbb{C} = \{1,3,5,7,9\}$ ஆகிய கணங்களை கருதி, கீழ்க்காணும் கணச்சோடிகளுக்கிடையில் $\subset$, $\not\subset$ ஆகிய தொடர்புக்குறிகளை இடுக. (அ) $\varphi \ldots \mathbb{B}$, (ஆ) $\mathbb{A} \ldots \mathbb{B}$ (இ) $\mathbb{A} \ldots \mathbb{C}$, (ஈ) $\mathbb{B} \ldots \mathbb{C}$

தீர்வு (அ) $\varphi \subset \mathbb{B}$, வெற்றுக்கணமான φ எந்தக்கணத்துக்கும் உட்கணம் என்பதால்.

(ஆ) $\mathbb{A} \not\subset \mathbb{B}$; ஏனெனில், $3 \in \mathbb{A}, 3 \notin \mathbb{B}$.

(இ) $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$; ஏனெனில், $1,3 \in \mathbb{A}$, அவை $\mathbb{C}$யிலும் இருக்கின்றன.

(ஈ) $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}$; ஏனெனில், $\mathbb{B}$யின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் $\mathbb{C}$இலும் இருக்கிறது.

சான்று 10 $\mathbb{A} = \{a, e, i, o, u\}$, $\mathbb{B} = \{a, b, c, d\}$ எனும் இருகணங்களை கருதுக. $\mathbb{B}$ $\mathbb{A}$யின் உட்கணமா? இல்லை. (ஏன்?) $\mathbb{A}$ $\mathbb{B}$யின் உட்கணமா? இல்லை. (ஏன்?)

சான்று 11 $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ எனும் மூன்று கணங்களை கருதுக. $\mathbb{A} \in \mathbb{B}$, $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}$ எனில் $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$, என்பது மெய்யா? இல்லையெனில், ஒரு சான்றை தருக.

தீர்வு இல்லை. $\mathbb{A} = \{1\}$, $\mathbb{B} = \{\{1\}, 2\}$, $\mathbb{C} = \{\{1\}, 2, 3\}$ என்க. இங்கு, $\mathbb{A} = \{1\}$ என்பதால் $\mathbb{A} \in \mathbb{B}$; $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}$. ஆனால் $1 \in \mathbb{A}, 1 \notin \mathbb{C}$ என்பதால் $\mathbb{A} \not\subset \mathbb{C}$.

1.6.1 மெய்யெண்கணத்தின் உட்கணங்கள்

0ஆம் பகுதியில் பார்த்ததுபோல், மெய்யெண்களின் கணமாகிய $\mathbb{R}$இல் பற்பல உட்கணங்கள் உள்ளன. அவற்றுள் சில

இயலெண்களின் கணம்

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,..\}$$

முழுவெண்களின் கணம்

$$\mathbb{Z} = \{-3, -2, -1,0,1,2,3,,..\}$$

விகிதமுறுவெண்களின் கணம்

$$\mathbb{Q} = \{x : x = p/q\,, p, q \in Z, q \neq 0\}$$

இக்கணிதக்கூற்றை "$\mathbb{Q}$விலுள்ள ஒவ்வொரு xஉம் p/q என்ற ஈவுக்குச்சமம்; இங்கு, pயும் qவும் முழுவெண்கள்; q சுழியமன்று" என்று வாசிக்கிறோம். $\mathbb{Q}$வில், -5 (-5ஐ $-5/_1$ என எழுதலாமன்றோ?), $5/_7$, $3\,1/_2$ ($7/_2$ என எழுதலாம்), $-11/_3$போன்றவை உள்ளன.

$\mathbb{T} = \{x : x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q}\}$ விகிதமுறா எண்களின் கணம், $\mathbb{T}$யில் $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \pi$ போன்றவை உள்ளன.

மேல் குறிப்பிட்ட கணங்களை கீழ்க்காணும் கணிதத்தொடர்பால் குறிக்கலாம்.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}, \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \mathbb{T} \subset \mathbb{R}, \mathbb{N} \not\subset \mathbb{T}$

1.6.2 $\mathbb{R}$இன் உட்கணங்களான இடைவெளிகள்

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ என்க. மெய்யெண்களின் கணமான $\{y : a < y < b\}$ என்ற கணத்தை, *திறந்த இடைவெளி* என்றழைத்து (a, b) என்று குறிக்கிறோம். aக்கும் bக்கும் இடையிலுள்ள எல்லாப்புள்ளிகளும் (a, b) என்ற திறந்த இடைவெளியில் உள்ளன; ஆனால் a, b ஆகிய புள்ளிகள் அதில் அடங்கவில்லை

aயும், bயும் இடைவெளியில் அடங்கினால், அதை *மூடிய இடைவெளி* என்றழைத்து பகர அடைப்புக்குறிக்குள் $[a, b]$ என்று குறிக்கிறோம். ஆக,

$$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$$

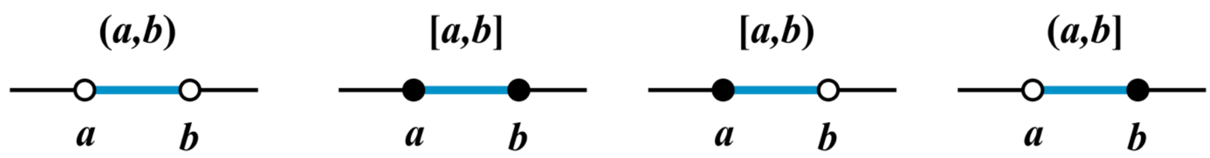
ஒரு நுனியில் திறந்ததும் மற்ற நுனியில் மூடியதுமான இடைவெளிகளையும் நாம் கருதலாம். அதாவது

$[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$ ஒரு திறந்த இடைவெளி, a உள்ளது, b இல்லை

$(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$ ஒரு திறந்த இடைவெளி, a இல்லை, b உள்ளது.

இம்மாதிரியான குறிகளை மெய்யெண்களின் உட்கணங்களைக்குறிக்கும் மற்றுமொரு குறியீடாக கொள்ளலாம். சான்றாக, $\mathbb{A} = (-3, 5)$, $\mathbb{B} = [-7, 9]$ எனில், $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$; எதிர்மமற்ற மெய்யெண்களை குறிக்கும் கணம் $[0, \infty)$; எதிர்ம மெய்யெண்களின் கணம் $(-\infty, 0)$; $-\infty$யிலிருந்து ∞வரை நீளமுள்ள நேர்கோட்டிலுள்ள எல்லா மெய்யெண்களும் உள்ள கணம் $(-\infty, \infty)$.

ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமைந்த வெவ்வேறு மெய்யெண்ணுட்கணங்களை வெவ்வேறு இடைவெளிகளாக படம் 1.1இல் காணலாம்



படம் 1.1

ஒவ்வொரு இடைவெளியிலும் முடிவிலி எண்கள் இருப்பதை நோக்குக.

சான்றாக, பண்புக்குறியீட்டில் எழுதிய $\{x: x \in \mathbb{R}, -5 < x \leq 7\}$ எனும் கணத்தை (-5,7] எனும் இடைவெளியால் எழுதலாம், [-3,5) எனும் இடைவெளி பணபுக்குறியீட்டில் $\{x: -3 \leq x < 5\}$.

(a, b), $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ ஆகிய கணங்களில் *இடைவெளியின் நீளம்* $(b-a)$ என்கிறோம்.

1.7 அடுக்குக்கணம்

$\{1,2\}$ எனும் கணத்தை கருதுக. அதன் எல்லா உட்கணங்களையும் எழுதுவோம். வெற்றுக் கணமான ϕ எல்லாக்கணங்களின் உட்கணம். ஆகையால் ϕ என்பது $\{1,2\}$இன் ஒரு உட்கணம். அதைப்போல் $\{1\}$, $\{2\}$ என்பவையும் உட்கணங்கள். ஒவ்வொரு கணமும் தானே தன் உட்கணமாவதால் $\{1,2\}$ என்பதும் $\{1,2\}$இன் உட்கணம். வேறு உட்கணங்கள் இல்லை.

ஆக, $\{1,2\}$வில் ϕ,$\{1\}$,$\{2\}$,$\{1,2\}$ ஆகிய நான்கு உட்கணங்கள் உள்ளன. இந்த எல்லா உட்கணங்களின் கணத்தை அடுக்குக்கணம் என்கிறோம்..

வரையறை *5* $\mathbb{A}$ எனும் கணத்தின் எல்லா உட்கணங்களும் அடங்கிய தொகுப்பை, $\mathbb{A}$இன் அடுக்குக்கணம் என்கிறோம். அதை $\mathbb{P}(\mathbb{A})$ என்று குறிக்கிறோம். $\mathbb{P}(\mathbb{A})$யில் ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரு கணம்.

மேலே குறிப்பிட்டதுபோல், $\mathbb{A} = \{1,2\}$ எனில், $\mathbb{P}(\mathbb{A}) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$. மேலும், $n[\mathbb{P}(\mathbb{A})] = 4 = 2^2$ என்பதை நோக்குக

பொதுவாக, $\mathbb{A}$யிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n(\mathbb{A}) = m$ எனில், $n[\mathbb{P}(\mathbb{A}] = 2^m$ என்று காணலாம்.

1.8 அனைத்துவக்கணம்

சில நேரங்களில், நம் சூழமைவுக்குத்தகுந்த ஒரு அடிப்படைக்கணத்தின் உறுப்புகளையும் உட்கணங்களையும் கையாளவேண்டியதிருக்க லாம். சான்றாக, எண்களைப்பற்றி ஆயந்தறியும் போது, இயலெண்களின் கணத்தையும் அதன் உட்கணங்களான பகாவெண்களின் கணம், இரட்டைப்படையெண்களின் கணம் போன்ற பலவற்றையும் காணலாம். இதில் அடிப்படைக்கணத்தை அனைத்துவக்கணம் என்கிறோம். அதை, $\mathbb{U}$ எனும் குறியீட்டால் குறிக்கிறோம். அதன் உட்கணங்களை $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, ... எனும் இலத்தீனிய எழுத்துகளாலோ உரோமனிய எழுத்துகளாலோ குறிக்கிறோம்.

சான்றாக, முழுவெண்கணத்துக்கான அனைத்துவக்கணம் விகிதமுறு எண்களின் கணமாகவோ மெய்யெண்களின் $(\mathbb{R})$ கணமாகவோ இருக்கலாம். மற்றொரு சான்றாக, உலக மக்களைப்பற்றிய ஆய்வுகளில், அனைத்துவக்கணம் உலக மக்கள் அனைவரையும் உள்ளடக்கியதாக இருக்கலாம்.

பயிற்சி 1.3

1 கூற்றுகள் மெய்யாகும்படி வெற்றிடங்களில் $\subset$, $\not\subset$ ஆகிய குறியீடுகளை பொருத்துக.

a. $\{2,3,4\} \ldots \{1,2,3,4,5\}$
b. $\{a, b, c\} \ldots \{b, c, d\}$
c. $\{x: x$ உங்கள் பள்ளியில் ஒரு 11ஆம் வகுப்பு மாணவன்$\} \ldots \{x: x$ உங்கள் பள்ளியில் ஒரு மாணவன்$\}$
d. $\{x : x$ தளத்திலுள்ள ஒரு வட்டம்$\} \ldots \{x : x$ அதே தளத்திலுள்ள ஓரலகு ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம்$\}$
e. $\{x : x$ தளத்தில் உள்ள ஒரு முக்கோணம்$\} \ldots \{x : x$ அதே தளத்தில் உள்ள ஒரு செவ்வகம்$\}$
f. $\{x : x$ தளத்தில் உள்ள ஒரு சமப்பக்க முக்கோணம்$\} \ldots \{x : x$ அதே தளத்தில் உள்ள ஒரு முக்கோணம்$\}$
g. $\{x : x$ இரட்டைப்படை இயலெண்$\} \ldots \{x : x$ முழுவெண்$\}$

2 கீழ்க்காணும் தொடர்கள் மெய்யா பொய்யா என்று காண்க.

a. $\{a, b\} \not\subset \{b, c, a\}$
b. $\{a, e\} \subset \{x: x$ஆங்கில உயிரெழுத்து$\}$
c. $\{1,2,3\} \subset \{1,3,5\}$
d. $\{a\} \subset \{a, b, c\}$
e. $\{a\} \in \{a, b, c\}$
f. $\{x : x$ 6க்கு குறைவான ஒரு இரட்டைப்படை இயலெண்$\} \subset \{x : x$ 36ஐ வகுக்கும் ஒரு இயலெண்$\}$

3 $\mathbb{A} = \{1, 2, \{3, 4\}, 5\}$ என்க. கீழ்க்காணும் கணிதக்கூற்றுகளில் எவை சரியல்லாதவை? ஏன்?

a. $\{3,4\} \subset \mathbb{A}$
b. $\{3,4\} \notin \mathbb{A}$
c. $\{\{3,4\}\} \subset \mathbb{A}$
d. $1 \in \mathbb{A}$
e. $1 \subset \mathbb{A}$
f. $\{1,2,5\} \subset \mathbb{A}$
g. $\{1,2,5\} \in \mathbb{A}$
h. $\{1,2,3\} \subset \mathbb{A}$
i. $\varphi \in \mathbb{A}$
j. $\varphi \subset \mathbb{A}$
k. $\{\varphi\} \subset \mathbb{A}$

4 கீழ்க்காணும் கணங்களின் எல்லா உட்கணங்களையும் எழுதுக.

a. $\{a\}$ b. $\{a, b\}$ c. $\{1,2,3\}$ d. φ

5 $\mathbb{A} = \varphi$ எனில், $\mathbb{P}(\mathbb{A})$இல் எத்தனை உறுப்புகள் உள்ளன?

6 கீழ்க்காண்பவற்றை இடைவெளிகளாக எழுதுக.

a. $\{x: x \in R, -4 < x \leq 6\}$
b. $\{x: x \in R, -12 < x < -10\}$
c. $\{x: x \in R,\ 0 \leq x < 7\}$
d. $\{x: x \in R,\ 3 \leq x \leq 4\}$

7 கீழ்க்காண்பவற்றை பண்புக்குறியீட்டில் எழுதுக.

a. $(-3, 0)$ b. $[6, 12]$ c. $(6, 12]$ d. $[-23, 5)$

8 கீழ்க்கண்டவற்றுக்கான அனைத்துவக்கணங்களை முன்மொழிக.

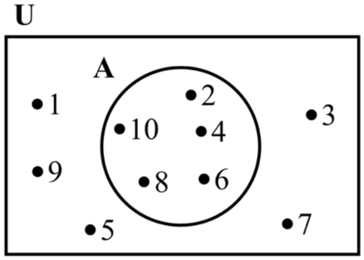
a. எல்லா செங்கோண முக்கோணங்களின் கணம்
b. எல்லா சமப்பக்க முக்கோணங்களின் கணம்

9 $\mathbb{A} = \{1,3,5\}, \mathbb{B} = \{2,4,6\}, \mathbb{C} = \{0,2,4,6,8\}$ எனும் கணங்களை கருதுக. கீழ்க்கண்டவற்றுள் எவற்றை $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ ஆகியவற்றின் அனைத்துவக்கணமாக கொள்ளலாம்?

a. $\{0,1,2,3,4,5,6\}$
b. φ
c. $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
d. $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

1.9 வென்னின் படவரைவுகள்

கணங்களிடையான பெரும்பாலான தொடர்புகளை வென்னின் படவரைவு எனப்படும் படவரைவுகளால் குறிக்கலாம். இவை இயோவான் வென் (1834-1883) எனும் ஆங்கிலேய ஏரணரின் பெயரால் வழங்குகின்றன. இந்த படவரைவுகளில் செவ்வகங்களும் வட்டம் போன்ற மூடிய வளைவரைகளும் உள்ளன. செவ்வகங்கள் அனைத்துவக்கணத்தையும் வட்டங்கள் உட்கணங்களையும் குறிக்கின்றன.

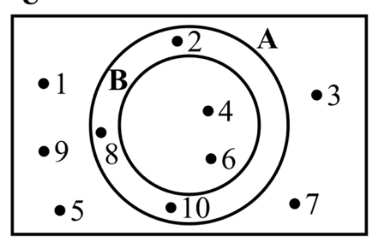


படம் 1.2

வென்படவரைவுகளில் கணங்களின் உறுப்புகளை வட்டங்களுக்குள் இடுகிறோம். படம் 1.2ஐயும் படம் 1.3ஐயும் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 1 படம் 1.2இல் $\mathbb{U} = \{1,2,3,\ldots,10\}$ அனைத்துவக்கணம்; $\mathbb{A} = \{2,4,6,8,10\}$ அதன் உட்கணம்

எடுத்துக்காட்டு 2 படம் 1.3இல் $\mathbb{U} = \{1,2,3,\ldots,10\}$ அனைத்துவக்கணம்; $\mathbb{A} = \{2,4,6,8,10\}$உம் $\mathbb{B} = \{4,6\}$உம் அதன் உட்கணங்கள்; மேலும் $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$



படம் 1.3

வென்படவரைவுகளின் பயன்பாட்டை, கணங்களின் ஒன்றிப்பு, இடைவெட்டு, வேறுபாடு ஆகியவற்றைப்பற்றி படிக்கும்போது மேலும் விரிவாகக்காணலாம்.

1.10 கணங்களின்மீதான செயலங்கள்

சிறுவகுப்புகளில் எண்களின் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் ஆகியவற்றை படித்திருக்கிறோம். இரண்டு எண்களின்மீது இந்த செயலங்களை செய்து மற்றொரு எண்ணை பெற்றோம். சான்றாக, 5, 13 ஆகிய இரண்டு எண்களின்மீது கூட்டல் என்ற செயலத்தை செயலாக்கி 18 என்ற எண்ணை பெறுகிறோம். அவற்றின்மீது பெருக்கல் செயலத்தை செய்து 65ஐ பெறுகிறோம். அதைப்போல் இரு கணங்களின்மீது சில செயலங்களை செய்யும்போது, செயலங்களுக்கேற்றவாறு புதுக்கணங்களை பெறுகிறோம். அவ்வகையான செயலங்களை வரையறுத்து, அவை எவ்வாறு செயலாற்றுகின்றன என்று காண்போம்.

1.10.1 கணங்களின் ஒன்றிப்பு

$\mathbb{A}$யும் $\mathbb{B}$யும் இருவேறு கணங்கள் என்க. அவ்விருகணங்களின் ஒன்றிப்புக்கணத்தில் $\mathbb{A}$யின்

எல்லா உறுப்புகளும் $\mathbb{B}$யின் எல்லா உறுப்புகளும் உள்ளன. இரு கணங்களிலும் ஒரே உறுப்பு இருக்கும்போது, ஒருமுறை மட்டுமே, ஒன்றிப்புக்கணத்தில் குறிப்பிடுகிறோம். இதை குறியீட்டால் $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ என்று குறியிடுகிறோம். இதை $\mathbb{A}$ ஒன்றிப்பு $\mathbb{B}$ என்று படிக்கிறோம்.

சான்று 12 $\mathbb{A} = \{2,4,6,8\}$, $\mathbb{B} = \{6,8,10,12\}$ என்க. $A \cup B$ஐ காண்க.

தீர்வு $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{2,4,6,8,10,12\}$

சான்று 13 $\mathbb{A} = \{a,e,i,o,u\}$, $\mathbb{B} = \{a,i,u\}$ என்க. $A \cup B$ஐ காண்க.

தீர்வு $A \cup B = \{a,e,i,o,u\} = A$

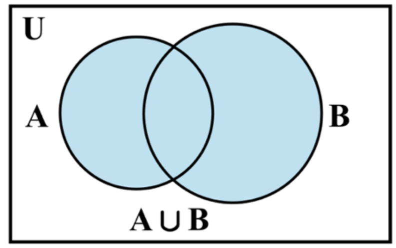
ஒரு கணத்தையும் அதன் உட்கணத்தையும் சேர்ப்பது அதே கணத்தை தருகிறது என்பதை இந்த சான்றில் காண்கிறோம். இதையே குறியீட்டு முறையில் $B \subset A$, எனில் $A \cup B = A$ என்று எழுதுகிறோம்.

சான்று 14 $\mathbb{X} = \{$இராமன், கீதா, அக்குபர்$\}$ என்பது 11ஆம் வகுப்பிலுள்ள கோறப்பந்து விளையாடும் மாணவர்களின் கணம் என்க. $\mathbb{Y} = \{$கீதா, ஆண்டனி, அக்குபர்$\}$ என்பது 11ஆம் வகுப்பிலுள்ள காற்பந்து விளையாடும் மாணவர்களின் கணம் என்க. $\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}$ஐ காண்க. இந்த ஒன்றிப்புக்கணத்தை சொற்களால் விளக்குக.

தீர்வு $\mathbb{X} \cup \mathbb{Y} = \{$இராமன், கீதா, அக்பர், ஆண்டனி$\}$. இது கால்பந்தோ கோறப்பந்தோ விளையாடும் மாணவர்களின் கணம்.

***வரையறை 6** $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ ஆகிய கணங்களின் ஒன்றிப்புக்கணமாகிய $\mathbb{C}$யில் $\mathbb{A}$யிலோ $\mathbb{B}$யிலோ (இரண்டிலுமோ) உள்ள எல்லா உறுப்புகளும் உள்ளன. இதை, $A \cup B = \{x : x \in A$ஓ $x \in B$ஓ$\}$ என்றோ $A \cup B = \{x : x \in A \mid x \in B\}$ என்றோ குறிக்கலாம்.*

கணங்களின் ஒன்றிப்பை வென்படவரைவால் கீழ்க்காணுமாறு குறிக்கலாம். நிறமிட்ட பகுதி ஒன்றிப்புக்கணத்தை குறிக்கிறது.



படம் 1.4

கணவொன்றிப்பின் பண்புகள்

$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{B} \cup \mathbb{A}$ (முறைமைமாற்றுவிதி)

$(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \cup \mathbb{C} = \mathbb{A} \cup (\mathbb{B} \cup \mathbb{C})$ (சேர்க்கைவிதி)

$\mathbb{A} \cup \phi = \mathbb{A}$ (முற்றொருமைவிதி, $\cup$இன் முற்றொருமை φ)

$\mathbb{A} \cup \mathbb{A} = \mathbb{A}$ (மறுசெயலின்மைவிதி)

$\mathbb{U} \cup \mathbb{A} = \mathbb{U}$ (அனைத்துவவிதி)

1.10.2 கணங்களின் இடைவெட்டு

$\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ எனும் இருகணங்களின் பொதுவான உறுப்புகள் உள்ள கணத்தை வெட்டுக்கணம் என்கிறோம். அதாவது $\mathbb{A}$யிலும் $\mathbb{B}$யிலும் உள்ள உறுப்புகளே வெட்டுக்கணத்தில் உள்ளன. இதை $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ என்ற குறியீட்டால் எழுதுகிறோம். கணப்பண்புக்குறியீட்டில் $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{x: x \in \mathbb{A}$உம் $x \in \mathbb{B}$உம்$\}$ என்றோ $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{x: x \in \mathbb{A}, x \in \mathbb{B}\}$ என்றோ எழுதுகிறோம்.

சான்று 15 12ஆம் சான்றில் பார்த்த $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ எனும் இருகணங்களின் வெட்டுக்கணமாகிய $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ஐ காண்க.

தீர்வு 6உம் 8உம் பொதுவான உறுப்புகள். எனவே, $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{6,8\}$.

சான்று 16 14ஆம் சான்றில் பார்த்த $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ எனும் இருகணங்களின் வெட்டுக்கணமாகிய $\mathbb{X} \cap \mathbb{Y}$ஐ காண்க.

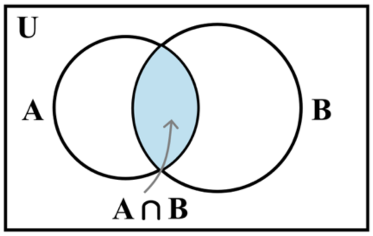
தீர்வுஅச்சான்றில் 'கீதா' எனும் பெயர் மட்டும் பொதுவான பெயராக இருப்பதால், $\mathbb{X} \cap \mathbb{Y} = \{$கீதா$\}$.

சான்று 17 $\mathbb{A} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $\mathbb{B} = \{2,3,5,7\}$ என்றபோது $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ஐ காண்க. மேலும் $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{B}$ என்று காண்க.

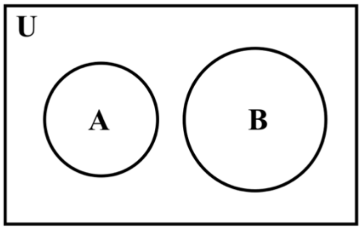
தீர்வு இரண்டு கணங்களிலுமுள்ள உறுப்புகள் $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{2,3,5,7\} = \mathbb{B}$. மேலும், $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$, $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{B}$.

***வரையறை 7** $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ ஆகிய கணங்களின் வெட்டுக்கணமாகிய $\mathbb{C}$யில் $\mathbb{A}$யிலும் $\mathbb{B}$யிலும் உள்ள உறுப்புகள் உள்ளன. இதை, $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{x: x \in \mathbb{A}$உம் $x \in \mathbb{B}$உம்$\}$ என்று குறிக்கலாம். இதையே உம்மைக்குப்பதிலாக காற்புள்ளி யிட்டு $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{x : x \in \mathbb{A}, r\, x \in \mathbb{B}\}$ என்றும் எழுதலாம்.*

இதன் வென்பட விளக்கம் படம் 1.5இல் உள்ளது இங்கு நிறமிட்ட பகுதி வெட்டுக்கணத்தை குறிக்கிறது



படம் 1.5



படம் 1.6

$\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ எனும் கணங்களின் வெட்டுக்கணமான $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \varphi$ எனில், $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ வெட்டாக்கணங்கள் என்கிறோம்..

சான்றாக $\mathbb{A} = \{2, 4, 6, 8\}$, $\mathbb{B} = \{1, 3, 5, 7\}$ என்பனவற்றில் பொதுவான உறுப்புகள் இல்லாததால் இவை வெட்டாக்கணங்கள். இதன் வென்பட விளக்கம் படம் 1.6 இல் உள்ளது. இதில் $\mathbb{A}$யும் $\mathbb{B}$யும் ஒன்றையொன்று வெட்டாக்கணங்கள்.

கணவெட்டின் சில பண்புகள்

$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{B} \cap \mathbb{A}$ (முறைமைமாற்றுவிதி)

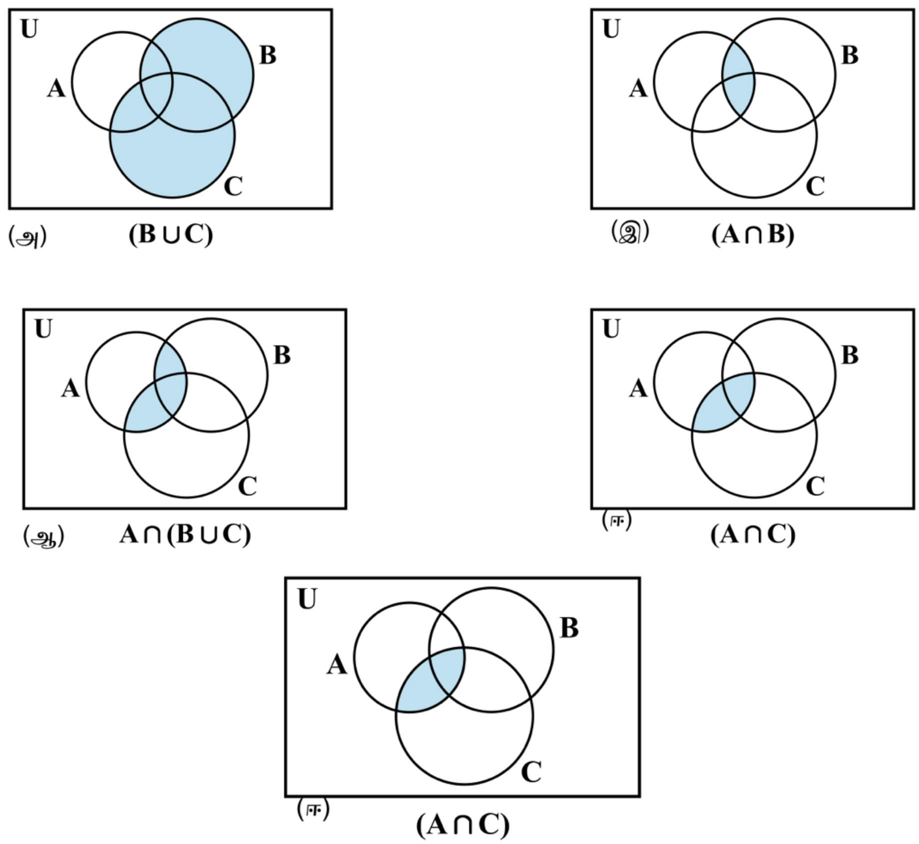
$(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \cap \mathbb{C} = \mathbb{A} \cap (\mathbb{B} \cap \mathbb{C})$ (சேர்க்கைவிதி)

$\varphi \cap \mathbb{A} = \varphi$, $\mathbb{U} \cap \mathbb{A} = \mathbb{A}$ (முற்றொருமைவிதியும் அனைத்துவவிதியும்)

$\mathbb{A} \cap \mathbb{A} = \mathbb{A}$ (மறுசெயலின்மைவிதி)

$\mathbb{A} \cap (\mathbb{B} \cup \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \cup (\mathbb{A} \cap \mathbb{C})$ (பரவுமவிதி) அதாவது, ஒன்றிப்பின்மீது இடைவெட்டு பரவுகிறது.

இப்பண்புகளை வென்படவரைவுகளால் (படம் 1.7) விளக்கலாம்.



படம் 1.7

1.10.3 கணங்களின் வேறுபாடு

$\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ என்ற கணங்களின் முறைமையான வேறுபாட்டை $\mathbb{A} - \mathbb{B}$ என்று குறிக்கிறோம். $\mathbb{A}$இல் உள்ளதும் $\mathbb{B}$இல் இல்லாததுமான உறுப்புகள் ($\mathbb{A} - \mathbb{B}$)இல் உள்ளன. இதை $\mathbb{A}$ கழித்தல் $\mathbb{B}$ என்று வாசிக்கிறோம்.

சான்று 18 $\mathbb{A} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathbb{B} = \{2,4,6,8\}$ எனும் கணங்களின் வேறுபாடுகளான $\mathbb{A} - \mathbb{B}$ஐயும் $\mathbb{B} - \mathbb{A}$ஐயும் காண்க.

தீர்வு $\mathbb{A}$ யில் 1, 3, 5 உள்ளன; $\mathbb{B}$இல் அவ்வுறுப்புகள் இல்லாததால், $\mathbb{A}-\mathbb{B}=\{1, 3, 5\}$. $\mathbb{B}$யில் 8 உள்ளது. $\mathbb{A}$ இல் அவ்வுறுப்பு இல்லாததால், $\mathbb{B} - \mathbb{A} = \{ 8 \}$.

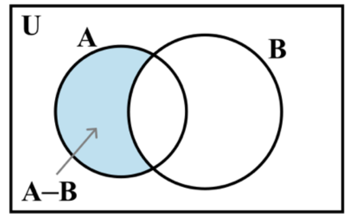
இதன் மூலம் $\mathbb{A}-\mathbb{B} \neq \mathbb{B}-\mathbb{A}$ என்பதை காணலாம்.

சான்று 19 $\mathbb{V} = \{ a, e, i, o, u \}$, $\mathbb{B} = \{ a, i, k, u\}$ எனில், $\mathbb{V}-\mathbb{B}$ ஐயும் $\mathbb{B}-\mathbb{V}$ ஐயும் காண்க.

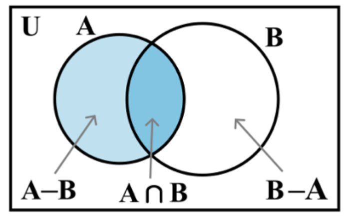
தீர்வு $\mathbb{V}-\mathbb{B} = \{e, o\}$, ஏனெனில் e, o ஆகியவை $\mathbb{V}$இல் உள்ளன, ஆனால், $\mathbb{B}$இல் இல்லை. $\mathbb{B}-\mathbb{V} = \{k\}$; ஏனெனில் k $\mathbb{B}$இல் உள்ளது, ஆனால், $\mathbb{V}$இல் இல்லை.

$\mathbb{V}-\mathbb{B} \neq \mathbb{B}-\mathbb{V}$ என மீண்டும் காண்கிறோம். கணப்பண்புக்குறியீட்டில் கணவேறுபாட்டை $\mathbb{A}-\mathbb{B} = \{ x : x \in \mathbb{A},\ x \notin \mathbb{B} \}$ என்று எழுதலாம்.

இதை வென்படவரைவுகளின் மூலமும் (படம் 1.8) விளக்கலாம். வண்ணமிட்ட பகுதி $\mathbb{A}-\mathbb{B}$ஐ குறிக்கிறது.



படம் 1.8



படம் 1.9

குறிப்பு $\mathbb{A}-\mathbb{B}$, $\mathbb{A}\cap\mathbb{B}$, $\mathbb{B}-\mathbb{A}$ ஆகிய கணங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டாக்கணங்கள். அதாவது, இவற்றில் எந்தச்சோடிக்கும் இடைவெட்டு வெற்றுக்கணம். இதை படம் 1.9இல் காணலாம்.

பயிற்சி 1.4

1 கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு கணச்சோடியின் ஒன்றிப்பை காண்க.
   - a. $\mathbb{X} = \{1,3,5\}$, $\mathbb{Y} = \{1,2,3\}$
   - b. $\mathbb{A} = [a, e, i, o, u\}$, $\mathbb{B} = \{a, b, c\}$
   - c. $\mathbb{A} = \{x :\ x$ ஒரு இயலெண்ணும் 3இன் மடங்கும்$\}$, $\mathbb{B} = \{x :\ x$ இயலெண், $x < 6\}$
   - d. $\mathbb{A} = \{x :\ x$ இயலெண், $1 < x \leq 6\}$, $\mathbb{B} = \{x :\ x$ இயலெண், $6 \leq x < 10 \}$
   - e. $\mathbb{A} = \{1,2,3\}$, $\mathbb{B} = \varphi$

2 $\mathbb{A} = \{a, b\}$, $\mathbb{B} = \{a, b, c\}$ என்க. $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ மெய்யா? $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ஐ காண்க.

3 $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ எனும் இரு கணங்களுக்கு $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ எனில் $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ஐக்காண்க.

4 $\mathbb{A} = \{1,2,3,4\}$, $\mathbb{B} = \{3,4,5,6\}$, $\mathbb{C} = \{5,6,7,8\}$; $\mathbb{D} = \{7,8,9,10\}$ எனில் கீழ்க்கண்டவற்றை காண்க.
   - a. $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$
   - b. $\mathbb{A} \cup \mathbb{C}$
   - c. $\mathbb{B} \cup \mathbb{C}$
   - d. $\mathbb{B} \cup \mathbb{D}$
   - e. $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} \cup \mathbb{C}$
   - f. $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} \cup \mathbb{D}$
   - g. $\mathbb{B} \cup \mathbb{C} \cup \mathbb{D}$

5 மேற்காணும் வினா 1இலுள்ள கணங்களின் ஒவ்வொரு சோடியின் வெட்டுக்கணத்தை காண்க.

6 $\mathbb{A} = \{3,5,7,9,11\}$, $\mathbb{B} = \{7,9,11,13\}$, $\mathbb{C} = \{11,13,15\}$, $\mathbb{D} = \{15,17\}$ எனில், கீழ்க்கண்டவற்றை காண்க.
   - a. $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$
   - b. $\mathbb{B} \cap \mathbb{C}$
   - c. $\mathbb{A} \cap \mathbb{C} \cap \mathbb{D}$
   - d. $\mathbb{A} \cap \mathbb{C}$
   - e. $\mathbb{B} \cap \mathbb{D}$
   - f. $\mathbb{A} \cap (\mathbb{B} \cup \mathbb{C})$
   - g. $\mathbb{A} \cap \mathbb{D}$
   - h. $\mathbb{A} \cap (\mathbb{B} \cup \mathbb{D})$
   - i. $(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \cap (\mathbb{B} \cup \mathbb{C})$
   - j. $(\mathbb{A} \cup \mathbb{D}) \cap (\mathbb{B} \cup \mathbb{C})$

7 $\mathbb{A} = \{x : x$ இயலெண்$\}$, $\mathbb{B} = \{x :\ x$ இரட்டைப்படை இயலெண் $\}$,

8 $\mathbb{C} = \{x :\ x$ ஒற்றைப்படை இயலெண் $\}$, $\mathbb{D} = \{x :\ x$ பகாவெண் $\}$ எனில், கீழ்க்கண்டவற்றை காண்க.
   - a. $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$
   - b. $\mathbb{A} \cap \mathbb{C}$
   - c. $\mathbb{A} \cap \mathbb{D}$
   - d. $\mathbb{B} \cap \mathbb{C}$
   - e. $\mathbb{B} \cap \mathbb{D}$
   - f. $\mathbb{C} \cap \mathbb{D}$

9 கீழ்க்காணும் கண இணைகளில் வெட்டாக்கணங்கள் யாவை?
   - a. $\{1,2,3,4\}$, $\{x : x$ இயலெண், $4 <= x <= 6\}$
   - b. $\{a, e, i, o, u\}$, $\{c, d, e, f\}$
   - c. $\{x : x$ இரட்டைப்படை முழுவெண்$\}$, $\{x : x$ ஒற்றைப்படை முழுவெண்$\}$

10 $\mathbb{A} = \{3,6,9,12,15,18,21\}$, $\mathbb{B} = \{4,8,12,16,20\}$, $\mathbb{C} = \{2,4,6,8,10,12,14,16\}$, $\mathbb{D} = \{5,10,15,20\}$ எனில், கீழ்க்கண்டவற்றை காண்க.

a. $\mathbb{A} - \mathbb{B}$	d. $\mathbb{B} - \mathbb{A}$	g. $\mathbb{B} - \mathbb{C}$	j. $\mathbb{D} - \mathbb{B}$
b. $\mathbb{A} - \mathbb{C}$	e. $\mathbb{C} - \mathbb{A}$	h. $\mathbb{B} - \mathbb{D}$	k. $\mathbb{C} - \mathbb{D}$
c. $\mathbb{A} - \mathbb{D}$	f. $\mathbb{D} - \mathbb{A}$	i. $\mathbb{C} - \mathbb{B}$	l. $\mathbb{D} - \mathbb{C}$

11 $X = \{a,b,c,d\}, Y = \{f,b,d,g\}$ எனில், கீழ்க்கண்டவற்றை காண்க

a. $\mathbb{X} - \mathbb{Y}$ b. $\mathbb{Y} - \mathbb{X}$ c. $\mathbb{X} \cap \mathbb{Y}$

12 $\mathbb{R}$ இயலெண்கணம், $\mathbb{Q}$ விகிதமுறு எண்கணின் கணம்; $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ஐ காண்க.

13 கீழ்க்காணும் கூற்றுகள் மெய்யா பொய்யா என்று காண்க. உங்கள் விடைகளை விளக்குக.

a. $\{2,3,4,5\}, \{3,6\}$ ஆகியவை வெட்டாக்கணங்கள்

b. $\{a,e,i,o,u\}, \{a,b,c,d\}$ ஆகியவை வெட்டாக்கணங்கள்

c. $\{2,6,10,14\}, \{3,7,11,15\}$ ஆகியவை வெட்டாக்கணங்கள்

d. $\{2,6,10\}, \{3,7,11\}$ ஆகியவை வெட்டாக்கணங்கள்

14

1.11 ஒரு கணத்தின் நிரப்பி

அனைத்துவக்கணமாகிய $\mathbb{U}$ பகாவெண்களின் கணம் என்க. அதன் உட்கணமாகிய $\mathbb{A}$இல் 42இன் வகுவெண்கள் அல்லாத பகாவெண்கள் இருப்பதாக கொள்வோம். அதாவது, $A = \{x: x \in U, x$ 42இன் வகுவெண் அன்று$\}$. கீழ்க்கண்டவற்றை நாம் காணலாம்.

$2 \in U$, $2 \notin A$; ஏனெனில் 42ஐ 2 வகுக்கிறது

$3 \in U$, $3 \notin A$, ஏனெனில் 42ஐ 3 வகுக்கிறது

$7 \in U$, $7 \notin A$, ஏனெனில் 7 42ஐ வகுக்கிறது

$\mathbb{U}$இல் இருந்து $\mathbb{A}$இல் இல்லாதவை $2,3,7$ ஆகியவை மட்டுமே. இதனால், $\{2,3,7\}$ $\mathbb{U}$வைப்பொறுத்து $\mathbb{A}$இன் நிரப்பி என்கிறோம். இதை $\mathbb{A}'$ என்றுகுறித்து $\mathbb{A}$வெட்டு என்று வாசிக்கிறோம்.. $\mathbb{A}' = \{2,3,7\}$.

$\mathbb{A}' = \{x : x \in \mathbb{U}, x \notin \mathbb{A}\}$

வரையறை *8* அனைத்துவக்கணம் $\mathbb{U}$ எனவும், அதன் உட்கணம் $\mathbb{A}$ எனவும் கொண்டால், $\mathbb{U}$ஐ சார்ந்து $\mathbb{A}$இன் நிரப்புக்கணமான $\mathbb{A}'$இல் $\mathbb{U}$இல் உள்ளதும் $\mathbb{A}$இல் இல்லாததுமான உறுப்புகள் உள்ளன.

அதாவது, $\mathbb{A}' = \{x : x \in \mathbb{U}, x \notin \mathbb{A}\}$. $\mathbb{A}' = \mathbb{U} - \mathbb{A}$ என்பதும் தெளிவாகிறது.

சான்று 20 $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A = \{1,3,5,7,9\}$ என்க. $\mathbb{A}'$-ஐ காண்க.

தீர்வு $\mathbb{U}$இல் இருந்து $\mathbb{A}$இல் இல்லாத உறுப்புகள் $2,4,6,8,10$ ஆகியவை என்பதை காணலாம். எனவே, $A' = \{2,4,6,8,10\}$

சான்று 21 ஒரு உடன்கல்விப்பள்ளியின் 11ஆம் வகுப்பின் மாணவர்களின் கணத்தை $\mathbb{U}$ எனும் அனைத்துவக்கணமாக கொள்க.. 11ஆம் வகுப்பின் மாணவிகளின் கணம் $\mathbb{A}$ எனில், $\mathbb{A}'$ஐ காண்க.

தீர்வு A என்பது மாணவிகளின் கணமெனில், மாணவன்களின் கணம் $\mathbb{A}'$.

குறிப்பு $\mathbb{A}$ ஒரு அனைத்துவக்கணமான $\mathbb{U}$வின் உட்கணம் எனில், அதன் நிரப்பியாகிய $\mathbb{A}'$உம் $\mathbb{U}$வின் உட்கணம்.

மேலுள்ள 20ஆம் சான்றிலிருந்து $\mathbb{A}' = \{2,4,6\ 8,10\}$. எனவே,

$(\mathbb{A}')' = \{x: x \in U, x \notin \mathbb{A}'\} = \{1,3,5,7,9\} = \mathbb{A}$.

நிரப்பியின் வரையறையிலிருந்து எந்தவொரு அனைத்துவக்கணத்துக்கும் $(\mathbb{A}')' = \mathbb{A}$.

கீழ்க்காணும் சான்றில் $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})'$, $\mathbb{A}' \cap \mathbb{B}'$ ஆகியவற்றின் விளைவுகளை காண்போம்.

சான்று 22 $\mathbb{U} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathbb{A} = \{2, 3\}$, $\mathbb{B} = \{3, 4, 5\}$. $\mathbb{A}', B', \mathbb{A}' \cap \mathbb{B}', \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ ஆகியவற்றை காண்க. இதனால் $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})' = \mathbb{A}' \cap \mathbb{B}'$ என காட்டுக.

தீர்வு $\mathbb{A}' = \{1,4,5,6\}$, $\mathbb{B}' = \{1,2,6\}$. எனவே, $\mathbb{A}' \cap \mathbb{B}' = \{1,6\}$

மேலும், $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{2,3,4,5\}$ என்பதால் $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})' = \{1,6\}$, $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})' = \{1,6\} = \mathbb{A}' \cap \mathbb{B}'$.

மேற்கண்ட விளைவை பொதுவாக நிறுவலாம். $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ஆகியவை அனைத்துவக்கணமான $\mathbb{U}$வின் உட்கணங்கள் எனில்,

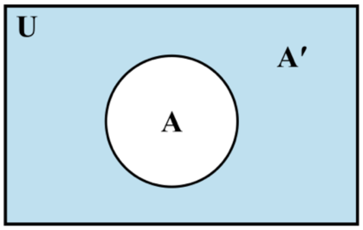
$(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})' = \mathbb{A}' \cap \mathbb{B}'$

$(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})' = \mathbb{A}' \cup \mathbb{B}'$

இந்த இரண்டு பண்புகளையும் சொற்களால் கீழ்க்காணுமாறு விவரிக்கிறோம்.

இரண்டு கணங்களின் ஒன்றிப்பின் நிரப்பி அவற்றின் நிரப்பிகளின் இடைவெட்டு; இரண்டு கணங்களின் இடைவெட்டின் நிரப்பி அவற்றின் நிரப்பிகளின் ஒன்றிப்பு. இவற்றை தி மார்கன் என்ற கணிதரின் பெயரால் திமார்கனின் விதிகள் என வழங்குகிறோம்.

A என்ற கணத்தையும் அதன் நிரப்பியான A'ஐயும் வென்படவரைவுகளாக படம் 1.10இல் காணலாம். நிறமுள்ள பகுதி நிரப்புக்கணத்தை குறிக்கிறது



படம் 1.10

நிரப்புக்கணத்தின் பண்புகள்

நிரப்பு விதிகள் :

1. $\mathbb{A} \cup \mathbb{A}' = \mathbb{U}$ 2. $\mathbb{A} \cap \mathbb{A}' = \varphi$

திமார்கனின் விதிகள்:

1. $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})' = \mathbb{A}' \cap \mathbb{B}'$ 2. $(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})' = \mathbb{A}' \cup \mathbb{B}'$

இரட்டை நிரப்பு விதி: $(\mathbb{A}')' = \mathbb{A}$

வெற்றுக்கணவிதியும், அனைத்துவக்கண விதியும்: $\varphi' = \mathbb{U}$, $\mathbb{U}' = \varphi$.

வென்படவரைவுகளின் உதவியால் இவற்றை சரிபார்க்கலாம்.

பயிற்சி 1.5

1 $\mathbb{U} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $\mathbb{A} = \{1,2,3,4\}$, $\mathbb{B} = \{2,4,6,8\}$, $\mathbb{C} = \{3,4,5,6\}$ எனில், கீழ்க்கண்டவற்றை காண்க

a. $\mathbb{A}'$ c. $(\mathbb{A} \cup \mathbb{C})'$ e. $(\mathbb{A}')'$

b. $\mathbb{B}'$ d. $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})'$ f. $(\mathbb{B} - \mathbb{C})'$

2 $\mathbb{U} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ எனக்கொண்டு கீழ்வரும் கணங்களுக்கு நிரப்புக்கணங்களை காண்க

a. $\mathbb{A} = \{a, b, c\}$ c. $\mathbb{C} = \{a, c, e, g\}$

b. $\mathbb{B} = \{d, e, f, g\}$ d. $\mathbb{D} = \{f, g, h, a\}$

3 இயலெண்கணத்தை அனைத்துவக்கணமாகக்கொண்டு, கீழ்வரும் கணங்களின் நிரப்புக்கணங்களை காண்க.

a. $\{x\ x$ இரட்டைப்படை இயலெண்$\}$ g. $\{x : x$ முழுக்கனவம்$\}$

b. $\{x : x$ ஒற்றைப்படை இயலெண்$\}$ h. $\{x : x + 5 = 8\}$

c. $\{x : x$ 3இன் நேர்ம மடங்கு$\}$ i. $\{x : 2x + 5 = 9\}$

d. $\{x : x$ பகாவெண்$\}$ j. $\{x : x \geq 7\}$

e. $\{x\ x$ 3ஆலும் 5ஆலும் வகுபடும் இயலெண் $\}$ k. $\{x : x \in \mathbb{N}, 2x + 1 > 10\}$

f. $\{x : x$ முழுவர்க்கம்$\}$

4 $\mathbb{U} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $\mathbb{A} = \{2,4,6,8\}$, $\mathbb{B} = \{2,3,5,7\}$ எனில் கீழ்க்கண்டவற்றை சரிபார்க்க.

a. $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})' = \mathbb{A}' \cap \mathbb{B}'$ b. $(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})' = \mathbb{A}' \cup \mathbb{B}'$

5 கீழ்க்காணும் தொடர்புகளுக்கு வென்படவரைவுகளை வரைக.

a. $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})'$ c. $(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})'$

b. $\mathbb{A}' \cap \mathbb{B}'$ d. $\mathbb{A}' \cup \mathbb{B}'$

6 $\mathbb{U}$ ஒரு தளத்தில் அமைந்த எல்லா முக்கோணங்களின் கணம் என்க. $\mathbb{A}$ = ஒரு மூலையின் கோணம் 60 பாகையாக இல்லாத முக்கோணங்களின் கணம் என்க. $\mathbb{A}'$ஐ காண்க.

7 கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக.

a. $\mathbb{A} \cup \mathbb{A}' = ..$ c. $\mathbb{A} \cap \mathbb{A}' = ..$

b. $\varphi' \cap \mathbb{A} = ..$ d. $\mathbb{U}' \cap \mathbb{A} = ..$

1.12 கணவொன்றிப்பு, வெட்டு ஆகியவற்றின் நடைமுறைப்பயன்பாடுகள்

இதுவரை ஒன்றிப்புக்கணம், வெட்டுக்கணம், கணவேறுபாடு ஆகியவற்றை கண்டோம். நடைமுறையில் இவை பயன்படும் விதங்களை இங்கு காணலாம். மேலும், நிகழ்தகவை படிக்கும்போது (படலம் 16) இங்கு காணும் வாய்ப்பாடுகளை பயன்படுத்துவோம்.

(i) $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ முடிவுறு கணங்கள் என்க. $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \phi$ எனில்,

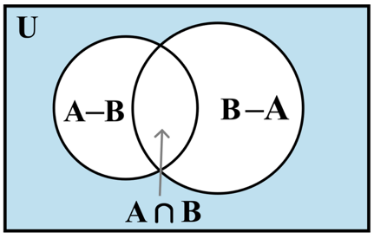
$$n(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = n(\mathbb{A}) + n(\mathbb{B}) \qquad (1)$$

$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \phi$ என்பதால், $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$இலுள்ள உறுப்புகள் $\mathbb{A}$யிலும் $\mathbb{B}$யிலும் இல்லாமல் $\mathbb{A}$யிலோ $\mathbb{B}$யிலோ உள்ளன, எனவே சமன்பாடு (1) கிடைக்கிறது.

(ii) பொதுவாக, $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ என்பவை முடிவுறுகணங்கள் எனில்

$$n(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = n(\mathbb{A}) + n(\mathbb{B}) - n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \qquad (2)$$

$\mathbb{A} - \mathbb{B}$, $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$, $\mathbb{B} - \mathbb{A}$ ஆகியவை வெட்டாக்கணங்கள், அவற்றின் ஒன்றிப்பு $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ (படம் 1.11).



படம் 1.11

ஆகவே,

$$n(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = n(\mathbb{A} - \mathbb{B}) + n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) + n(\mathbb{B} - \mathbb{A})$$
$$= n(\mathbb{A} - \mathbb{B}) + n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) + n(\mathbb{B} - \mathbb{A}) + n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) - n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$$
$$= n(\mathbb{A}) + n(\mathbb{B}) - n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$$

இது (2) ஆம் சமன்பாட்டை சரியாக்குகிறது.

(iii) $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ முடிவுறுகணங்கள் எனில்,

$$n(\mathbb{A} \cup \mathbb{B} \cup \mathbb{C}) = n(\mathbb{A}) + n(\mathbb{B}) + n(\mathbb{C}) - n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) - n(\mathbb{B} \cap \mathbb{C}) - n(\mathbb{A} \cap \mathbb{C}) + n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \cap \mathbb{C}) \quad (3)$$

(2) ஆம் சமன்பாட்டின் படி

$$n(\mathbb{A} \cup \mathbb{B} \cup \mathbb{C})$$
$$= n(\mathbb{A}) + n(\mathbb{B} \cup \mathbb{C}) - n[\mathbb{A} \cap (\mathbb{B} \cup \mathbb{C})]$$
$$= n(\mathbb{A}) + n(\mathbb{B}) + n(\mathbb{C}) - n(\mathbb{B} \cap \mathbb{C}) - n[\mathbb{A} \cap (\mathbb{B} \cup \mathbb{C})]$$

இப்போது, $\mathbb{A} \cap (\mathbb{B} \cup \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \cup (\mathbb{A} \cap \mathbb{C})$ என்பதால்,

$$n\,[\mathbb{A} \cap (\mathbb{B} \cup \mathbb{C})] = n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) + n(\mathbb{A} \cap \mathbb{C}) - n[(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \cap (\mathbb{A} \cap \mathbb{C})]$$
$$= n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) + n\,(\mathbb{A} \cap \mathbb{C}) - n\,(\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \cap \mathbb{C})$$

எனவே,

$$n\,(\mathbb{A} \cup \mathbb{B} \cup \mathbb{C}) = n(\mathbb{A}) + n(\mathbb{B}) + n(\mathbb{C}) - n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) - n(\mathbb{B} \cap \mathbb{C}) - n(\mathbb{A} \cap \mathbb{C}) + n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \cap \mathbb{C})$$

இது (3)ஆம் சமன்பாட்டை நிறுவுகிறது.

சான்று 23 $\mathbb{X}$இல் 28 உறுப்புகளும் $\mathbb{Y}$இல் 32 உறுப்புகளும் $\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}$யில் 50 உறுப்புகளும் இருந்தால், $\mathbb{X} \cap \mathbb{Y}$இல் எத்தனை உறுப்புகளை உள்ளன?.

தீர்வு $n(\mathbb{X}) = 28$, $n(\mathbb{Y}) = 32$, $n(\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}) = 50$ எனில், $n\,(\mathbb{X} \cap \mathbb{Y})$ என்ன என்பது கேள்வி.

$n(\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}) = n(\mathbb{X}) + n(\mathbb{Y}) - n(\mathbb{X} \cap \mathbb{Y})$ எனும் வாய்ப்பாட்டின்படி, $n(\mathbb{X} \cap \mathbb{Y}) = 28 + 32 - 50 = 10$

மறுவழியாக, $n(\mathbb{X} \cap \mathbb{Y}) = k$ என்க.

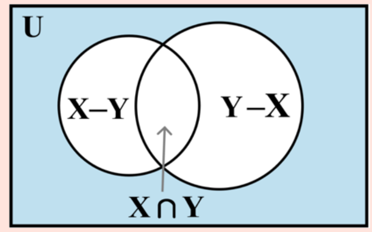
படம் 1.12இன்படி

$$n(\mathbb{X} - \mathbb{Y}) = 28 - k$$
$$n(\mathbb{Y} - \mathbb{X}) = 32 - k$$

இதிலிருந்து, $50 = n(\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}) = n(\mathbb{X} - \mathbb{Y}) + n(\mathbb{X} \cap \mathbb{Y}) + n(\mathbb{Y} - \mathbb{X}) = (28 - k) + k + (32 - k)$

அதாவது, $50 = 40 + k$

எனவே, $k = 10$.



படம் 1.12

சான்று 24 ஒரு பள்ளியில் 20 ஆசிரியர்கள் இயற்பியலையோ கணிதத்தையோ கற்பிக் கிறார்கள், இவர்களுள் 12 ஆசிரியர்கள் கணிதத்தை கற்பிக்கிறார்கள்; 4 ஆசிரியர்கள் இயற்பியலையும் கணிதத்தையும் கற்பிக்கிறார் கள் எனில், இயற்பியலை கற்பிக்கும் ஆசிரியர்களின் எண்ணிக்கை என்ன?

தீர்வு கணிதத்தை கற்பிக்கும் ஆசிரியர்களின் கணத்தை $\mathbb{M}$ என்றும். இயற்பியலை கற்பிப் போரின் கணத்தை $\mathbb{P}$ என்றும் குறிப்போம்.

இந்தச்சான்றில் அதுவோ இதுவோ எனும் தொடர் ஒன்றிப்புக்கணத்தையும் அதுவும் இதுவும் எனும் தொடர் வெட்டுக்கணத்தையும் காட்டுகின்றன. எனவே,

$n(\mathbb{M} \cup \mathbb{P}) = 20$, $n(\mathbb{M}) = 12$, $n(\mathbb{M} \cap \mathbb{P}) = 4$ ஆகியவை தரவுகள்;

$n(\mathbb{P})$ஐ கண்டறியவேண்டும்.

$$n(\mathbb{M} \cup \mathbb{P}) = n(\mathbb{M}) + n(\mathbb{P}) - n\,(\mathbb{M} \cap \mathbb{P})$$
$$20 = 12 + n(\mathbb{P}) - 4$$

எனவே, $n(\mathbb{P}) = 12$, அதாவது 12 ஆசிரியர்கள் இயற்பியலை பயிற்றுவிக்கிறார்கள்.

சான்று 25 ஒரு வகுப்பில் 35 மாணவர்கள் இருக்கிறார்கள். அதில் மட்டைப்பந்தாட விரும்புவோர் 24 பேர். காற்பந்தாட விழைவோர் 16 பேர். ஒவ்வொரு மாணவரும் மீச்சிறுமமாக ஒரு விளையாட்டை விளையாட விரும்புகிறார் எனில், எத்தனை மாணவர்கள் மட்டைப் பந்தையும் கால்பந்தையும் விளையாட விரும்புகின்றனர் என்று காண்க.

தீர்வு மட்டைப்பந்தை விளையாட விரும்புவோ ரின் கணத்தை $\mathbb{X}$ என்க.

காற்பந்தை விளையாட விரும்புவோரின் கணத்தை $\mathbb{Y}$ என்க.

அப்படியெனில், இரண்டையும் விளையாட விரும்புவோரின் கணம் $\mathbb{X} \cap \mathbb{Y}$.

மீச்சிறுமமாக ஒரு விளையாட்டை விளையாட விரும்புபவரின் கணத்தை $\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}$ என்போம்.

தரவுகளின் படி, $n\,(\mathbb{X}) = 24$, $n\,(\mathbb{Y}) = 16$, $n\,(\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}) = 35$, $n\,(\mathbb{X} \cap \mathbb{Y}) = ?$

நமக்கு தெரிந்த, $n(\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}) = n(\mathbb{X}) + n(\mathbb{Y}) - n(\mathbb{X} \cap \mathbb{Y})$. என்ற வாய்ப்பாட்டின்படி

$$35 = 24 + 16 - n(\mathbb{X} \cap \mathbb{Y}) \Rightarrow n(\mathbb{X} \cap \mathbb{Y}) = 5$$

எனவே 5 மாணவர்கள் இரு விளையாட்டு களையும் விளையாட விரும்புகிறார்கள்.

சான்று 26 400பேர் பங்குபெற்ற ஒரு கணக்கெடுப்பில், 100பேர் மாம்பழத்தையும், 150பேர் வாழைப்பழத்தையும், 75பேர் இரண்டு பழங்களையும் விரும்புவதாக தெரிவிக்கின் றனர். இரண்டில் எதையும் விரும்பாதவர்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

தீர்வு கணக்கெடுப்பில் கலந்துகொண்டோரின் கணம் $\mathbb{U}$ என்க.

மாம்பழத்தை விரும்புபவோரின் கணம் $\mathbb{A}$, வாழைப்பழத்தை விரும்புவோரின் கணம் $\mathbb{B}$ என்க.

$n(\mathbb{U}) = 400$, $n(\mathbb{A}) = 100$, $n(\mathbb{B}) = 150$, $n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = 75$ ஆகியவை தரவுகள்.

$$n(\mathbb{A}' \cap \mathbb{B}') = n(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})' = n(\mathbb{U}) - n(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})$$
$$= n(\mathbb{U}) - n(\mathbb{A}) - n(\mathbb{B}) + n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$$
$$= 400 - 100 - 150 + 75 = 225$$

எனவே, இரண்டில் எதையும் விரும்பாதவர்கள் 225 பேர்.

சான்று 27 தோன்முறைமையின்மையுள்ள 200 பேரில் 120பேர் C_1 எனும் வேதிமருந்தையும் 50பேர் C_2 எனும் மருந்தையும் 30பேர் இருமருந்துகளையும் பயன்படுத்துகின்றனர். கீழ்க்காணுமாறு மருந்துகளின் வீழல்களுக்குள் ளானவர்களின் எண்ணிக்கைகணை காண்க.

(அ) C_2ஐ எடுக்காமல் C_1ஐ மட்டும் எடுத்தோர்

(ஆ) C_1ஐ எடுக்காமல் C_2ஐ மட்டும் எடுத்தோர்

(இ) C_1ஐயோ C_2ஐயோ எடுத்தோர்

தீர்வு மருந்தின் வீழலுக்குள்ளானோரின் கணத்தை $\mathbb{U}$ என்றும் C_1மருந்தை பயன்படுத்துவோரின் கணத்தை $\mathbb{A}$ என்றும் C_2மருந்தை பயன்படுத்துவோரின் கணம் $\mathbb{B}$ என்றும் குறிப்போம். இங்கு,

$n(\mathbb{U}) = 200$, $n(\mathbb{A}) = 120$, $n(\mathbb{B}) = 50$,
$n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = 30$

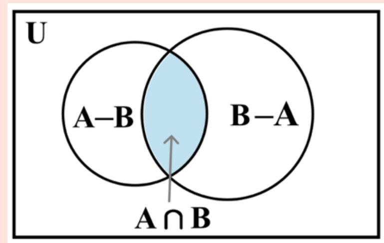
ஆகியவை தரவுகள்.

(அ) படம் 1.13இலுள்ள வென்னின் படவரைவிலிருந்து $\mathbb{A} = (\mathbb{A} - \mathbb{B}) \cup (\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$ என்று காண்கிறோம். $\mathbb{A} - \mathbb{B}$யும் $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$யும் வெட்டாக்கணங்கள் என்பதால்

$$n(\mathbb{A}) = n(\mathbb{A} - \mathbb{B}) + n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$$

அதாவது $n(\mathbb{A} - \mathbb{B}) = n(\mathbb{A}) - n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) =$
$120 - 30 = 90$

ஆகவே, C_2ஐ எடுக்காமல் C_1ஐ மட்டும் எடுத்துக்கொண்டோரின் எண்ணிக்கை 90.



படம் 1.13

(ஆ) படம் 1.13இலிருந்து, $\mathbb{B} = (\mathbb{B} - \mathbb{A}) \cup (\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$ என்று அறிகிறோம். $(\mathbb{B} - \mathbb{A})$யும் $(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$யும் வெட்டாக்கணங்கள் என்பதால், $n(\mathbb{B}) = n(\mathbb{B} - \mathbb{A}) + n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$. அதாவது, $n(\mathbb{B} - \mathbb{A}) = n(\mathbb{B}) - n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = 50 - 30 = 20$. ஆகவே, C_1ஐ எடுக்காமல், C_2ஐ மட்டும் எடுத்தவர்களின் எண்ணிக்கை 20.

(இ) C_1ஐயோ C_2ஐயோ எடுத்தோரின் எண்ணிக்கை $n(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = n(\mathbb{A}) + n(\mathbb{B}) - n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = 120 + 50 - 30 = 140$.

பயிற்சி 1.6

1. $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ ஆகிய இருகணங்கள் $n(\mathbb{X}) = 17$, $n(\mathbb{Y}) = 23$, $n(\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}) = 38$ என்றவாறு இருந்தால், $n(\mathbb{X} \cap \mathbb{Y})$ஐ காண்க.
2. $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ ஆகிய இருகணங்களின் ஒன்றிப்பான $\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}$இல் 18 உறுப்புகள் உள்ளன. $\mathbb{X}$இல் 8 உறுப்புகளும் $\mathbb{Y}$இல் 15 உறுப்புகளும் இருந்தால், $\mathbb{X} \cap \mathbb{Y}$யில் எத்தனை உறுப்புகள் உள்ளன?
3. 400பேர் உள்ள குழுவில், 250பேர் தமிழையும் 200பேர் மலையாளத்தையும் பேசக்கூடியவர்கள். எத்தனைபேர் இருமொழிகளையும் பேசக்கூடியவர்கள்?
4. $\mathbb{S}$இல் 21 உறுப்புகளும் $\mathbb{T}$இல் 32 உறுப்புகளும் $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$யில் 11 உறுப்புகளும் இருந்தால் $\mathbb{S} \cup \mathbb{T}$யில் எத்தனை உறுப்புகள் உள்ளன?
5. $\mathbb{X}$இல் 40 உறுப்புகளும் $\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}$இல் 60 உறுப்புகளும் $\mathbb{X} \cap \mathbb{Y}$இல் 10 உறுப்புகளும் இருந்தால், $\mathbb{Y}$இல் எத்தனை உறுப்புகள் இருக்கின்றன?
6. 70பேர் அடங்கிய ஒரு குழுவில் காப்பிகுடிப்போர் 37பேரும் தேநீர்குடிப்போர் 52பேரும் உள்ளனர். ஒவ்வொருவரும் இரண்டில் ஒன்றையாவது அருந்துபவர் எனில், இரண்டையும் அருந்துவோர் எத்தனைபேர்?

7 65பேருள்ள ஒரு குழுவில் 40பேர் மட்டைபந்துவிளையாட விரும்புகின்றனர், 10பேர் மட்டைப்பந்தையும் வரிப்பந்தையும் விளையாட விரும்புகின்றனர். வரிப்பந்துமட்டும் விரும்பி மட்டைப்பந்துவிரும்பாதார் எத்தனை பேர்? எத்தனை பேர் வரிப்பந்துவிளையாட விரும்புகின்றனர்?

8 ஒரு குழுவில், 50பேர் தமிழையும் 20பேர் **பிரான்சி**யத்தைம், 10பேர் இரண்டையும் பேசக்கூடியவர்கள் எனில், இவ்விருமொழிகளில் ஒரு மொழியையாவது பேசுவோர் எத்தனைபேர்?

பலவகைச்சான்றுகள்

சான்று 28 CATARACT எனும் சொல்லை எழுதத்தேவையான எழுத்துகளின் கணமும் TRACT எனும் சொல்லை எழுத தேவையான எழுத்துகளின் கணமும் சமம் என்று காட்டுக.

தீர்வு "CATARACT" என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துகளின் கணம் $\mathbb{X}$ எனில், $\mathbb{X} = \{C, A, T, R\}$. "TRACT" என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துகளின் கணம் $\mathbb{Y}$ எனில், $Y = \{T, R, A, C, T\} = \{T, R, A, C\}$

$\mathbb{X}$இல் உள்ள எல்லா உறுப்புகளும் $\mathbb{Y}$இலும், $\mathbb{Y}$இல் உள்ள எல்லா உறுப்புகளும் $\mathbb{X}$இலும் உள்ளதால், $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$.

சான்று 29 $\{-1, 0, 1\}$ எனும் கணத்தின் எல்லா உட்கணங்களையும் எழுதுக.

தீர்வு $A = \{-1, 0, 1\}$ என்று குறிப்போம்.

ஒரு உறுப்பும் இல்லாத வெற்றுக்கணம் ϕ.

ஒரேயொரு உறுப்பு மட்டும் உள்ள உட்கணங்கள் $\{-1\}, \{0\}, \{1\}$.

ஈருறுப்புகள் உள்ள உட்கணங்கள் $\{-1,0\}$, $\{-1,1\}$, $\{0,1\}$.

மூன்று உறுப்புகளுள்ள உட்கணம் $\mathbb{A}$யே.

எனவே, $\mathbb{A}$யின் உட்கணங்கள் φ, $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{-1, 0\}$, $\{-1, 1\}$, $\{0, 1\}$, $\{-1, 0, 1\}$ ஆகியவை.

சான்று 30 $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ என்பது $\mathbb{A} = \mathbb{B}$ஐ உள்ளுரைக்கிறது என்று காட்டுக.

தீர்வு $a \in A$ என்க. அப்படியெனில், $a \in \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$.

$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ என்பதால், $a \in \mathbb{A} \cap \mathbb{B}$. இதனால், $a \in \mathbb{B}$. அதாவது, $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$.

அதைப்போல், $b \in \mathbb{B}$ என்க. அப்படியெனில், $b \in \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$.

$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ என்பதால், $b \in \mathbb{A} \cap \mathbb{B}$. இதனால், $b \in \mathbb{A}$ அதாவது, $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$.

இவ்வாறு, $\mathbb{A} = \mathbb{B}$ என நிறுவியிருக்கிறோம்.

சான்று 31 $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ எனும் எந்த இரு கணங்களுக்கும், $\mathbb{P}(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = \mathbb{P}(\mathbb{A}) \cap \mathbb{P}(\mathbb{B})$ என்று காட்டுக.

தீர்வு $\mathbb{X} \in \mathbb{P}(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$ என்க. **அப்படியெனில்**, $\mathbb{X} \subset (\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$. ஆகையால், $\mathbb{X} \subset \mathbb{A}, \mathbb{X} \subset \mathbb{B}$.

எனவே, $\mathbb{X} \in \mathbb{P}(\mathbb{A})$, $\mathbb{X} \in \mathbb{P}(\mathbb{B})$. இதன் உள்ளுரை $\mathbb{X} \in \mathbb{P}(\mathbb{A}) \cap \mathbb{P}(\mathbb{B})$.

இது $\mathbb{P}(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \subset \mathbb{P}(\mathbb{A}) \cap \mathbb{P}(\mathbb{B})$ என்பதை தருகிறது.

இனி, $\mathbb{Y} \in \mathbb{P}(\mathbb{A}) \cap \mathbb{P}(\mathbb{B})$ என்க. அப்படியெனில் $\mathbb{Y} \in \mathbb{P}(\mathbb{A})$, $\mathbb{Y} \in \mathbb{P}(\mathbb{B})$. ஆகையால், $\mathbb{Y} \subset \mathbb{A}, \mathbb{Y} \subset \mathbb{B}$.

எனவே, $\mathbb{Y} \subset \mathbb{A} \cap \mathbb{B}$. இதன் உள்ளுரை $\mathbb{Y} \in \mathbb{P}(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$.

இது $\mathbb{P}(\mathbb{A}) \cap \mathbb{P}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{P}(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$ என்பதை தருகிறது. எனவே,

$$\mathbb{P}(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = \mathbb{P}(\mathbb{A}) \cap \mathbb{P}(\mathbb{B})$$

சான்று 32 ஒரு சந்தையாய்வுக்குழு கருத்துக் கணிப்பில் 1000 நுகர்வோரை கேட்டதில் 720பேர் A எனும் சந்தைப்பொருளை விரும்புவ தாகவும், 450பேர் B எனும் சந்தைப்பொருளை விரும்புவதாகவும் கூறியிருந்தனர். இரண்டு பொருள்களையும் விரும்பியவர்களின் சாத்தியமான மீச்சிறு எண்ணிக்கை என்ன?

தீர்வு $\mathbb{U}$ கருத்துக்கணிப்பில் பங்கேற்றோரின் கணம் என்றும், Aயை விரும்பியோரின் கணத்தை $\mathbb{S}$ என்றும் Bயை விரும்பியோரின் கணத்தை $\mathbb{T}$ என்றும் குறிப்போம். தரவின்படி,

$$n(\mathbb{U}) = 1000, \quad n(\mathbb{S}) = 720, \quad n(\mathbb{T}) = 450$$

அப்படியெனில்,

$$\begin{aligned} n(\mathbb{S} \cup \mathbb{T}) &= n(\mathbb{S}) + n(\mathbb{T}) - n(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) \\ &= 720 + 450 - n(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) \\ &= 1170 - n(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) \end{aligned}$$

ஆகவே, $n(\mathbb{S} \cap \mathbb{T})$ மீச்சிறுமமாகும்போது $n(\mathbb{S} \cup \mathbb{T})$ மீப்பெருமமாகிறது. ஆனால், $\mathbb{S} \cup \mathbb{T} \subset \mathbb{U}$ உள்ளுரைப்பது $n(\mathbb{S} \cup \mathbb{T}) \leq n(\mathbb{U}) = 1000$. அதாவது $n(\mathbb{S} \cup \mathbb{T})$இன் மீப்பெருமம் 1000. இதனால், $n(\mathbb{S} \cap \mathbb{T})$இன் மீச்சிறும மதிப்பு 170. எனவே, இரண்டு பொருள்களையும் விரும்பக் கூடியோரின் மீக்குறைந்த எண்ணிக்கை 170.

சான்று 33 கணக்கெடுத்த 500பேரில் 400பேர் Aவகையான மகிழுந்தையும் 200பேர் Bவகை யான மகிழுந்தையும் 50பேர் இரண்டுவகை யானவற்றையும் வைத்திருப்பதாக ஒரு கணக்கெடுப்பு காட்டுகிறது. இந்த தரவு சரியானதா?

தீர்வு $\mathbb{U}$ கணக்கெடுப்பின் பங்குபெற்றோரின் கணம் என்க. Aவகையை வைத்திருப்போரை $\mathbb{M}$ எனும் கணத்தாலும் Bவகையை

வைத்திருப்போரை $\mathbb{S}$ எனும் கணத்தாலும் குறிப்போம்.

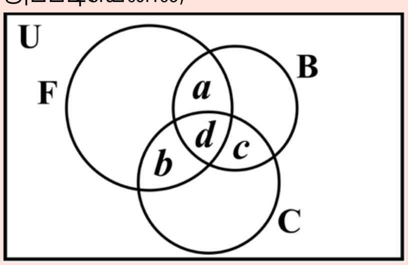
தரவின்படி, $n(\mathbb{U}) = 500$, $n(\mathbb{M}) = 400$, $n(\mathbb{S}) = 200$, $n(\mathbb{S} \cap \mathbb{M}) = 50$.

$$n(\mathbb{S} \cup \mathbb{M}) = n(\mathbb{S}) + n(\mathbb{M}) - n(\mathbb{S} \cap \mathbb{M})$$
$$= 200 + 400 - 50 = 550$$

இது $\mathbb{S} \cup \mathbb{M} \subset \mathbb{U} \Rightarrow n(\mathbb{S} \cup \mathbb{M}) \leq n(\mathbb{U})$ என்பதுடன் முரண்படுகிறது. ஆகவே, கொடுத்துள்ள தரவு தவறு

சான்று 34 ஒரு கல்லூரி 38 விருதுகளை கால்பந்துக்காகவும், 15 விருதுகளை கூடைப்பந்துக்காகவும் 20 விருதுகளை மட்டைப்பந்துக்காகவும் பரிசளித்தது. இவ்விருதுகளை மொத்தம் 58பேரும் மூன்று விருதுகளையும் 3பேரும் பெற்றிருந்தனர் எனில், சரியாக இரண்டு விளையாட்டுகளில் விருதுபெற்றோரின் எண்ணிக்கை யாது?

தீர்வு $\mathbb{F}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ என்பவை முறையே கால்பந்து, கூடைப்பந்து, மட்டைப்பந்து ஆகிய விளையாட்டுகளில் விருதுபெற்றோரின் கணம் என்க. அப்படியெனில்,



படம் 1.14

$n(\mathbb{F}) = 38, n(\mathbb{B}) = 15, n(\mathbb{C}) = 20$

$n(\mathbb{F} \cup \mathbb{B} \cup \mathbb{C}) = 58,\ n(\mathbb{F} \cap \mathbb{B} \cap \mathbb{C}) = 3$

எனவே,

$n(\mathbb{F} \cup \mathbb{B} \cup \mathbb{C}) = n(\mathbb{F}) + n(\mathbb{B}) + n(\mathbb{C})$ $- n(\mathbb{F} \cap \mathbb{B}) - n(\mathbb{F} \cap \mathbb{C}) - n(\mathbb{B} \cap \mathbb{C}) + n(\mathbb{F} \cap \mathbb{B} \cap \mathbb{C})$ என்ற வாய்ப்பாடு

$n(\mathbb{F} \cap \mathbb{B}) + n(\mathbb{F} \cap \mathbb{C}) + n(\mathbb{B} \cap \mathbb{C}) = 18$

என்பதை தருகிறது.

படம் 1.14இலுள்ள வென்படவரைவை கருதுக. அதில்

a குறிப்பது கால்பந்திலும் கூடைப்பந்திலும் மட்டும் விருதுபெற்றோரின் எண்ணிக்கை

b குறிப்பது கால்பந்திலும் கிரிக்கெட்டிலும் மட்டும் விருதுபெற்றோரின் எண்ணிக்கை,

c குறிப்பது கூடைப்பந்திலும் கிரிக்கெட்டிலும் மட்டும் விருதுபெற்றோர்;

d குறிப்பது மூன்று விளையாட்டிலும் விருதுபெற்றோரின் எண்ணிக்கை. இந்த குறியீட்டில்,

$d = n(\mathbb{F} \cap \mathbb{B} \cap \mathbb{C}) = 3$

$a + d + b + d + c + d = a + b + c + 3d = 18$

ஆகவே, $a + b + c = 9$

இதுவே இரண்டு விளையாட்டுகளில் விருதுபெற்றோரின் மொத்த எண்ணிக்கை.

பலவகைப்பயிற்சிகள்

1 கீழ்க்காணும் கணங்களுள் எது எதன் உட்கணம் என்று கூறுக.

a. $\mathbb{A} = \{x : x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x^2} - 8x + 12 = 0\}$
b. $\mathbb{B} = \{2,4,6\}$
c. $\mathbb{C} = \{2,4,6,8,\ldots\}$
d. $\mathbb{D} = \{6\}$

2 கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு கூற்றும் மெய்யா பொய்யா என்று தீர்மானிக்க. மெய்யெனில் அதை நிறுவுக; பொய்யெனில் ஒரு எதிர்ச்சான்று தருக.

a. $x \in \mathbb{A}, \mathbb{A} \in \mathbb{B}$ எனில் $x \in \mathbb{B}$
b. $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}$ எனில் $\mathbb{A} \in \mathbb{C}$
c. $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}, \mathbb{B} \subset \mathbb{C}$ எனில் $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$
d. $\mathbb{A} \not\subset \mathbb{B}, \mathbb{B} \not\subset \mathbb{C}$ எனில் $\mathbb{A} \not\subset \mathbb{C}$
e. $x \in \mathbb{A}, \mathbb{A} \not\subset \mathbb{B}$ எனில், $x \in \mathbb{B}$
f. $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}, x \notin \mathbb{B}$ எனில், $x \notin \mathbb{A}$

3 $\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C}$ என்ற கணங்கள் $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{A} \cup \mathbb{C}, \mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{A} \cap \mathbb{C}$ என்றவாறிருந்தால், $\mathbb{B} = \mathbb{C}$ என்று காட்டுக.

4 கீழ்க்காணும் நான்கு நிலவரங்களும் சமானமானவை என்று காட்டுக :

a. $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$
b. $\mathbb{A} - \mathbb{B} = \varphi$
c. $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{B}$
d. $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{A}$

5 $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ எனில், $\mathbb{C} - \mathbb{B} \subset \mathbb{C} - \mathbb{A}$ என்று காட்டுக.

6 $\mathbb{P}(\mathbb{A}) = \mathbb{P}(\mathbb{B})$ எனில் $\mathbb{A} = \mathbb{B}$ என்று காட்டுக.

7 $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ எனும் ஏதோ இரு கணங்கள் $\mathbb{P}(\mathbb{A}) \cup \mathbb{P}(\mathbb{B}) = \mathbb{P}(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})$ எனும் நிலவரத்தில் இருக்கவியலுமா? விடையை விளக்குக.

8 $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ஆகியவை ஏதோ இரு கணங்கள் எனில், $\mathbb{A} = (\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \cup (\mathbb{A} - \mathbb{B})$ என்றும்

9 $\mathbb{A} \cup (\mathbb{B} - \mathbb{A}) = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ என்றும் காட்டுக.

10 கணத்தின் பண்புகளால், கீழ்வரும் உறவுகளை நிறுவுக.

a. $\mathbb{A} \cup (\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = \mathbb{A}$ b. $\mathbb{A} \cap (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = \mathbb{A}$

11 $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{A} \cap \mathbb{C}$ என்பதாலே $\mathbb{B} = \mathbb{C}$ என இருக்கத்தேவையில்லை என்று காட்டுக.

12 $\mathbb{A}, \mathbb{B}$என்பவை இரு கணங்கள். $\mathbb{X}$ என்ற ஏதோவொரு கணத்துக்கு $\mathbb{A} \cap \mathbb{X} = \mathbb{B} \cap \mathbb{X} = \varphi, \mathbb{A} \cup \mathbb{X} = \mathbb{B} \cup \mathbb{X}$ என்றிருந்தால், $\mathbb{A} = \mathbb{B}$ என்று காட்டுக.

13 (உதவி: $\mathbb{A} = \mathbb{A} \cap (\mathbb{A} \cup \mathbb{X}), \mathbb{B} = \mathbb{B} \cap (\mathbb{B} \cup \mathbb{X})$; பரவுமவிதியையும் பயன்படுத்துக)

14 $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$, $\mathbb{B} \cap \mathbb{C}$, $\mathbb{A} \cap \mathbb{C}$ என்பவை வெற்றற்ற கணங்களாகவும். $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \cap \mathbb{C} = \varphi$ என்றும் இருக்கும்படியான $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ எனும் கணங்களை காண்க.

15 600 மாணவர்கள் கலந்த ஒரு கருத்துக்கணிப்பில் 150பேர் தேநீரை விரும்புவதாகவும் 225பேர் காப்பியை விரும்புவதாகவும் 100பேர் இரு குடிமங்களையும் விரும்புவதாகவும் கூறினர். எத்தனைபேர் இரண்டு குடிமங்களில் எதையும் விரும்புவதில்லை என்று காண்க.

16 ஒரு மாணவர்குழுவில், 100 மாணவர்களுக்கு தமிழும் 50பேருக்கு தெலுங்கும் 25பேருக்கு இருமொழிகளும் தெரியும். ஒவ்வொருவருக்கும் ஒரு மொழியாவது தெரியும். குழுவில் எத்தனைபேர் இருக்கிறார்கள்?

17 60பேரை கருத்துக்கணித்துப்பெற்ற தரவு, 25பேர் H எனும் செய்தித்தாளையும் 26பேர் T எனும் செய்தித்தாளையும், 26பேர் I எனும் செய்தித்தாளையும்11பேர் H, T செய்தித்தாள்களையும், 8பேர் T, I செய்தித்தாள்களையும், 3பேர் 3 செய்தித்தாள்களையும் படிப்பதாக குறிப்பிடுகிறது.

a. ஏதோவொரு செய்தித்தாளையாவது படிப்பவர்கள் எத்தனைபேர்?

b. ஏதோவொரு செய்தித்தாளை மட்டும் படிப்பவர்கள் எத்தனைபேர்?

18 ஒரு கருத்துக்கணிப்பில் A எனும் பொருளை 21பேர் விரும்புவதாகவும், B எனும் பொருளை 26பேர் விரும்புவதாகவும், C எனும் பொருளை 29பேர் விரும்புவதாகவும் குறிப்பிடப்பட்டிருக்கிறது. Aயையும் Bயையும் விரும்புவோர் 14பேர்; Cயையும் Aயையும் விரும்புவோர் 12பேர்; Bயையும் Cயையும் விரும்புவோர் 14பேர்; மூன்று பொருள்களையும் விரும்புவோர் 8பேர் எனில், C எனும் பொருளை மட்டும் விரும்புவது எத்தனைபேர்?

சுருக்கவுரை

இந்த அலகில் கணத்தின் அடிப்படையான வரையறைகளையும் செயலங்களையும் படித்தோம். அவற்றை இங்கு சுருங்கவுரைப்போம்.

- கணம் என்பது நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட பொருள்களின் தொகுதி.
- எந்தவொரு உறுப்பும் இல்லாத கணம் வெற்றுக்கணம், φ
- ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையான உறுப்புகளுள்ள கணம் முடிவுறு கணம், அவ்வாறு இல்லாதது முடிவிலாக்கணம்.
- $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ எனும் இருகணங்களில் ஒன்றிலிருக்கும் எல்லா உறுப்புகளும் மற்றதிலும் இருந்தால் அவை சமக்கணங்கள் என்று கூறி $\mathbb{A} = \mathbb{B}$ என்று குறிக்கிறோம்.
- $\mathbb{A}$யிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் $\mathbb{B}$யில் இருந்தால் $\mathbb{A}$ $\mathbb{B}$யின் உட்கணம் என்கிறோம். இதை $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ என்று குறிக்கிறோம்.
- $\mathbb{A}$ என்ற ஒரு கணத்தின் எல்லா உட்கணங்களின் தொகுப்பை அதன் அடுக்குக்கணம் என்றழைத்து $\mathbb{P}(\mathbb{A})$ என்று குறிக்கிறோம்.
- $\mathbb{A}$யிலோ $\mathbb{B}$யிலோ உள்ள எல்லா உறுப்புகளும் அடங்கிய கணத்தை அவற்றின் ஒன்றிப்புக்கணம் என்றழைத்து $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ என்று குறிக்கிறோம்..
- $\mathbb{A}$யிலும் $\mathbb{B}$யிலும் உள்ள பொதுவான உறுப்புகள் அடங்கிய கணத்தை அவற்றின் வெட்டுக்கணம் என்றழைத்து $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ என்று குறிக்கிறோம்.
- $\mathbb{A}$யில் இல்லாததும் அனைத்துவக்கணமான $\mathbb{U}$வில் இருப்பதுமான எல்லா உறுப்புகளும் அடங்கிய கணத்தை Uவைப்பொறுத்து $\mathbb{A}$யின் நிரப்புக்கணம் என்றழைத்து $\mathbb{A}'$ என்று குறிக்கிறோம்.
- $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ என்ற எந்த இரு கணங்களுக்கும், $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})' = \mathbb{A}' \cap \mathbb{B}'$; $(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})' = \mathbb{A}' \cup \mathbb{B}'$
- $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ என்ற முடிவுறு கணங்களுக்கு $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \varphi$ எனில், $n(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = n(\mathbb{A}) + n(\mathbb{B})$.
- $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \neq \varphi$ எனில் $n(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = n(\mathbb{A}) + n(\mathbb{B}) - n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$

வரலாற்றுக்குறிப்புகள்

புதுக்காலத்தின் கணக்கோட்பாட்டை உருவாக்கியதில் இடாய்ச்சுக்கணிதவியலரான கியோர் கான்றோர் $(1845 - 1918)$ பெரும்பங்கை வகித்தவராக கருதுகிறோம். கணக்கோட்பாட்டுக்கான அவரது

ஆய்வுக்கட்டுரைகள் $1874-1897$ காலக்கட்டத்தில் வெளிவந்தன. a_1 வவி $x+a_2$ வவி $2x+a_3$ வவி $3x+\cdots$ என்ற முக்கோணவியத்தொடர்களை ஆய்வறிந்தபோது கணக்கோட்பாடு எழுந்தது.

1874இல் வெளிவந்த அவரது ஆய்வுக்கட்டுரையில் மெய்யெண்களின் கணத்தை முழுவெண்களின் கணத்துடன் ஒன்றுக்கொன்றான நிகர்மையில் வைக்கவியலாது என்று குறிப்பிட்டிருந்தார். 1879இல் தொடங்கி கணக்கோட்பாட்டின் பல்வேறு பண்புகளை காட்டும் பல ஆராய்ச்சிக்கட்டுரைகளை வெளியிட்டார். கான்றோரின் ஆராய்ச்சிகளை மற்றொரு செருமனிய கணிதவியலரான இரிச்சருடு தீடிக்கிண்டு $(1831-1916)$ ஏற்றார். ஆயினும் குரோனெக்கர் (1810-1893) முடிவிலாக்கணத்தை முடிவுறுகணத்தைப்போலவே கான்றோர் கருதியதை ஏற்க மறுத்தார்.

இருபதாம் நூற்றாண்டின் தொடக்கத்தில் வேறொரு இடாய்ச்சுக்கணிதவியலரான காட்டுலோ பிரீகி கணக்கோட்பாட்டை ஏரணக்கொள்கைகளாக வழங்கினார். அதுவரை கணக்கோட்பாடுமுழுவதும் எல்லாக்கணங்களின் கணம் இருப்பதன் எடுகோளின் அடிப்படையில் இருந்தது. புகழ்மிக்க ஆங்கிலேய தத்துவவியலரும் கணிதவியலருமான பெருட்டிராண்டு இரசல் (1872-1970) 1902இல் எல்லாக்கணங்களின் கணம் இருப்பதன் எடுகோள் முரண்பாட்டை விளைவித்தது என்று காட்டினார். அதையே இரசலின் தோற்றமுரண் என அழைக்கிறோம்.

இரசலின் தோற்றமுரண்போன்றே பல்வேறு தோற்றமுரண்களை பின்னாள்களில் கணிதவியலர்களும் ஏரணவியலர்களும் உண்டாக்கினர். சிறந்த கணிதவியலரும் ஆசிரியருமான பால் ஆலுமோசு ’இயலிடக்கணக்கோட்பாடு என்ற தம் நூலில் *அனைத்துவக்கணம் வெற்றுக்கணத்தின் உட்கணம்* என்று குறிப்பிட்டிருக்கிறார்.

இத்தோற்றமுரண்கள் கணக்கோட்பாட்டின் அடிக்கோள்களை உண்டாக்க உதவியது. 1908ஆம் ஆண்டு என்சுடு செர்மிலோ முதல் அடிக்கோளாக்கலை வெளியிட்டார். ஆபிரகாம் பிராங்கெல், 1922இல் மற்றொரு அடிக்கோளை வெளியிட்டார். 1925இல் யோவான் வான் நியூமன் ஒழுங்குமையின் அடிக்கோளை வெளிப்படையாக அறிமுகமாக்கினார். பின்பு 1937இல் பால் பெருநேசு மேலும் மனநிறைவான அடிக்கோளாக்கத்தை வெளியிட்டார். 1940ஆம் ஆண்டு அவ்வடிக்கோள்களை மாற்றியமைத்து கோட்டு கியோடல் தன் தனிவரையில் வெளியிட்டார். இதை வான்னியூமன்பெருனேசின் கணக்கோட்பாடு என்றும் கியோடல்பெருனேசின் கணக்கோட்பாடு என்றும் அழைக்கிறோம்.

இதைப்போன்ற இடையுறுகள் எழுந்தாலும், இன்று கான்றோரின் கணக்கோட்பாடு கணிதத்தில் மிகவும் பயன்படுகிறது. மேலும் பலதுறைகளில் கருத்துருகளையும் ஆராய்ச்சியின் முடிவுகளையும் கணக்கோட்பாட்டால் விளக்குகின்றோம்.