படலம் 10

நேர்க்கோடுகள்

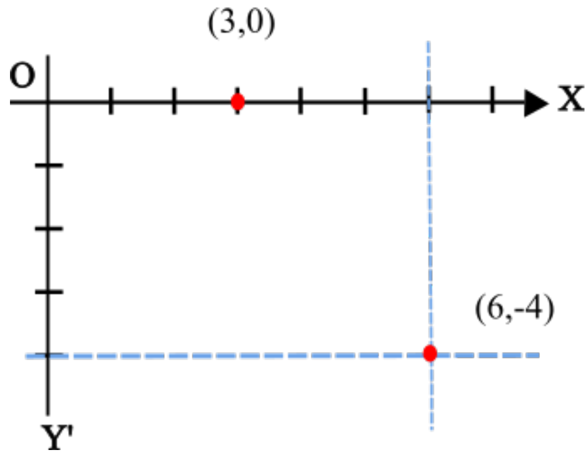
10.1 முன்னுரை

இரினே இடேக்காட்டு (1596-1650)

முந்திய வகுப்புகளில் இருபரிமாண ஒருங்களவுவடி வியலை படித்திருக்கிறீர்கள். அது குறிக்கணிதமும் வடிவியலும் சேர்ந்தது. குறிக் கணிதத்தை பயன்படுத்தி வடிவியலில் அமைமுறையான ஆய்வறிதலை மேற்கொண்ட வர் புகழ்பெற்ற பிரான்சிய தத்துவரும் கணிதருமான இரினே இடேக்காட்டு. இவர் 1637 இல் வடிவியல் என்ற ஒரு நூலை வெளியிட்டார். இந்த நூல் ஒரு வளைவரையின் சமன்பாடு என்ற கருத்துவத்தை அறிமுகமாக்கி பகுப்பாய்வு முறைகளை வடிவியலின் ஆய்வறிதலில் புகுத்தியது. இவ்வாறு இணைந்த பகுப்பாய்வை யும் வடிவியலையும் இப்போது பகுப்பாய்வுவடிவியல் என்கிறோம். முந்தைய வகுப்புகளில் நாம் ஒருங்களவுவடிவியலை தொடங்கியிருக்கிறோம். அங்கு ஒருங்களவச்சு கள், ஒருங்களவுத்தளம், தளத்தில் புள்ளிகளை வரைகோடிடல், இரண்டு புள்ளிகளிடையான தொலைவு, வெட்டுமுக வாய்ப்பாடுகள் இன்ன பிறவற்றை படித்தோம். இந்த கருத்துருக்களெல்லாம் ஒருங்களவுவடிவியலின் அடிப்படைகள்.

முந்தைய வகுப்புகளின் படித்த ஒருங்களவு வடிவியலை சுருக்கமாக மீண்காண்போம். $(6,-4),(3,0)$ ஆகிய புள்ளிகளின் இருப்பிடங் களை படம் 10.1 காட்டுகிறது.

$(6,-4)$ என்ற புள்ளி y அச்சிலிருந்து நேர்ம xஅச்சின் திசையில் 6 அலகுகளான தொலைவிலும் x அச்சிலிருந்து எதிர்ம y அச்சின் திசையில் 4 அலகுகளான தொலைவிலும் இருப்பதை நோக்குக. இதைப்போல், $(3,0)$ என்ற புள்ளி y அச்சிலிருந்து 3 அலகிலும் xஅச்சிலிருந்து 0 தொலைவிலும் உள்ளது.



படம் 10.1

நாம் கீழ்க்காணும் மூன்று முக்கியமான வாய்ப்பாடுகளையும் கற்றிருக்கிறோம்.

(அ) $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ என்ற புள்ளிகளிடை யான தொலைவு

$$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

சான்றாக, $(6,-4),(3,0)$ ஆகியவற்றிடையான தொலைவு $\sqrt{(3-6)^2+(0+4)^2}=\sqrt{9+16}=5$ அலகுகள்

(ஆ) (x_1,y_1) , (x_2,y_2) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை உட்பக்கமாக $m:n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஒருங்களவுகள்

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

சான்றாக, $A(1,-3),B(-3,9)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை உட்பக்கத்தில் $1:3$ விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஒருங்களவுகள்

$$x=\frac{1(-3)+3\times1}{1+3}=0,$$

$$y=\frac{1\times9+3(-3)}{1+3}=0$$

(இ) குறிப்பாக, $m = n$ எனில் $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

(ஈ) (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) ஆகிய உச்சிகளுள்ள முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$$\frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

சான்றாக, $(4,4)$, $(3,-2)$, $(-3,16)$ ஆகிய உச்சிகளுள்ள முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$$\frac{1}{2}|4(-2-16) + 3(16-4) + (-3)(4+2)|$$

$$= \frac{|-54|}{2} = 27$$

குறிப்புரை ABC என்ற முக்கோணத்தின் பரப்பளவு சுழியமெனில், A, B, C ஆகிய மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டில் உள்ளன; அதாவது அவை கோடமைந்தவை.

இந்த படலத்தில் வடிவியலின் மீயெளிய வடிவமான நேர்க்கோட்டின் பண்புகளை ஆய்ந்தறி வதன்மூலம் ஒருங்களவுவடிவியலின் படிப்பை தொடர்வோம். எளிமையாயிருப்பினும், கோடு வடிவியலின் உயிர்மக்கருத்துரு; இது நம் அன்றாட வாழ்விலும் ஆர்வமானதும் பயனுள்ளதுமான மிகப்பல வழிகளில் ஈடுபடுகிறது. கோட்டை குறிக்கணிதவழியில் குறிப்பிடுவது நம் முதன்மை நோக்கம்; இதற்கு *சாய்மை* அதிமுக்கியமானது.

10.2 கோட்டின் சாய்மை

ஒருங்களவுத்தளத்திலுள்ள ஒரு கோடு xஅச்சுடன் இரண்டு கோணங்களை தாங்குகிறது. இவை ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புக்கோணங்கள். l என்ற கோடு x அச்சின் நேர்மத்திசையுடன் தாங்கும் இடஞ்சுழிக்கோணமான θவை கோட்டின் சாய்வு என்கிறோம். $0° \leq \theta \leq 180°$ (படம் 10.2).

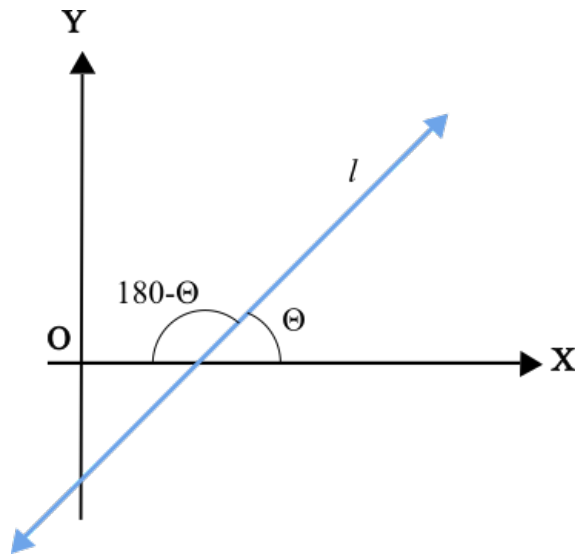
xஅச்சுக்கு இணையான கோடுகளுக்கும் x அச்சுடன் கிடக்கும் கோட்டுக்கும் சாய்வு $0°$ என்பதை நோக்குக. ஒரு நெடுநிற்பக்கோட்டின் (yஅச்சுக்கு இணையானதோ அதனுடன் கிடப்பதோ) சாய்வு $90°$.

வரையறை 1 l என்ற கோட்டின் சாய்வு θ எனில் தொவி θ என்ற அளவை கோட்டின் சாய்மை என்றழைக்கிறோம்.

$90°$ சாய்வுள்ள கோட்டின் சாய்மையை வரையறுக்கவில்லை.

ஒரு கோட்டின் சாய்மையை m என்று குறிக்கிறோம். அதாவது $m =$ தொவி θ , $\theta \neq 90°$.

x அச்சின் சாய்மை சுழியம் என்பதையும் y அச்சின் சாய்மையை வரையறுக்கவில்லை என்பதையும் நோக்குக.



படம் 10.2

10.2.1 கோட்டிலுள்ள இரண்டு புள்ளிகளின் ஒருங்களவுகளிலிருந்து கோட்டின் சாய்மை

ஒரு கோட்டிலுள்ள இரண்டு புள்ளிகளை அறிந்தால் கோட்டை முற்றிலும் தீர்மானிக்கலாம் என்பதை நாம் அறிவோம். எனவே, கோட்டிலுள்ள இரண்டு புள்ளிகளின் ஒருங்களவுகள் தெரிந்தால் கோட்டின் சாய்மையை தீர்மானிக்கலாம்.

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ என்பவை நெடுநிற்ப மல்லாத l என்ற ஒரு கோட்டிலுள்ள இரண்டு புள்ளிகள் என்க. கோட்டின் சாய்வு θ என்க. $x_1 \neq x_2$ என்பது தெளிவு; இல்லாவிட்டால் கோடு y அச்சுக்கு இணையாவதால் சாய்மையை வரையறுக்க வியலாது. கோட்டின் சாய்வு குறுங்கோணமாகவோ விரிகோணமாகவோ இருக்கலாம். இந்த இரண்டு வேற்றுவங்களையும் தனித்தனியே கருதுவோம்.

வேற்றுவம் 1 θ குறுங்கோணம்

படம் 10.3 (அ)வில்

$$\angle MPQ = \theta \qquad (10.1)$$

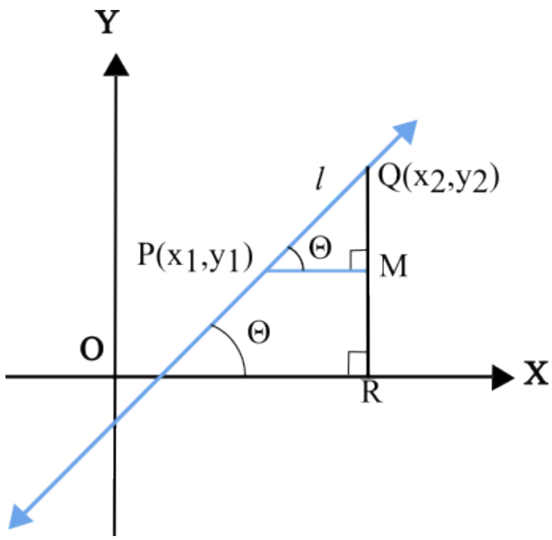
எனவே, l என்ற கோட்டின் சாய்மை, $m =$ தொவி θ. ஆனால், ΔMPQவில்

$$\text{தொவி}\,\theta = \frac{MQ}{MP} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (10.2)$$

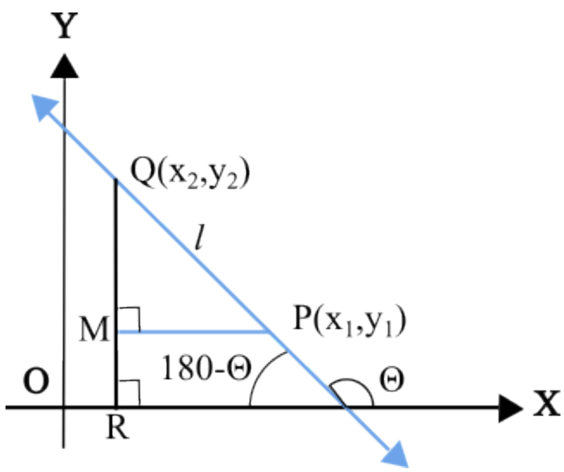
(10.1), (10.2) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

என்று பெறுகிறோம்.



(அ)



(ஆ)

படம் 10.3

வேற்றுவம் 2 θ விரிகோணம்

படம் 10.3(ஆ)வில்

$$\angle MPQ = 180° - \theta$$

எனவே, $\theta = 180° - \angle MPQ$. l என்ற கோட்டின் சாய்மை

$$m = \text{தொவி}\, \theta = \text{தொவி}\, (180° - \angle MPQ)$$
$$= -\text{தொவி}\, \angle MPQ = -\frac{MQ}{MP}$$
$$= -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

எனவே, இரண்டு வேற்றுவங்களிலும் (x_1, y_2), (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளின்வழி செல்லும் கோட்டின் சாய்மை

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

என்று காண்கிறோம்.

10.2.2 கோடுகள் இணையாயிருப்பதற்கும் செங்குத்தாயிருப்பதற்கும் சாய்மையின் தேவைகள்

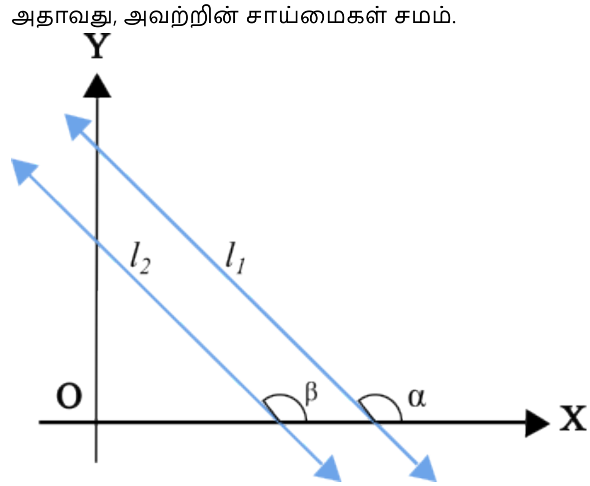
ஒரு ஒருங்களவுத்தளத்தில் l_1 , l_2 என்ற நெடுநிற்பமற்ற கோடுகள் முறையே m_1 , m_2 என்ற சாய்மைகளுடன் இருப்பதாக கொள்வோம். அவற்றின் சாய்வுகள் முறையே α, β என்க.

l_1 l_2க்கு இணையாயிருந்தால் (படம் 10.4), அவற்றின் சாய்வுகள் சமம். அதாவது

$\alpha = \beta,$ எனவே தொவி $\alpha =$ தொவி β ,

$$m_1 = m_2$$

அதாவது, அவற்றின் சாய்மைகள் சமம்.



படம் 10.4

திருப்புக்கூற்றாக, l_1, l_2 என்ற கோடுகளின் சாய்மைகள் சமம் எனில்

$m_1 = m_2,$ தொவி $\alpha =$ தொவி β

தொடுவிச்சார்பனின் பண்பினால் ($0°$ க்கும் $180°$ க்குமிடையில்) $\alpha = \beta$. எனவே கோடுகள் இணையானவை.

நெடுநிற்பமற்ற l_2, l_2 என்ற கோடுகளின் சாய்மைகள் சமம் எனிலும் எனில் மட்டுமேயும் அவை இணையானவை.

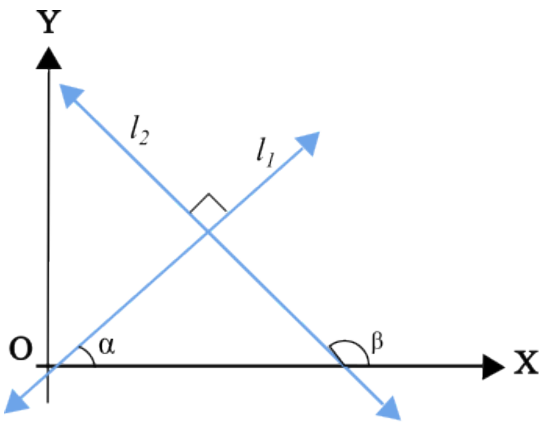
l_1, l_2 என்ற கோடுகள் செங்குத்தானவை எனில் (படம் 10.5), $\beta = \alpha + 90°$. எனவே,

$$\text{தொவி}\, \beta = \text{தொவி}(\alpha + 90°) = -\text{உதொவி}\, \alpha$$
$$= -\frac{1}{\text{தொவி}\, \alpha}$$

அதாவது

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}, \qquad m_1 m_2 = -1$$

திருப்புக்கூற்றாக, $m_1 m_2 = -1$ எனில் தொவி α தொவி $\beta = -1.$ அப்படியெனில் தொவி $\alpha = -$ உதொவி $\beta =$ தொவி$(\beta + 90°)$ ஓ தொவி$(\beta - 90°)$ ஓ. அதாவது αவும் βவும் $90°$யால் வேறுபடுகின்றன. இவ்வாறு, l_1, l_2 என்ற கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை.



படம் 10.5

சில சான்றுகளை காண்போம்.

சான்று 1 கீழ்க்காணும் கோடுகளின் சாய்மைகளை காண்க.

(அ) $(3,-2),(-1,4)$ ஆகிய புள்ளிகளின் வழி செல்வது

(ஆ) $(3,-2),(7,-2)$ ஆகிய புள்ளிகளின் வழி செல்வது

(இ) $(3,-2),(3,4)$ ஆகிய புள்ளிகளின்வழி செல்வது

(ஈ) x அச்சின் நேர்மத்திசையுடன் $60°$ சாய்வுள்ளது

தீர்வு (அ) $(3,-2),(-1,4)$ ஆகியவற்றின்வழி செல்லும் கோட்டின் சாய்மை

$$m = \frac{4-(-2)}{-1-3} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

(ஆ) $(3,-2),(7,-2)$ ஆகியவற்றின்வழி செல்லும் கோட்டின் சாய்மை

$$m = \frac{-2-(-2)}{7-3} = \frac{0}{4} = 0$$

(இ) $(3,-2),(3,4)$ ஆகியவற்றின்வழி செல்லும் கோட்டின் சாய்மை

$$m = \frac{4-(-2)}{3-3} = \frac{6}{0}, \quad \text{வரையறுக்கவில்லை}$$

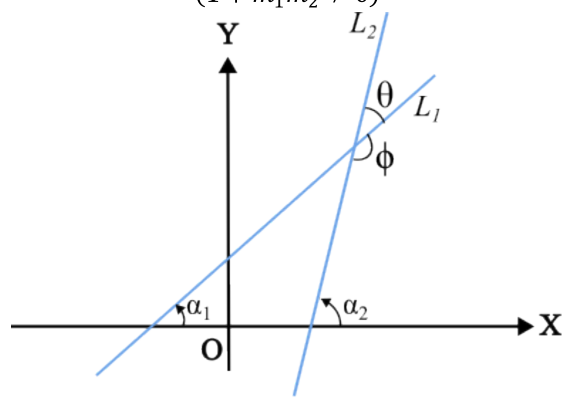
(ஈ) இங்கு கோட்டின் சாய்வு $\alpha = 60°$. எனவே கோட்டின் சாய்மை $m =$ தொவி $60° = \sqrt{3}$.

10.2.3 இரண்டு கோடுகளுக்கிடையான கோணம்

தளத்தில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட கோடுகளை நாம் எண்ணும்போது இவை இணையாகவோ இடைவெட்டுவனவாகவோ இருக்கலாம் என்று காண்கிறோம். இங்கு இரண்டு கோடுகளிடையான கோணத்தை அவற்றின் சாய்மைகளின்வழி காண்போம்.

L_1, L_2 ஆகியவை இரண்டு நெடுநிற்பமற்ற கோடுகள் என்க. அவற்றின் சாய்மைகள் முறையே m_1, m_2 என்க. கோடுகளின் சாய்வுகள் முறையே α_1, α_2 எனில்

$$m_1 = \text{தொவி}\,\alpha_1, \qquad m_2 = \text{தொவி}\,\alpha_2$$
$$(1 + m_1 m_2 \neq 0)$$



படம் 10.6

இரண்டு கோடுகள் ஒன்றுடனொன்று இடைவெட்டும்போது அவை இரண்டு எதிரெதிர்ச் சோடியான கோணங்களை உண்டாக்குகின்றன என்பதையும் இரண்டு அடுத்தடுத்த கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $180°$ என்பதையும் அறிவோம். அடுத்தடுத்த கோணங்களை θ, ϕ என்று குறிப்போம் (படம் 10.6). அப்படியெனில்

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1, \qquad \alpha_1, \alpha_2 \neq 90°$$

எனவே,

$$\text{தொவி}\,\theta = \text{தொவி}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\text{தொவி}\,\alpha_2 - \text{தொவி}\,\alpha_1}{1 + \text{தொவி}\,\alpha_1\,\text{தொவி}\,\alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}, \quad (1 + m_1 m_2 \neq 0)$$

$\phi = 180° - \theta$ என்பதால்

$$\text{தொவி}\,\phi = \text{தொவி}(180° - \theta) = -\,\text{தொவி}\,\theta = -\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

இப்போது இரண்டு வேற்றுவங்கள் எழுகின்றன.

வேற்றுவம் 1 $\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ நேர்மம் எனில்

தொவி θ நேர்மம், தொவி ϕ எதிர்மம். அதாவது θ குறுங்கோணம், ϕ விரிகோணம்.

வேற்றுவம் 2 $\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ எதிர்மம் எனில்

தொவி θ எதிர்மம், ϕ நேர்மம். அதாவது θ விரிகோணம், ϕ குறுங்கோணம்.

எனவே, m_1, m_2 சாய்மைகளுள்ள L_1, L_2 என்ற கோடுகளுக்கிடையான குறுங்கோணங்களை (θ என்க)

$$\text{தொவி}\,\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|, \qquad 1 + m_1 m_2 \neq 0$$

தருகிறது. விரிகோணங்களை (ϕ என்க) $\phi = 180° - \theta$ என்பதால் காணலாம்.

சான்று 2 இரண்டு கோடுகளிடையான கோணம் $\pi/_4$, ஒரு கோட்டின் சாய்மை $1/_2$ எனில் மற்ற கோட்டின் சாய்மையை காண்க.

தீர்வு m_1, m_2 சாய்மைகளுள்ள கோடுகளுக்கிடையான குறுங்கோணமான θவை

$$\text{தொவி}\,\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| \qquad (10.3)$$

தருகிறது என்பதை அறிவோம். இதில் $m_1 = 1/_2, m_2 = m, \theta = \pi/_4$ என்பவற்றை இட்டு

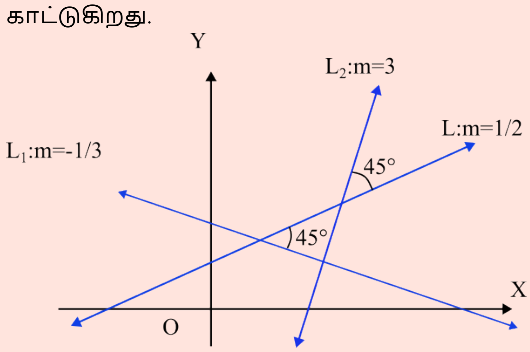
$$\text{தொவி}\,\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m}\right|,$$

$$\text{அதாவது}\; 1 = \left|\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m}\right|$$

என்றும், இதிலிருந்து

$$\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m} = \pm 1$$

என்றும் பெறுகிறோம். எனவே $m = 3, -1/_3$. மற்றக்கோட்டின் சாய்மை 3ஆகவோ $-1/_3$ ஆகவோ இருக்கலாம். இரண்டு விடைகளுக்கான காரணத்தை படம் 10.7 காட்டுகிறது.



படம் 10.7

சான்று 3 $(-2,6),(4,8)$ ஆகிய புள்ளிகளின் வழியான கோடு $(8,12),(x,24)$ ஆகியவற்றின் வழியான கோட்டுக்கு செங்குத்தானது. xஇன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு $(-2,6),(4,8)$ இன்வழிக்கோட்டின் சாய்மை

$$m_1 = \frac{8-6}{4-(-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$(8,12),(x,24)$இன்வழிக்கோட்டின் சாய்மை

$$m_2 = \frac{24-12}{x-8} = \frac{12}{x-8}$$

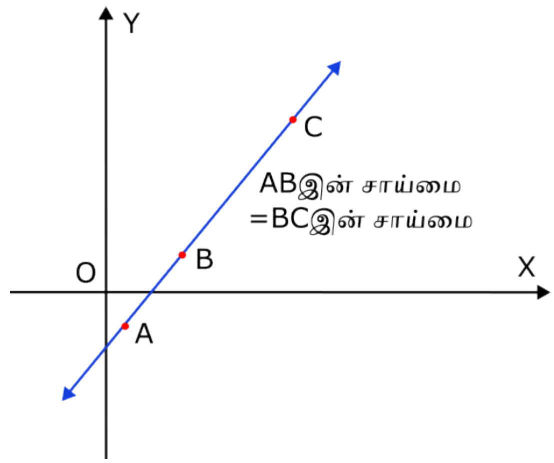
இரண்டு கோடுகளும் செங்குத்தானவை என்பதால், $m_1 m_2 = -1$

$$\frac{1}{3} \times \frac{12}{x-8} = -1, \qquad x = 4$$

என்று தருகிறது.

10.2.4 மூன்று புள்ளிகளின் கோடமைவு

இரண்டு இணைகோடுகளின் சாய்மைகள் சமம் என்றிவோம். ஒரே சாய்மையுள்ள இரண்டு கோடுகள் ஒரு பொதுப்புள்ளியின்வழி சென்றால் இரண்டு கோடுகளும் ஒன்றே. எனவே, xy தளத்திலுள்ள A, B, C ஆகிய புள்ளிகள் கோடமைந்தவை (ஒரே கோட்டில் இருக்கின்றன) எனிலும் எனில் மட்டுமேயும் ABயின் சாய்மை= BCயின் சாய்மை (படம் 10.8).



படம் 10.8

சான்று 4 $P(h,k), Q(x_1,y_1), R(x_2,y_2)$ ஆகிய மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு கோட்டில் உள்ளன. $h - x_1)(y_2 - y_1) = (k - y_1)(x_2 - x_1)$ என்று காட்டுக.

தீர்வு P, Q, R கோடமைந்தவை என்பதால் PQவின் சாய்மை= QRஇன் சாய்மை.

$$\frac{y_1 - k}{x_1 - h} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

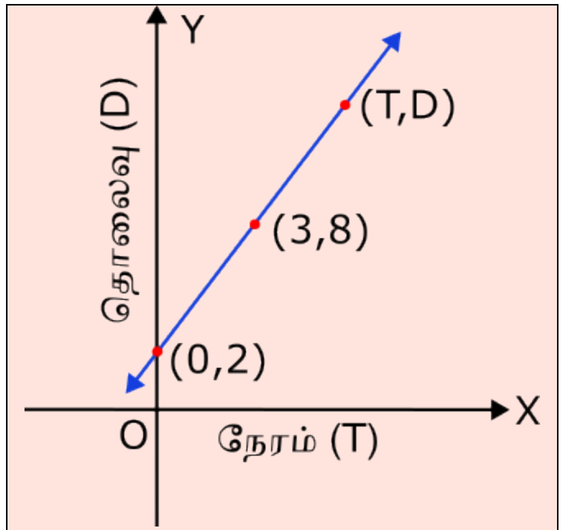
அதாவது $(h - x_1)(y_2 - y_1) = (k - y_1)(x_2 - x_1)$

சான்று 5 படம் 10.9 ஒரு நேரிய அசைவின் நேரத்துக்கெதிரான தொலைவின் படவரைவை காட்டுகிறது. $T = 0, 3$ ஆகிய இரண்டு நேரங்களில் தொலைவுகள் முறையே $D = 2,8$ என்று படம் காட்டுகிறது. சாய்மையின் கருத்துருவை பயன்படுத்தி அசைவின் விதியை, அதாவது தொலைவு நேரத்தை சார்ந்திருக்கும் விதத்தை, காண்க.

தீர்வு கோட்டிலுள்ள ஒரு குறிப்பற்ற புள்ளியை (T, D) என்று குறிப்போம்; இங்கு D தொலைவையும் T நேரத்தையும் குறிக்கின்றன. எனவே $(0,2), (3,8), (T, D)$ ஆகிய புள்ளிகள் கோடமைந்தவை. எனவே

$$\frac{8-2}{3-0} = \frac{D-8}{T-3}, \text{அதாவது}\; 6(T-3) = 3(D-8)$$

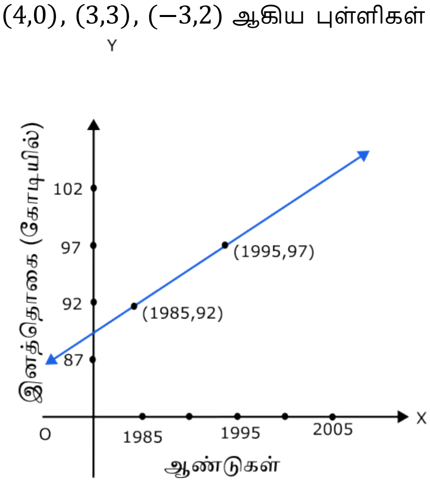
எனவே $D = 2(T+1)$ என்பது நமக்கு வேண்டிய உறவு.



படம் 10.9

பயிற்சி 10.1

1. கார்டீசியத்தளத்தில் $(-4,5)$, $(0,7)$, $(5,-5)$, $(-4,-2)$ என்ற உச்சிகளுள்ள ஒரு நாற்கரத்தை வரைக. அதன் பரப்பளவை காண்க.
2. ஒரு சமப்பக்க முக்கோணத்தின் $2a$ நீளமுள்ள அடிப்பாகம் அதன் நடுப்புள்ளி மூலத்தில் இருக்கும்படி yஅச்சில் இருக்கிறது. முக்கோணத்தின் உச்சிகளை காண்க.
3. $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளிடையான தொலைவை PQ (அ) yஅச்சுக்கு (ஆ) xஅச்சுக்கு இணையாக இருக்கும்போது காண்க.
4. $(7,6)$, $(3,4)$ ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து சமத்தொலைவில் xஅச்சில் உள்ள புள்ளியை காண்க.
5. மூலத்தின்வழியும் $P(0,-4)$, $B(8,0)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளியின்வழியும் செல்லும் கோட்டின் சாய்மையை காண்க.
6. பித்தாகரசின் தேற்றத்தை பயன்படுத்தாமல் (4.4), $(3,5)$, $(-1,-1)$ ஆகிய புள்ளிகள் ஒரு செங்கோணமுக்கோணத்தின் உச்சிகள் என்று காட்டுக.
7. y அச்சின் நேர்மத்திசையிலிருந்து இடஞ்சுழியாக $30°$ கோணத்தை உண்டாக்கும் கோட்டின் சாய்மையை காண்க.
8. $(x,-1)$, $(2,1)$, (4.5) ஆகிய புள்ளிகளை கோடமைவாக்கும் xஇன் மதிப்பை காண்க.
9. தொலைவுவாய்ப்பாட்டை பயன்படுத்தாமல் $(-2,-1)$, $(4,0)$, $(3,3)$, $(-3,2)$ ஆகிய புள்ளிகள் ஒரு இணைகரத்தின் உச்சிகள் என்று காட்டுக.
10. x அச்சுக்கும் $(3,-1)$, $(4,-2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுக்குமுள்ள கோணத்தை காண்க.
11. ஒரு கோட்டின் சாய்மை மற்றொரு கோட்டின் சாய்மையின் இருமடங்கு. அவற்றுக்கிடையான கோணத்தின் தொடுவி $1/3$ எனில் கோடுகளின் சாய்மைகளை காண்க.
12. ஒரு கோடு (x_1, y_1) இன்வழியும் (h,k) இன்வழியும் செல்கிறது. கோட்டின் சாய்மை m எனில் $k - y_1 = m(h - x_1)$ என்று காட்டுக.
13. $(h,0)$, (a,b), $(0,k)$ ஆகியவை ஒரு கோட்டில் கிடந்தால் $a/h + b/k = 1$ என்று காட்டுக.
14. அருகிலுள்ள ஆண்டுக்கெதிராக இனத்தொகையின் வரைபடத்தை (படம் 10.10) பார்க்க. AB என்ற கோட்டின் சாய்மையை காண்க. அதை பயன்படுத்தி 2010 ஆம் ஆண்டின் இனத்தொகை என்னவாயிருக்கும் என்று காண்க.



படம் 10.10

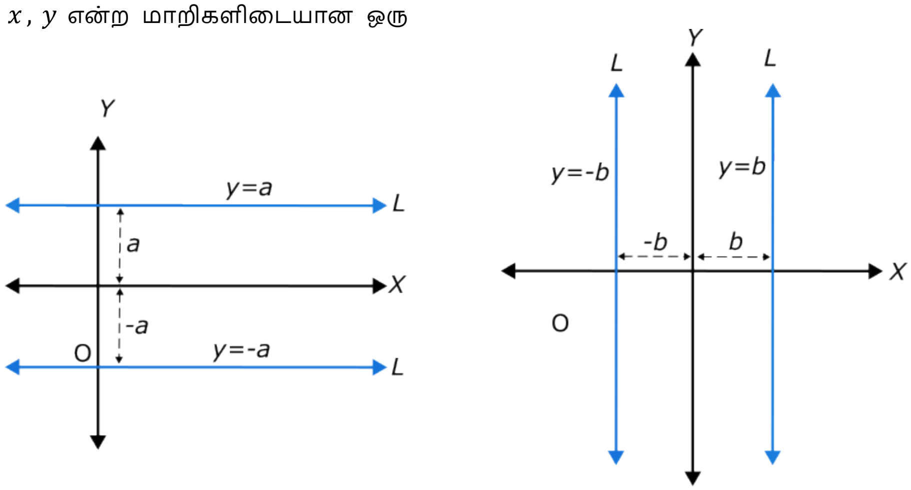
10.3 கோட்டுச்சமன்பாட்டின் வெவ்வேறு வடிவங்கள்

ஒரு தளத்திலுள்ள கோட்டில் முடிவிலி புள்ளிகள் இருப்பதை நாமறிவோம். கோட்டுக்கும் புள்ளிகளுக்குமிடையான இந்த உறவு கீழ்க்காணும் சிக்கலை தீர்க்க உதவுகிறது.

ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி ஒரு குறிப்பிட்ட கோட்டில் கிடக்கிறது என்பதை எவ்வாறு சொல்லலாம்? ஒரு குறிப்பிட்ட கோட்டுக்கு அதன்மீதுள்ள புள்ளிகளுக்கான ஒரு திட்டவட்டமான விதி இருக்கவேண்டும் என்பதே இதன் விடையாகலாம். xy தளத்தில் P ஒரு குறிப்பற்ற புள்ளி எனவும் L ஒரு கோடு எனவும் கொள்க. L இன் சமன்பாட்டைப்பெற P கோட்டிலிருக்கும்போது மெய்யாகவும் இல்லாமலிருக்கும்போது பொய்யாகவும் ஆகும் ஒரு கூற்றை கட்டுமானிக்க விரும்புகிறோம். இந்த கூற்று x, y என்ற மாறிகளிடையான ஒரு குறிக்கணிதச்சமன்பாடு. இப்போது கோட்டின் சமன்பாட்டை வெவ்வேறு நிலைமைகளில் உரையாற்றுவோம்.

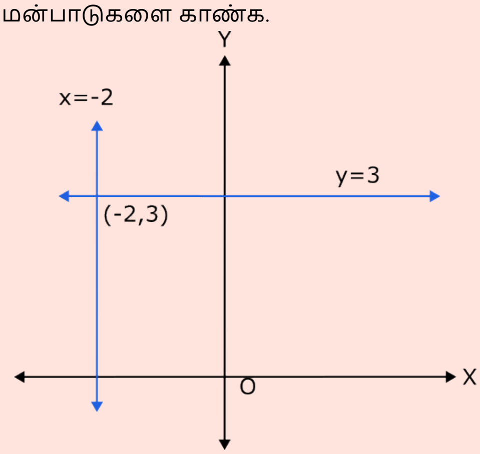
10.3.1 கிடைமட்டக்கோடுகளும் நெடுநிற்பக்கோடுகளும்

L என்ற ஒரு கிடைமட்டக்கோடு y அச்சிலிருந்து a தொலைவில் இருந்தால் கோட்டிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியின் குத்தளவும் $y = a$ என்றோ $y = -a$ என்றோ இருக்கவேண்டும் (படம் 10.11(அ)). குறியின் தேர்வு கோடு y அச்சுக்கு மேலுள்ளதா கீழுள்ளதா என்பதை சார்ந்தது. இதைப்போல், y அச்சிலிருந்து b தொலைவிலுள்ள ஒரு நெடுநிற்பக்கோட்டின் சமன்பாடு $x = b$ என்றோ $x = -b$ என்றோ இருக்கவேண்டும் (படம் 10.11(ஆ)).



படம் 10.11

சான்று 6 அச்சுகளுக்கு இணையாகவும் $(-2, 3)$இன்வழியும் செல்லும் கோடுகளின் சமன்பாடுகளை காண்க.



படம் 10.12

தீர்வு கோடுகளின் இருப்பிடங்களை படம் 10.12 காட்டுகிறது. x அச்சுக்கு இணையான கோட்டின் ஒவ்வொரு புள்ளியின் yஒருங்களவு 3; எனவே, x அச்சுக்கு இணையாகவும் $(-2, 3)$ இன்வழியும் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $y = 3$. இதைப்போல், yஅச்சுக்கு இணையாகவும் $(-2, 3)$இன்வழியும் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $x = -2$.

10.3.2 புள்ளிச்சாய்மைவடிவம்

நெடுநிற்பமற்றதும் m சாய்மையுள்ளதுமான L என்ற ஒரு கோட்டில் $P_0(x_0, y_0)$ ஒரு நிலையான புள்ளி என்க. $P(x, y)$ கோட்டிலுள்ள ஒரு குறிப்பற்ற புள்ளி என்க (படம் 10.13).

அப்படியெனில், வரையறையின்படி Lஇன் சாய்மை

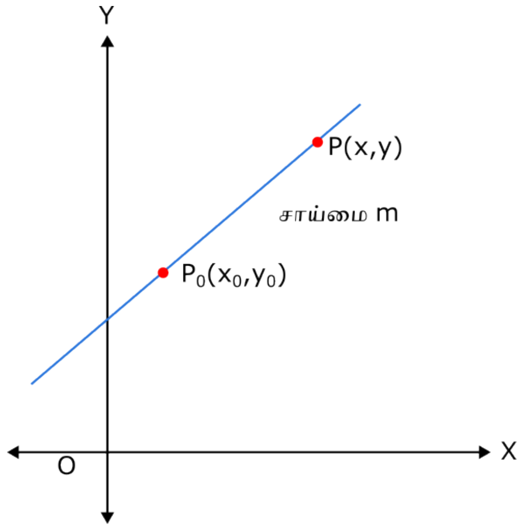
$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}, \quad \text{அதாவது}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad (10.4)$$

$P_0(x_0, y_0)$ என்ற நிலையான புள்ளி கோட்டிலுள்ளபோது, கோட்டிலுள்ள (x, y) என்ற

எந்தப்புள்ளியும் (10.4) ஆம் சமன்பாட்டை நிறைவேற்றுவதாலும் கோட்டில் இல்லாத புள்ளி நிறைவேற்றாததாலும் இந்த சமன்பாடு L என்ற கோட்டின் சமன்பாடு.

இவ்வாறு, $y - y_0 = m(x - x_0)$ எனிலும் எனில் மட்டுமேயும் (x_0, y_0) என்ற புள்ளியின்வழி செல்வதும் m சாய்மையுள்ளதுமான கோட்டில் (x, y) என்ற புள்ளி இருக்கிறது.



படம் 10.13

சான்று 7 $(-2,3)$ இன்வழி செல்லும் -4 சாய்மையுள்ள கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு இங்கு $m = -4$: புள்ளி $(x_0, y_0) = (-2,3)$. (10.4) ஆம் சமன்பாடான புள்ளிச்சாய்மை வாய்ப்பாட்டால், $y - 3 = -4(x + 2)$, அதாவது $4x + y + 5 = 0$ என்பது நமக்குத்தேவையான சமன்பாடு.

10.3.3 இருபுள்ளிவடிவம்

L என்ற கோடு $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ என்ற இரண்டு புள்ளிகளின்வழி செல்வதாக கொள்வோம். L இலுள்ள ஒரு பொதுவான புள்ளியை $P(x, y)$ என்க (படம் 10.14).

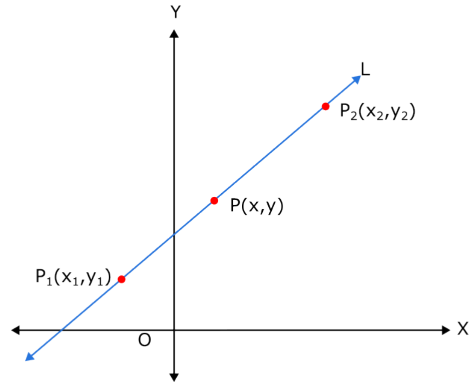
P_1, P_2, P_3 ஆகிய மூன்று புள்ளிகளும் கோடமைந்தவை என்பதால் P_1P_2இன் சாய்மை= P_2P_3இன் சாய்மை.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

அதாவது $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

எனவே, $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளின்வழி செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad (10.5)$$



படம் 10.14

சான்று 8 $(1, -1), (3, 5)$ ஆகியவற்றின்வழி செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

தீர்வு இங்கு $x_1 = 1, y_1 = -1, x_2 = 3, y_2 = 5$. இருபுள்ளிவடிவமான (10.5)ஆம் சமன்பாட்டை பயன்படுத்தி

$$y - (-1) = \frac{5 - (-1)}{3 - 1}(x - 1),$$

அதாவது $-3x + y + 4 = 0$

என்று தேவையான சமன்பாட்டை பெறுகிறோம்.

10.3.4 சாய்மைவெட்டுத்துண்டுவடிவம்

சில நேரங்களில் ஒரு கோட்டின் சாய்மையையும் அது ஒரு அச்சை வெட்டும் தொலைவையும் அறிவோம். இவ்வாறான கோடுகளின் சமன்பாடுகளை இப்போது காண்போம்.

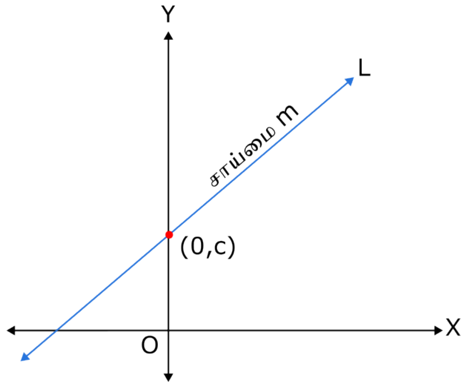
வேற்றுவம் 1 m சாய்மையுள்ள ஒரு கோடு மூலத்திலிருந்து c தொலைவில் y அச்சை வெட்டுகிறது என்க (படம் 10.15). c என்ற தொலைவை L என்ற கோட்டின் y வெட்டுத்துண்டு என்கிறோம். கோடு y அச்சை சந்திக்கும் புள்ளியின் ஒருங்களவுகள் $(0, c)$ என்பது தெளிவு. இவ்வாறு, L நிலையான $(0, c)$ என்ற புள்ளிவழி செல்லும் m சாய்மையுள்ள ஒரு கோடு. புள்ளிச்சாய்மை வடிவத்திலிருந்து கோட்டின் சமன்பாட்டை

$y - c = m(x - 0)$, அதாவது $y = mx + c$

என்று பெறுகிறோம். எனவே,

$$y = mx + c \qquad (10.6)$$

எனிலும் எனில்மட்டுமேயும் (x, y) என்ற புள்ளி m சாய்மையும் c yவெட்டுத்துண்டுமுள்ள கோட்டில் இருக்கிறது. c நேர்மமாகவோ எதிர்மமாகவோ இருப்பது வெட்டுத்துண்டு yஅச்சின் நேர்மப்பக்கத்தில் இருக்கிறதா எதிர்மப் பக்கத்தில் இருக்கிறதா என்பதை சார்ந்தது.



படம் 10.15

வேற்றுவம் 2 m சாய்மையுள்ள கோடு x அச்சுடன் d வெட்டுத்துண்டை உண்டாக்குகிறது என்க. அப்போது L இன் சமன்பாடு

$$y = m(x - d) \qquad (10.7)$$

மாணவர்கள் இதை 1 ஆம் வேற்றுவத்தில் நாம் பயன்படுத்திய முறையை பின்பற்றி வருவிக்கலாம்.

சான்று 9 ஒரு கோட்டின் சாய்வு θ என்றும் தொவி $\theta = 1/2$ என்றும் (அ) y வெட்டுத்துண்டு $-3/2$ (ஆ) x வெட்டுத்துண்டு 4 என்றும் இருக்கும்போது கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

தீர்வு (அ) இங்கு கோட்டின் சாய்மை $m =$ தொவி $\theta = 1/2$; y வெட்டுத்துண்டு $c = -3/2$. எனவே, சாய்மைவெட்டுத்துண்டுவடிவமான (10.6) ஆம் சமன்பாட்டின்படி, கோட்டின் சமன்பாடு

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}, \qquad \text{அதாவது } 2y - x + 3 = 0$$

(ஆ) இங்கு, $m =$ தொவி $\theta = {}^{1}/_{2}, d = 4$. எனவே, (10.7) ஆம் சமன்பாடான சாய்மை வெட்டுத்துண்டுவடிவத்தின்படி, கோட்டின் சமன்பாடு

$$y = \frac{1}{2}(x - 4), \qquad \text{அதாவது } 2y - x + 4 = 0$$

10.3.5 வெட்டுத்துண்டுவடிவம்

L என்ற கோடு a என்ற x வெட்டுத்துண்டையும் b என்ற y வெட்டுத்துண்டையும் உண்டாக்குகிறது என்க. கோடு x அச்சை $(a, 0)$த்திலும் y அச்சை $(0, b)$யிலும் சந்திப்பது தெளிவு. கோட்டுச்சமன் பாட்டின் இருபுள்ளிவடிவத்தால்

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a),$$

$$\text{அதாவது } ay = -bx + ab, \qquad \text{அதாவது } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

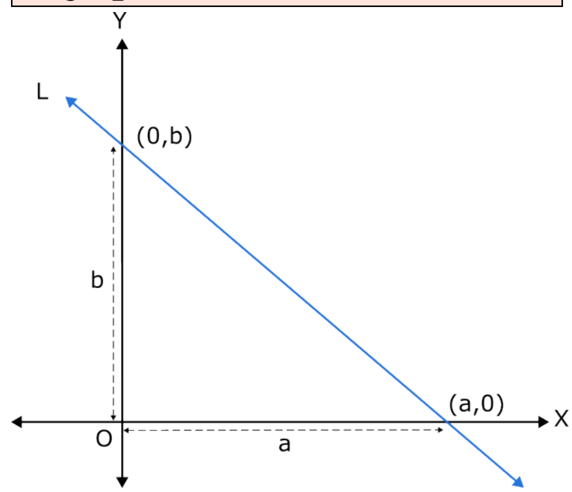
எனவே, xஅச்சிலும் yஅச்சிலும் முறையே a, b வெட்டுத்துண்டுகளை உண்டாக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (10.8)$$

சான்று 10 x, y அச்சுகளின் முறையே -3, 2 வெட்டுத்துண்டுகளை உண்டாக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு இங்கு $a = -3$, $b = 2$. (10.8) ஆம் சமன்பாடான வெட்டுத்துண்டுவடிவத்தால் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1, \qquad \text{அதாவது } 2x - 3y + 6 = 0$$



படம் 10.16

10.3.6 செங்கோட்டுவடிவம்

கீழ்க்காணும் தரவுகளால் ஒரு நெடுநிற்பமற்ற கோட்டை அறிகிறோம் என்க.

(அ) மூலத்திலிருந்து கோட்டுக்கான செங்கோட்டின் நீளம்

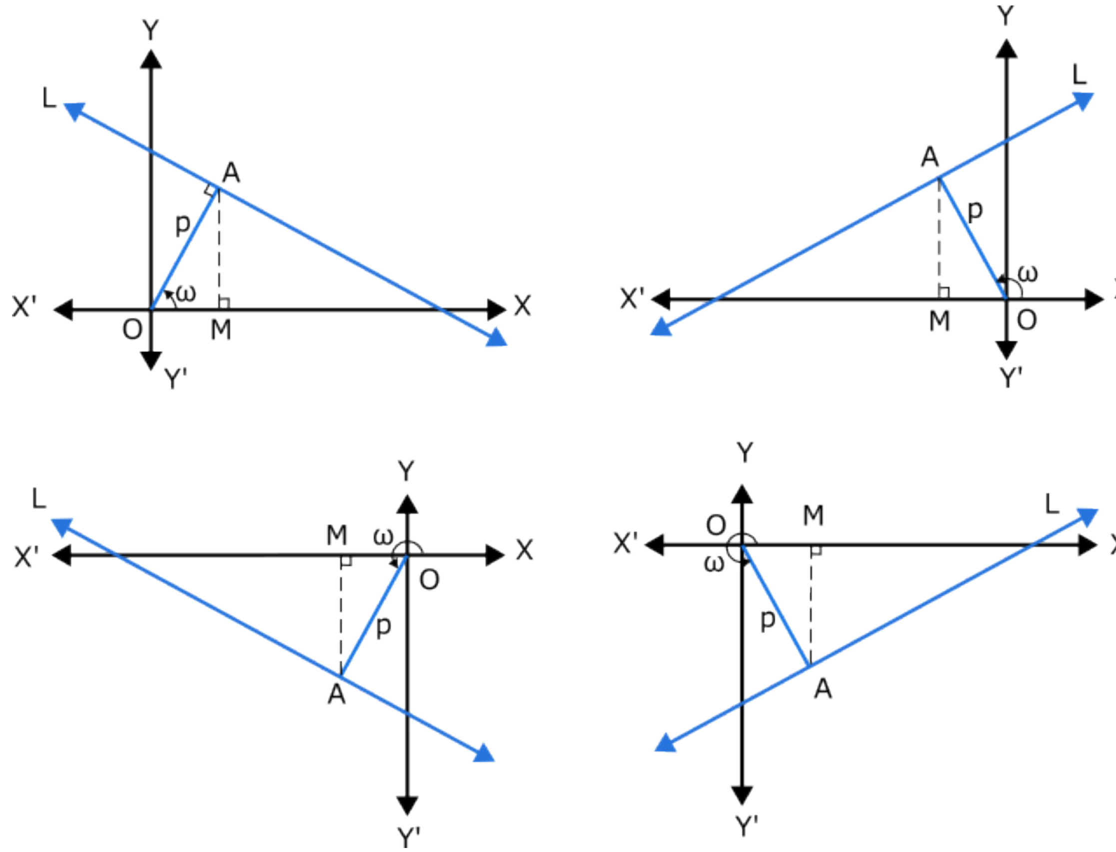
(ஆ) செங்கோடு நேர்ம x அச்சுடன் தாங்கும் கோணம்

O என்ற மூலத்திலிருந்து L என்ற கோட்டின் செங்குத்துத்தொலைவு $OA = p$ என்க. OAவுக்கும் நேர்ம x அச்சுக்குமுள்ள கோணம் $\angle XOA = \omega$ என்க. காருட்டீசியத்தளத்தில் L இன் சாத்தியமான இருப்பிடங்களை படம் 10.17 காட்டுகிறது. இப்போது நம் குறிக்கோள் L இன் சாய்மையை கண்டுபிடித்து அதன்மீது ஒரு புள்ளியை தேர்வது. இதற்காக ஒவ்வொரு வேற்றுவத்திலும் x அச்சுக்கு AM என்ற செங்குத்துக்கோட்டை வரைக.

ஒவ்வொரு வேற்றுவத்திலும் $OM = p$ உவவி ω, $MA = p$ வவி ω என்று பெறுகிறோம். இதனால், Aயின் ஒருங்களவுகள் (p உவவி ω, p வவி ω). மேலும், L என்ற கோடு OAவுக்கு செங்குத்தானது என்பதால்

$$L\text{இன் சாய்மை} = -\frac{1}{OA\text{வின் சாய்மை}}$$

$$= -\frac{1}{\text{தொவி } \omega} = -\frac{\text{உவவி } \omega}{\text{வவி } \omega}$$



படம் 10.17

இவ்வாறு, L என்ற கோட்டின் சாய்மை

$$-\frac{\text{உவவி}\,\omega}{\text{வவி}\,\omega}$$

என்றும், $A(p\,\text{உவவி}\,\omega\,, p\,\text{வவி}\,\omega)$ என்ற புள்ளி L இல் இருப்பதையும் அறிகிறோம். எனவே, புள்ளிச் சாய்மைவடிவத்தால் Lஇன் சமன்பாடு

$$y - p\,\text{வவி}\,\omega = -\frac{\text{உவவி}\,\omega}{\text{வவி}\,\omega}(x - p\,\text{உவவி}\,\omega),$$

அதாவது $x\,\text{உவவி}\,\omega + y\,\text{வவி}\,\omega = p.$

எனவே, மூலத்திலிருந்து p செங்கோட்டுத் தொலைவும் x அச்சுடன் ω செங்கோட்டுக் கோணமும் உள்ள ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு

$$x\,\text{உவவி}\,\omega + y\,\text{வவி}\,\omega = p \qquad (10.9)$$

சான்று 11 மூலத்திலிருந்து 4 அலகுகள் செங்குத்துத்தொலைவும் நேர்ம x அச்சுடன் $15°$ கோணத்தில் செங்கோடும் உள்ள கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு இங்கு $p = 4, \omega = 15°$ (படம் 10.18).

$$\text{உவவி}\,15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

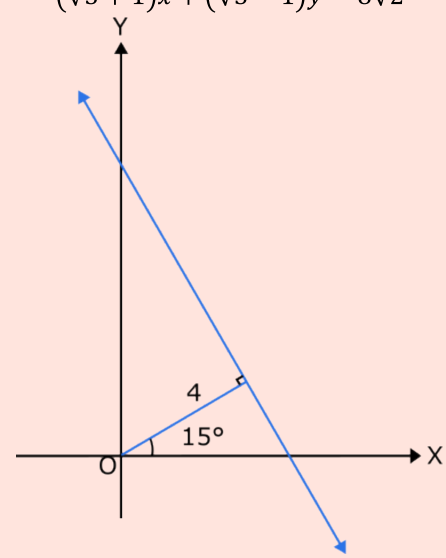
$$\text{வவி}\,15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \text{ (எவ்வாறு?)}$$

செங்கோட்டுவாய்ப்பாடான (10.9) ஆம் சமன்பாட் டின்படி, கோட்டின் சமன்பாடு

$$x\,\text{உவவி}\,15° + y\,\text{வவி}\,15° = 4$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}y = 4,$$

$$(\sqrt{3}+1)x + (\sqrt{3}-1)y = 8\sqrt{2}$$



படம் 10.18

சான்று 12 வெப்பநிலையின் பாரனைட்டள வமும் (F) ஒப்பிலாவளவமும் (K) ஒரு நேரியச்சமன்பாட்டை நிறைவுசெய்கின்றன. $F = 32$ என்றபோது $K = 273$, $F = 212$ என்றபோது $K = 373$ என்ற தரவுகளிலிருந்து Kயை Fஇன்வழி உரைக்க. $K = 0$ என்றபோது Fஇன் மதிப்பு என்ன?

தீர்வு Fஐ xஅச்சிலும் Kஐ yஅச்சிலும் வைத்து $(32, 273)$, $(212, 373)$ என்ற இரண்டு புள்ளிகளை பெறுகிறோம். இருபுள்ளி வடிவத்திலிருந்து (F, K) என்ற புள்ளி

$$K - 272 = \frac{373 - 273}{212 - 32}(F - 32)$$

$$K - 273 = \frac{100}{180}(F - 32)$$

என்ற சமன்பாட்டை நிறைவுசெய்கிறது. அதாவது

$$K = \frac{5}{9}(F - 32) + 273 \qquad (10.10)$$

என்பது நமக்கு வேண்டிய சமன்பாடு. $K = 0$ என்றபோது இந்த சமன்பாடு தருவது

$$0 = \frac{5}{9}(F - 32) + 273$$

$$F - 32 = -273 \times \frac{9}{5} = -491.4$$

$$F = -459.4$$

மற்றொரு முறை கோட்டுச்சமன்பாட்டின் மீயெளிய வடிவம் $y = mx + c$ என்பதை அறிவோம். இங்கும், Fஐ xஅச்சிலும் Kஐ yஅச்சிலும் வைத்து

$$K = mF + c \qquad (10.11)$$

என்ற வடிவில் சமன்பாட்டை காணலாம். இந்த சமன்பாட்டை $(32, 273)$, $(212, 373)$ என்ற புள்ளிகள் நிறைவேற்றுகின்றன. எனவே

$$273 = 32m + c \qquad (10.12)$$

$$373 = 212m + c \qquad (10.13)$$

(10.12)ஐயும் (10.13)ஐயும் தீர்த்து

$$m = \frac{5}{9}, \qquad c = \frac{2297}{9}$$

என்று பெறுகிறோம். இந்த mஇன் மதிப்பையும் cயின் மதிப்பையும் (10.11)இல் இட்டு

$$K = \frac{5}{9}F + \frac{2297}{9} \qquad (10.14)$$

என்ற நமக்கு தேவையான சமன்பாட்டை பெறுகிறோம். $K = 0$ என்றபோது, $F = -459.4$ என்று (10.14)ஆம் சமன்பாடு தருகிறது.

குறிப்பு $y = mx + c$ என்ற சமன்பாட்டில் m, c என்ற இரண்டு மாறிலிகள் உள்ளன. இந்த இரண்டு மாறிலிகளையும் காண கோட்டின் சமன்பாடு நிறைவேற்றும் இரண்டு நிலைமைகள் தேவை. மேற்கண்ட எல்லா சான்றுகளிலும் கோட்டுச் சமன்பாட்டை தீர்மானிக்க இரண்டு தரவுகளை பயன்படுத்தினோம் என்பதை நோக்குக.

பயிற்சி 10.2

1இலிருந்து 8வரையான பயிற்சிகளில் கொடுக்கப்பட்ட நிலைமைகளை நிறைவேற்றும் கோட்டின் சமன்பாடுகளை காண்க.

1. xஅச்சுக்கும் yஅச்சுக்குமான சமன்பாடுகளை எழுதுக.
2. $(-4,3)$இன்வழி செல்லும் $1/2$ சாய்மையுள்ளது
3. $(0,0)$இன்வழி செல்லும் m சாய்மையுள்ளது
4. $(2, 2\sqrt{3})$இன்வழி செல்வதும் xஅச்சுடன் $75°$ சாய்வுள்ளதும்
5. x அச்சை மூலத்தின் இடப்பக்கத்தில் 3 அலகு தொலைவில் வெட்டுவதும் -2 சாய்மையுள்ளதும்
6. y அச்சை மூலத்தின் மேற்பக்கத்தில் 2 அலகு தொலைவில் வெட்டுவதும் x அச்சின் நேர்மத்திசையுடன் $30°$ கோணத்தை உண்டாக்குவதும்
7. $(-1,1)$, $(2,-4)$ ஆகிய புள்ளிகளின்வழி செல்வது
8. மூலத்திலிருந்து செங்கோட்டுத்தொலைவு 5 அலகுள்ளதும் செங்கோட்டுக்கும் நேர்ம xஅச்சுக்குமிடையான கோணம் $30°$ உள்ளதும்
9. ΔPQRஇன் உச்சிகள் $P(2,1)$, $Q(-2,3)$, $R(4,5)$ ஆகியவை. R என்ற உச்சியின்வழி செல்லும் நடுமத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.
10. $(-3,5)$ இன்வழி செல்வதும் $(2,5)$, $(-3,6)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுக்கு செங்குத்தானதுமான கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.
11. $(1,0)$, $(2,3)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை $1:n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் செங்குத்துக்கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.
12. ஒருங்களவச்சுகளில் சமமான வெட்டுத்துண்டுகளை உண்டாக்குவதும் $(2,3)$ என்ற புள்ளியின்வழி செல்வதுமான கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.
13. $(2,2)$ இன்வழி செல்லும் ஒரு கோடு அச்சுகளில் உண்டாக்கும் வெட்டுத்துண்டுகளின் கூட்டுத்தொகை 9. கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.

14. $(0,2)$ இன்வழி செல்வதும் நேர்ம x அச்சுடன் $2\pi/3$ கோணத்தை உண்டாக்குவதுமான கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க. அதற்கு இணையானதும் மூலத்தின்கீழ் 2 அலகு தொலைவில் yஅச்சை கடப்பதுமான கோட்டின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

15. மூலத்திலிருந்து ஒரு கோட்டுக்கு வரைந்த செங்கோடு கோட்டை $(-2,9)$ இல் சந்திக்கிறது. கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.

16. ஒரு செம்புக்கம்பியின் நீளமான L அதன் செல்சியசுவெப்பநிலையின் (C) நேரியச்சார்பன். ஒரு பரிசோதனையில், $C = 20$ எனும்போது $L = 124.942$ ஆகவும் $C = 110$ என்றபோது $L = 125.134$ஆகவும் இருந்தது. Lஐ Cயின்வழி உரைக்க.

17. ஒரு பாலங்காடியின் உரிமையாளர் இலிட்டருக்கு ₹16 என்ற விலையில் ஒரு வாரத்துக்கு 980 இலிட்டர் பாலை விற்கலாம் என்றும், ₹14 என்ற விலையில் ஒரு வாரத்துக்கு 1220 இலிட்டர் பாலை விற்கலாம் என்றும் காண்கிறார். விலைக்கும் விற்பனைக்கும் ஒரு நேரிய உறவை எடுகொண்டு ₹17 விலையில் வாரத்துக்கு எத்தனை இலிட்டரை விற்கலாம் எனக்காண்க.

18. அச்சுகளிடையான ஒரு கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி (a, b). கோட்டின் சமன்பாடு $x/a + y/b = 2$ எனக்காட்டுக.

19. $R(h, k)$ என்ற புள்ளி அச்சுகளிடையான கோட்டுத்துண்டை $1:2$ விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.

20. கோட்டின் சமன்பாடு என்ற கருத்துருவை பயன்படுத்தி $(3,0)$, $(-2,-2)$, $(8,2)$ ஆகிய புள்ளிகள் கோடமைந்தவை என்று நிறுவுக.

10.4 கோட்டின் பொதுச்சமன்பாடு

முந்திய வகுப்புகளில் இரண்டு மாறிகளில் ஒற்றையடுக்கெண்ணுள்ள $Ax + By + C = 0$ என்ற பொதுச்சமன்பாடுகளை படித்தோம்; இங்கு A, B, C ஆகியவை மெய்யெண்மாறிலிகள்: A யும் B யும் ஒரேநேரத்தில் சுழியமாகவில்லை. $Ax + By + C = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் வளைவரை எப்போதும் நேர்க்கோடு. எனவே, A யும் B யும் ஒரே நேரத்தில் சுழியமாகாதபோது $Ax + By + C = 0$ என்ற சமன்பாட்டை பொதுவான நேரியச்சமன்பாடு என்றோ பொதுவான கோட்டுச்சமன்பாடு என்றோ அழைக்கிறோம்.

10.4.1 $Ax + By + C = 0$இன் வெவ்வேறு வடிவங்கள்

கோட்டின் பொதுச்சமன்பாட்டை கீழ்க் காணும் செய்முறைகளால் கோட்டுச்சமன்பாட்டின் வெவ்வேறு வடிவங்களாக குறைக்கலாம்.

(அ) சாய்மைவெட்டுத்துண்டுவடிவம் $B \neq 0$ எனில் $Ax + By + C = 0$ என்பதை

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}, \quad \text{அதாவது } y = m + c \quad (10.15)$$

என்று எழுதலாம்; இங்கு

$$m = -\frac{A}{B}, \qquad c = -\frac{C}{B}$$

(10.15)ஆம் சமன்பாடு $-A/B$ சாய்மையும் $-C/B$ y வெட்டுத்துண்டுமுள்ள கோட்டின் சாய்மை வெட்டுத்துண்டுவடிவம் என்றறிவோம்.

$B = 0$ எனில் $x = -C/A$; இது ஒரு நெடுநிற்பக்கோடு. இதன் சாய்மையை வரையறுக்கவியலாது; xவெட்டுத்துண்டு $-C/A$.

(ஆ) வெட்டுத்துண்டுவடிவம் $C \neq 0$ எனில் $Ax + By + C = 0$ என்பதை

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1, \qquad \text{அதாவது}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad \text{இங்கு } a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B} \quad (10.16)$$

(10.16)ஆம் சமன்பாடு xவெட்டுத்துண்டு $-C/A$ உம் yவெட்டுத்துண்டு $-C/B$உமுள்ள கோட்டின் வெட்டுத்துண்டுவடிவம் என்றறிவோம்.

$C = 0$ எனில் $Ax + By + C = 0$ஐ $Ax + By = 0$ என்று எழுதலாம். இது மூலத்தின்வழி செல்லும் கோடு. எனவே அச்சுகளில் சுழிய வெட்டுத்துண்டுகளுள்ள கோடு.

(இ) செங்கோட்டுவடிவம் $Ax + By + C = 0$ என்ற கோட்டின் (அதாவது, $Ax + By = -C$ என்ற கோட்டின்) செங்கோட்டு வடிவம் x உவவி $\omega + y$ வவி $\omega = p$ என்க. அப்படியெனில், இரண்டு சமன்பாடுகளையும் ஒப்பிட்டு

$$\frac{A}{\text{உவவி } \omega} = \frac{B}{\text{வவி } \omega} = -\frac{C}{p}$$

என்று காண்கிறோம். அதாவது

$$\text{உவவி } \omega = -\frac{Ap}{C}, \qquad \text{வவி } \omega = -\frac{Bp}{C}$$

$$\text{வவி}^2\, \omega + \text{உவவி}^2\, \omega = \left(-\frac{Ap}{C}\right)^2 + \left(-\frac{Bp}{C}\right)^2 = 1,$$

$$\text{அதாவது } p^2 = \frac{C^2}{A^2 + B^2}, \qquad p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

எனவே

$$\text{உவவி } \omega = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \qquad \text{வவி } \omega = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

p நேர்மமாகும்படி குறிகளை தேர்ந்து கொள்ளலாம்.

சான்று 13 ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு $3x - 4y + 10 = 0$. அதன் சாய்மை, xவெட்டுத்

துண்டு, yவெட்டுத்துண்டு ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு $3x - 4y + 10 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \qquad (10.17)$$

என்று எழுதலாம். இதை $y = mx + c$ யுடன் ஒப்பிட்டு, கோட்டின் சாய்மை $m = 3/4$ என்றறிகிறோம்.

$3x - 4y + 10 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை

$$3x - 4y = -10, \qquad \frac{x}{-10/3} + \frac{y}{5/2} = 1$$

என்று எழுதலாம். இதை $x/a + y/b = 1$உடன் ஒப்பிட்டு

$$x\text{வெட்டுத்துண்டு } a = -\frac{10}{3}$$

$$y\text{வெட்டுத்துண்டு } = b = \frac{5}{2}$$

என்று காண்கிறோம்.

சான்று 14 $\sqrt{3}x + y - 8 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை செங்கோட்டுவடிவத்துக்கு குறைக்க. p , ω ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை காண்க.

தீர்வு கோட்டின் சமன்பாடு

$$\sqrt{3}x + y - 8 = 0 \qquad (10.18)$$

இதை $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = 2$ஆல் வகுத்து

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 4, \qquad \text{அதாவது}$$

$$\text{உவவி } 30^\circ \; x + \text{வவி } 30^\circ \; y = 4 \qquad (10.19)$$

என்று பெறுகிறோம். இதை x உவவி $\omega + y$ வவி $\omega = p$ யுடன் ஒப்பிட்டு $p = 4, \omega = 30^\circ$ என்று பெறுகிறோம்.

சான்று 15 $y - \sqrt{3}x - 5 = 0$ என்ற கோட்டுக்கும் $\sqrt{3}y - x + 6 = 0$ என்ற கோட்டுக்குமிடையான கோணத்தை காண்க.

தீர்வு முதற்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - \sqrt{3}x - 5 = 0,$$

$$\text{அதாவது } y = \sqrt{3}x + 5 \qquad (10.20)$$

இரண்டாங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\sqrt{3}y - x + 6 = 0,$$

$$\text{அதாவது } y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 2\sqrt{3} \qquad (10.21)$$

முதற்கோட்டின் சாய்மை $m_1 = \sqrt{3}$: இரண்டாங்கோட்டின் சாய்மை $m_2 = 1/\sqrt{3}$. இரண்டு கோடுகளுக்கிடையான குறுங்கோணம் θ எனில்

$$\text{தொவி } \theta = \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} \right| = \left| \frac{1-3}{2\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

இது $\theta = 30^\circ$ என்று தருகிறது. எனவே கோடுகளுக்கிடையான கோணங்கள் 30°யும் $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$யும்.

சான்று 16 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ என்ற கோடும் $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ என்ற கோடும் $(b_1, b_2 \neq 0)$

(அ) $a_1/b_1 = a_2/b_2$ எனில் இணையானவை என்றும் (ஆ) $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ எனில் செங்குத்தானவை என்றும் காட்டுக.

தீர்வு இரண்டு கோடுகளையும் கீழ்க்காணுமாறு எழுதலாம்.

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1} \qquad (10.22)$$

$$y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2} \qquad (10.23)$$

கோடுகளின் சாய்மைகள் முறையே $m_1 = -a_1/b_1, m_2 = -a_2/b_2$.

(அ) $m_1 = m_2$ எனில் கோடுகள் இணையானவை இது தருவது

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}, \qquad \text{அதாவது } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

(ஆ) $m_1m_1 = -1$ எனில் கோடுகள் செங்குத்தானவை. இது தருவது

$$\frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2} = -1,, \qquad \text{அதாவது } a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

சான்று 17 $x - 2y + 3 = 0$ என்ற கோட்டுக்கு செங்குத்தானதும் $(1, -2)$ இன்வழி செல்வதுமான கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு $x - 2y + 3 = 0$ என்ற கோட்டை

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \qquad (10.24)$$

என்று எழுதலாம். இதிலிருந்து கோட்டின் சாய்மையை $m_1 = 1/2$ என்று பெறுகிறோம். எனவே இதற்கு செங்குத்தான கோட்டின் சாய்மை

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -2$$

சாய்மை -2 உள்ளதும் $(1, -2)$ இன்வழி செல்வதுமான கோட்டின் சமன்பாடு

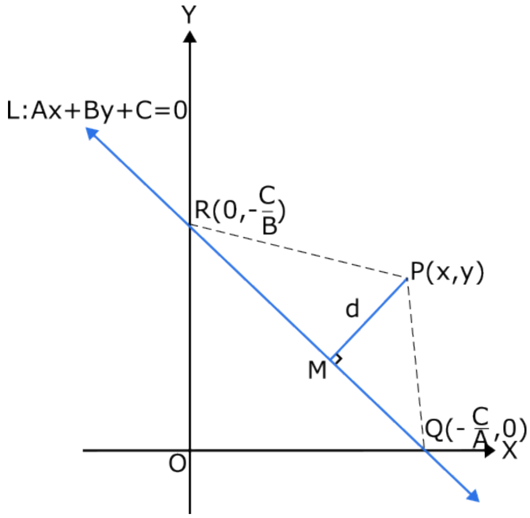
$$y - (-2) = -2(x - 1),$$

$$\text{அதாவது } y = -2x$$

இதுவே நமக்கு வேண்டிய சமன்பாடு.

10.5 ஒரு கோட்டிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தொலைவு

ஒரு கோட்டிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தொலைவு அந்த புள்ளியிலிருந்து கோட்டுக்கு வரைந்த செங்கோணக்கோட்டின் நீளம். $L : Ax + By + C = 0$ ஒரு கோடு என்க. இந்த கோட்டிலிருந்து $P(x_1, y_1)$இன் தொலைவு d என்க. படம் 10.19இல் காட்டியபடி Pயிலிருந்து Lக்கு PM என்ற செங்குத்துக்கோட்டை வரைக.



படம் 10.19

கோடு x, y அச்சுகளை முறையே Q, R என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால், அந்த புள்ளிகளின் ஒருங்களவுகள்

$$Q\left(-\frac{C}{A}, 0\right), \quad R\left(0, -\frac{C}{B}\right)$$

PQR என்ற முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{2} PM\ QR$ என்பதால்

$$PM = \frac{2\ (\varDelta PQR \text{இன் பரப்பளவு})}{QR} \quad (10.25)$$

முக்கோணத்தின் பரப்பளவை அதன் உச்சிகளின் ஒருங்களவுகளிலிருந்தும் கணக்கிடலாம். எனவே,

$$\varDelta PQR \text{இன் பரப்பளவு}$$

$$= \frac{1}{2}\left| x_1\left(0 + \frac{C}{B}\right) + \left(-\frac{C}{A}\right)\left(-\frac{C}{B} - y_1\right) + 0(y_1 - 0) \right|$$

$$= \frac{1}{2}\left| x_1\frac{C}{B} + y_1\frac{C}{A} + \frac{C^2}{AB} \right| = \frac{1}{2}\left|\frac{C}{AB}\right| |Ax_1 + By_1 + C|$$

Q, R ஆகியவற்றின் ஒருங்களவுகளிலிருந்து QRஐயும் கணக்கிடலாம்.

$$QR = \sqrt{\left(0 + \frac{C}{A}\right)^2 + \left(\frac{C}{B} - 0\right)^2} = \left|\frac{C}{AB}\right| \sqrt{A^2 + B^2}$$

இதையும் $\varDelta PQR$இன் பரப்பளவையும் (10.25)ஆம் சமன்பாட்டில் மாற்றிட்டு

$$d = PM = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

என்று பெறுகிறோம்.

இவ்வாறு, (x_1, x_2) என்ற புள்ளியிலிருந்து $Ax + By + C = 0$ என்ற கோட்டின் செங்குத்துத் தொலைவு

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

10.5.1 இரண்டு இணைகோடுகளிடையான தொலைவு

இரண்டு இணைகோடுகளின் சாய்மை சமம் என்பதை அறிவோம். எனவே, இணைகோடுகளை

$$y = mx + c_1 \quad (10.26)$$
$$y = mx + c_2 \quad (10.27)$$

என்று எடுக்கலாம். (10.26)ஆம் சமன்பாடு குறிக்கும் கோடு xஅச்சை படம் 10.20இல் காட்டியபடி

$$A\left(-\frac{c_1}{m}, 0\right)$$

என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது. இரண்டு கோடுகளிடையான தொலைவு Aயிலிருந்து இரண்டாம் கோட்டுக்குள்ள தொலைவு. எனவே, (10.26) என்ற கோட்டுக்கும் (10.27) என்ற கோட்டுக்குமிடையான தொலைவு

$$d = \frac{\left|(-m)\left(-\frac{c_1}{m}\right) + (-c_2)\right|}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{1 + m^2}} \quad (10.28)$$

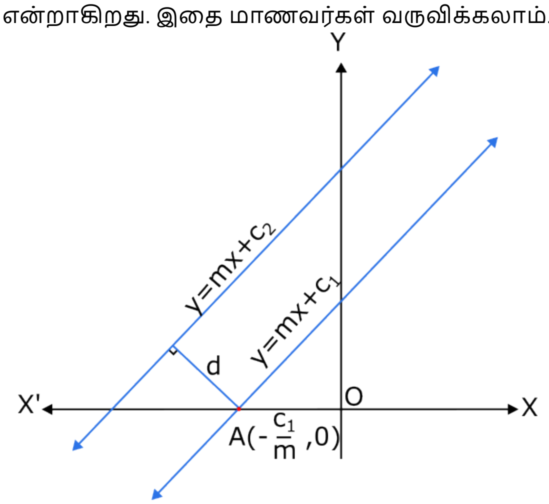
இவ்வாறு, $y = mx + c_1$, $y = mx + c_2$ ஆகிய கோடுகளிடையான தொலைவு

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

கோடுகள் $Ax + By + C_1 = 0$, $Ax + By + C_2 = 0$ என்றவாறு பொதுவடிவத்தில் இருந்தால், மேற்கண்ட வாய்ப்பாடு

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

என்றாகிறது. இதை மாணவர்கள் வருவிக்கலாம்.



படம் 10.20

சான்று 18 $3x - 4y - 26 = 0$ என்ற கோட்டிலிருந்து $(3, -5)$ என்ற புள்ளியின் தொலைவை காண்க.

தீர்வு கோட்டின் சமன்பாடு

$$3x-4y-26=0 \qquad (10.29)$$

இதை கோட்டின் பொதுச்சமன்பாடான $Ax+By+C=0$உடன் ஒப்பிட்டு

$$A=3, B=-4, C=-26$$

என்று காண்கிறோம். புள்ளி $(x_1,y_1)=(3,-5)$. கோட்டிலிருந்து புள்ளியின் தொலைவு

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$=\frac{|3\times 3+(-4)(-5)-26|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{3}{5}$$

சான்று 19 $3x-4y+7=0, 3x-4y+5=0$ ஆகிய இணைகோடுகளிடையான தொலைவை காண்க.

தீர்வு இங்கு $A=3, B=-4, C_1=7, C_2=5$. எனவே, தேவையான தொலைவு

$$d=\frac{|7-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{2}{5}$$

பயிற்சி 10.3

1. கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளை சாய்மைவெட்டுத்துண்டுவடிவத்துக்கு குறைத்து அவற்றின் சாய்மைகளையும் yவெட்டுத்துண்டுகளையும் காண்க.
   a. $x+7y=0$
   b. $6x+3y-5=0$
   c. $y=0$
2. கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளை வெட்டுத்துண்டுவடிவத்துக்கு குறைத்து அச்சுகளில் அவற்றின் வெட்டுத்துண்டுகளை காண்க.
   a. $3x+2y-12=0$
   b. $4x-3y=6$
   c. $3y+2=0$
3. கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளை செங்கோட்டுவடிவத்துக்கு குறைத்து மூலத்திலிருந்து செங்குத்துத் தொலைவுகளையும் செங்கோடுகளுக்கும் நேர்ம x அச்சுக்குமுள்ள கோணங்களையும் காண்க.
   a. $x-\sqrt{3}y+8=0$
   b. $y-2=0$
   c. $x-y=4$
4. $12(x+6)=5(y-2)$ என்ற கோட்டிலிருந்து $(-1,1)$ என்ற புள்ளியின் தொலைவை காண்க.
5. $x/3+y/4=1$ என்ற கோட்டிலிருந்து 4 அலகுகளான தொலைவில் xஅச்சிலுள்ள புள்ளிகளை காண்க.
6. கீழ்க்காணும் இணைகோடுகளிடையான தொலைவுகளை காண்க.
   a. $15x+8y-34=0,\ 15x+8y+31=0$
   b. $l(x+y)+p=0, l(x+y)-r=0$
7. $3x-4y+2=0$ என்ற கோட்டுக்கு இணையானதும் $(-2,3)$இன்வழி செல்வதுமான கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.
8. $x-7y+5=0$ என்ற கோட்டுக்கு செங்குதானதும் x வெட்டுத்துண்டு 3 உள்ளதுமான கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.
9. $\sqrt{3}x+y=1,\ x+\sqrt{3}y=1$ ஆகிய கோடுகளிடையான கோணங்களை காண்க.
10. $(h,3)$, $(4,1)$ ஆகிய புள்ளிகளின்வழியான கோடு $7x-9y-19=0$ என்ற கோட்டை செங்கோணத்தில் இடைவெட்டுகிறது. hஇன் மதிப்பை காண்க.
11. $Ax+By+C=0$ என்ற கோட்டுக்கு இணையாக (x_1,y_1) என்ற புள்ளியின்வழி செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$ என்று நிறுவுக.
12. $(2,3)$ என்ற புள்ளியின்வழி செல்லும் இரண்டு கோடுகள் $60°$ கோணத்தில் இடைவெட்டுகின்றன. ஒரு கோட்டின் சாய்மை 2 எனில் மற்றக்கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.
13. $(3,4)$, $(-1,2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை செங்குத்தாக சமவெட்டும் கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.
14. $(-1,3)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $3x-4y-16=0$ என்ற கோட்டுக்கான செங்குத்துக்கோட்டின் அடிப்புள்ளியின் ஒருங்களவுகளை காண்க.
15. மூலத்திலிருந்து $y=mx+c$ என்ற கோட்டுக்கான செங்குத்துக்கோடு அதை $(-1,2)$ என்ற புள்ளியில் சந்திக்கிறது. m, c ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை காண்க.

16. மூலத்திலிருந்து x உவவி $\theta - y$ வவி $\theta = k$ உவவி 2θ , x வெவி $\theta + y$ உவெவி $\theta = k$ ஆகிய கோடுகளுக்கான செங்குத்துக்கோடுகளின் நீளங்கள் முறையே p, q எனில் $p^2 + 4q^2 = k^2$ என்று நிறுவுக.
17. $A(2,3)$, $B(4-1)$, $C(1,2)$ ஆகிய உச்சிகளுள்ள ABC என்ற முக்கோணத்தில் A என்ற உச்சியிலிருந்து வரைந்த குத்துக்கோட்டின் சமன்பாட்டையும் நீளத்தையும் காண்க.
18. மூலத்திலிருந்து அச்சுகளின் a, b என்ற வெட்டுத்துண்டுகளுள்ள கோட்டுக்கான செங்குத்துக்கோட்டின் நீளம் p எனில் $1/p^2 = 1/a^2 + 1/b^2$ என்று காட்டுக.

பலவகைச்சான்றுகள்

சான்று 20 $2x + y - 3 = 0$, $5x + ky - 3 = 0$, $3x - y - 2 = 0$ ஆகிய கோடுகள் பொதுப் புள்ளியன எனில் kஇன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு கோடுகள் பொதுப்பள்ளியன என்பதால், இரண்டு கோடுகளின் இடைவெட்டுப்புள்ளி மூன்றாம் கோட்டிலும் இருக்கிறது. மூன்று கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$2x + y - 3 = 0 \qquad (10.30)$$
$$5x + ky - 3 = 0 \qquad (10.31)$$
$$3x - y - 2 = 0 \qquad (10.32)$$

(10.30) , (10.32) ஆகிய சமன்பாடுகளை குறுக்குப்பெருக்குமுறையால் தீர்த்து

$$\frac{x}{-2-3} = \frac{y}{-9+4} = \frac{1}{-2-3},$$

அதாவது $x = 1, y = 1$

என்று பெறுகிறோம். எனவே, இந்த இரண்டு கோடுகளின் இடைவெட்டுப்புள்ளி $(1,1)$. மூன்று கோடுகளும் பொதுப்புள்ளியன என்பதால் இந்தப்புள்ளி (10.31)ஆம் சமன்பாட்டையும் நிறைவேற்றவேண்டும். எனவே

$5 \times 1 + k \times 1 - 3 = 0,$ அதாவது $k = -2$

சான்று 21 $P(4,1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $4x - y = 0$ என்ற கோட்டின் தொலைவை நேர்ம x அச்சுடன் $135°$ கோணத்திலுள்ள கோட்டின் திசையில் அளந்தபடி காண்க.

தீர்வு கோட்டின் சமன்பாடு

$$4x - y = 0 \qquad (10.33)$$

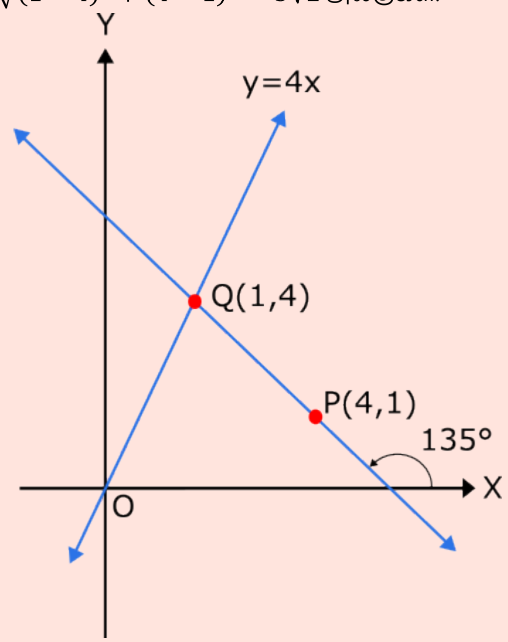
P யிலிருந்து இந்த கோட்டின் தொலைவை மற்றொரு கோட்டின் திசையில் காண, இரண்டு கோடுகளின் இடைவெட்டுப் புள்ளியை காணவேண்டும். இதற்காக, இரண்டாம் கோட்டின் சமன்பாட்டை முதலில் காண்போம் (படம் 10.21). இரண்டாங் கோட்டின் சாய்மை தொவி $135° = -1$. $P(4,1)$ இன்வழி -1 சாய்மையுடனுள்ள கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - 1 = -1(x - 4),$$

அதாவது $x + y - 5 = 0 \qquad (10.34)$

(10.33)ஆம் சமன்பாட்டையும் (10.34)ஆம் சமன்பாட்டையும் தீர்த்து, $x = 1, y = 4$ என்று காண்கிறோம். இதனால் இரண்டு கோடுகளின் இடைவெட்டுப்புள்ளி $Q(1,4)$.

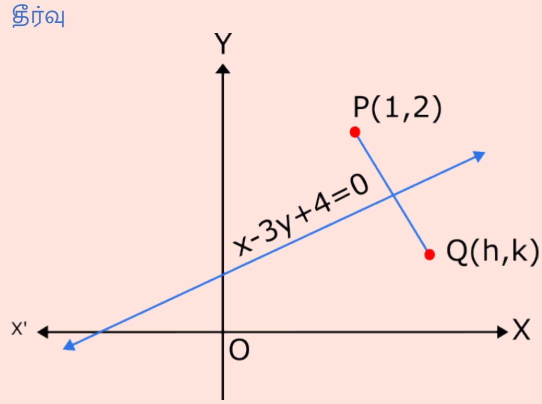
இப்போது $P(4.1)$இலிருந்து (10.33)ஆம் சமன்பாட்டின் கோட்டுக்கு தொலைவு $P(4.1)$க்கும் $Q(1.4)$க்குமுள்ள தொலைவு. இது $\sqrt{(1-4)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2}$ அலகுகள்.



படம் 10.21

சான்று 22 நேர்க்கோடு ஒரு புள்ளிக்கு தளவாடியாக செயலாற்றுகிறது என்ற எடுகோளுடன் $x - 3y + 4 = 0$ என்ற கோட்டில் $(1,2)$ என்ற புள்ளியின் நிழலுருவை காண்க.

தீர்வு



படம் 10.22

$$x - 3y + 4 = 0 \qquad (10.35)$$

என்ற கோட்டில் $P(1,2)$ என்ற புள்ளியின் நிழலுரு $Q(h,k)$ என்க. அப்படியெனில் (10.35) என்ற கோடு PQ வின் செங்குத்துச்சமவெட்டி (படம் 10.22). எனவே,

$$PQ\text{வின் சாய்மை} = -\frac{1}{m},$$

இங்கு, m என்பது $x-3y+4=0$இன் சாய்மை

$$\frac{k-2}{h-1} = -\frac{1}{1/3}, \text{அதாவது } 3h+k=5 \quad (10.36)$$

PQவின் நடுப்புள்ளியான

$$\left(\frac{h+1}{2},\frac{k+2}{2}\right)$$

(10.35)ஆம் சமன்பாட்டை நிறைவேற்றுகிறது. எனவே

$$\left(\frac{h+1}{2}\right)-3\left(\frac{k+2}{2}\right)+4=0$$

$$\text{அதாவது } h-3k=-3 \quad (10.37)$$

(10.36)ஐயும் (10.37)ஐயும் தீர்த்து $h=6/5, k=7/5$ என்று பெறுகிறோம். எனவே (10.35) என்ற கோட்டில் $(1,2)$இன் நிழலுரு

$$\left(\frac{6}{5},\frac{7}{5}\right)$$

சான்று 23

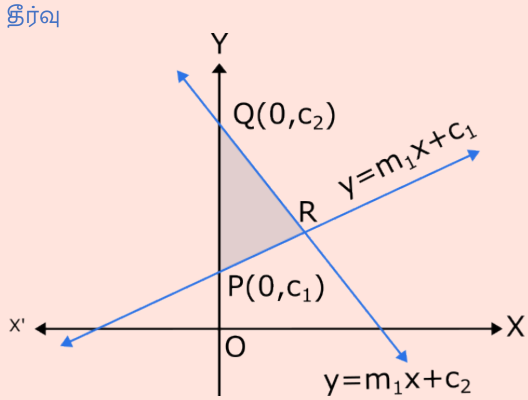
$$y=m_1x+c_1, \qquad y=m_2x+c_2, \qquad x=0$$

ஆகிய மூன்று கோடுகளும் உண்டாக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$$\frac{(c_1-c_2)^2}{2|m_1-m_2|}$$

என்று காட்டுக.

தீர்வு



படம் 10.23

மூன்று கோடுகள்

$$y=m_1x+c_1 \quad (10.38)$$
$$y=m_2x+c_2 \quad (10.39)$$
$$x=0 \quad (10.40)$$

ஆகியவை. $y=mx+c$ என்ற கோடு $x=0$ என்ற கோட்டை (y அச்சை) சந்திக்குமிடம் $(0,c)$ என்பதை அறிவோம். எனவே, (10.38) உம் (10.39) உம் (10.40) ஐ சந்திக்கும் புள்ளிகளான $P(0,c_1)$உம் $Q(0,c_2)$ வும் முக்கோணத்தின் இரண்டு உச்சிகள் (படம் 10.23). மூன்றாம் உச்சியை (10.38) ஐயும் (10.39)ஐயும் தீர்ப்பதால் பெறலாம். அதாவது

$$x=\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2}, y=\frac{m_1c_1-m_2c_2}{m_1-m_2} \quad (10.41)$$

எனவே, முக்கோணத்தின் உச்சி

$$R\left(\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2},\frac{m_1c_1-m_2c_2}{m_1-m_2}\right)$$

இப்போது மூன்று உச்சிகளிலிருந்தும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவை பெறலாம்.

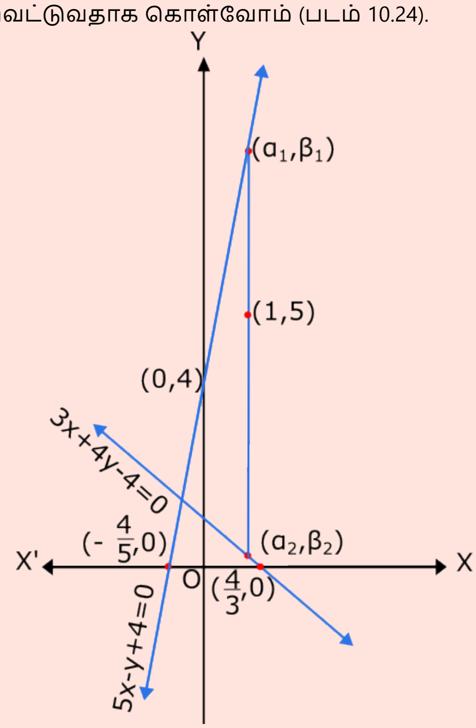
$$\begin{aligned}\text{பரப்பளவு} &= \frac{1}{2}\Bigg|0\left(\frac{m_1c_1-m_2c_2}{m_1-m_2}-c_2\right) \\ &\qquad +\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2}(c_2-c_1) \\ &\qquad +0\left(c_1-\frac{m_1c_1-m_2c_2}{m_1-m_2}\right)\Bigg| \\ &= \frac{(c_2-c_1)^2}{2|m_1-m_2|}\end{aligned}$$

சான்று 24 $5x-y+4=0$, $3x+4y-4=0$ ஆகிய இரண்டு கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள மற்றொரு கோட்டின் துண்டை $(1,5)$ என்ற புள்ளி இருசமவெட்டுகிறது. அந்த கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு இரணடு கோடுகள்

$$5x-y+4=0 \quad (10.42)$$
$$3x+4y-4=0 \quad (10.43)$$

நமக்கு வேண்டிய கோடு இந்த கோடுகளை முறையே (α_1,β_1), (α_2,β_2) என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுவதாக கொள்வோம் (படம் 10.24).



படம் 10.24

அப்படியெனில்

$$5\alpha_1 - \beta_1 + 4 = 0, \qquad 3\alpha_2 + 4\beta_2 - 4 = 0$$
அதாவது
$$\beta_1 = 5\alpha_1 + 4, \qquad \beta_2 = \frac{4 - 3\alpha_2}{4}$$
தேவையான கோட்டின் $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$ என்ற புள்ளிகளுக்கிடையான துண்டின் நடுப்புள்ளி $(1,5)$ என்பதால்
$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 1, \qquad \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = 5$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2, \qquad \frac{5\alpha_1 + 4 + \frac{4 - 3\alpha_2}{4}}{2} = 5$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2, \qquad 20\alpha_1 - 3\alpha_2 = 20 \quad (10.44)$$
(10.44) ஆம் சமன்பாட்டை α_1 க்கும் α_2 க்கும் தீர்த்து
$$\alpha_1 = \frac{26}{23}, \qquad \alpha_2 = \frac{20}{23}$$
என்றும் இவற்றை பயன்படுத்தி
$$\beta_1 = 5\frac{26}{23} + 4 = \frac{222}{23}$$
என்றும் பெறுகிறோம். (β_2 ஐயும் அறியலாம்; ஆனால் அது தேவையில்லை). $(1,5)$, (α_1, β_1) ஆகிய புள்ளிகளின்வழி செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு
$$y - 5 = \frac{\beta_1 - 5}{\alpha_1 - 1}(x - 1)$$
$$y - 5 = \frac{222/23 - 5}{26/23 - 1}(x - 1)$$
$$107x - 3y - 92 = 0$$
இதுவே நமக்கு வேண்டிய கோட்டின் சமன்பாடு.

சான்று 25 $3x - 2y = 5$, $3x + 2y = 5$ ஆகிய கோடுகளிலிருந்து சமமான தொலைவில் இருக்குமாறு அசையும் ஒரு புள்ளியின் பாதை ஒரு நேர்க்கோடு என்று காட்டுக.

தீர்வு கோடுகள்
$$3x - 2y = 5 \qquad (10.45)$$
$$3x + 2y = 5 \qquad (10.46)$$
இந்த கோடுகளிலிருந்து சமத்தொலைவி லுள்ள புள்ளி (h, k) என்க. அப்படியெனில்
$$\frac{|3h - 2k - 5|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{|3h + 2k - 5|}{\sqrt{9 + 4}}$$
$$|3h - 2k - 5| = |3h + 2k - 5|$$
இது $3h - 2k - 5 = 3h + 2k - 5$
$$-(3h - 2k - 5) = 3h + 2k - 5$$
ஆகிய இரண்டு தீர்வுகளை தருகிறது. அதாவது முறையே $k = 0$, $h = {}^{5}/_{3}$ ஆகிய தீர்வுகளை தருகிறது. எனவே, (h, k) என்ற புள்ளி $y = 0$ என்ற சமன்பாட்டையும் $x = 5/3$ என்ற சமன்பாட்டை யும் நிறைவேற்றுகிறது. இவை இரண்டும் நேர்க்கோடுகள் என்பதால் (10.45), (10.46) ஆகிய கோடுகளிலிருந்து சமத்தொலைவிலுள்ள புள்ளியின் பாதை நேர்க்கோடு.

10ஆம் படலத்தில் பலவகைப்பயிற்சிகள்

1. $(k - 3)x - (4 - k^2)y + k^2 - 7k + 6 = 0$ என்ற கோடு
   a. xஅச்சுக்கு இணையாக
   b. yஅச்சுக்கு இணையாக
   c. மூலத்தின்வழி செல்வதாக

   இருக்கும்போது kஇன் மதிப்பை காண்க.
2. $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$ என்ற கோட்டின் செங்கோட்டுவடிவம் x உவவி $\theta + y$ வவி $\theta = p$ எனில் θ, p ஆகிய மதிப்புகளை காண்க.
3. அச்சுகளில் உண்டாக்கும் வெட்டுத்துண்டுகளின் கூட்டலும் பெருக்கலும் முறையே $1, -6$ என்றிருக்கும் கோடுகளின் சமன்பாடுகளை காண்க.
4. $x/3 + y/4 = 1$ என்ற கோட்டிலிருந்து 4 அலகு தொலைவில் yஅச்சில் உள்ள புள்ளிகள் யாவை?
5. மூலத்திலிருந்து (உவவி θ, வவி θ), (உவவி ϕ, வவி ϕ) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுக்கு செங்குத்துத்தொலைவை காண்க.
6. y அச்சுக்கு இணையானதும் $x - 7y + 5 = 0$, $3x + y = 0$ ஆகிய கோடுகளின் இடைவெட்டுப்புள்ளியின்வழி செல்வதுமான கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.
7. $x/4 + y/6 = 1$ என்ற கோடு yஅச்சை சந்திக்குமிடத்தின்வழி அந்த கோட்டுக்கு செங்குத்தாக செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.
8. $y - x = 0$, $x + y = 0$, $x - k = 0$ ஆகிய கோடுகள் உண்டாக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவை காண்க.
9. $3x + y - 2 = 0$, $px + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 3 = 0$ ஆகிய கோடுகள் ஒரே புள்ளியில் இடைவெட்டும்படியான pயின் மதிப்பை காண்க.
10. $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$, $y = m_3x + c_3$ ஆகிய கோடுகள் பொதுப்புள்ளியன எனில் $m_1(c_2 - c_3) + m_2(c_3 - c_1) + m_3(c_1 - c_2) = 0$ எனக்காட்டுக.
11. $(3,2)$ இன்வழி செல்வதும் $x - 2y = 3$ என்ற கோட்டுடன் $45°$ கோணமுள்ளதுமான கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.

12. $4x+7y-3=0,\ 2x-3y+1=0$ ஆகியவற்றின் இடைவெட்டுப்புள்ளியின்வழி செல்வதும் அச்சுகளில் சமவெட்டுத்துண்டுகளுள்ளதுமான கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.
13. மூலத்தின்வழி செல்வதும் $y=mx+c$ என்ற கோட்டுடன் θ என்ற கோணத்தை உண்டாக்குவதுமான கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{y}{x}=\frac{m\pm \text{தொவி}\,\theta}{1\mp m\,\text{தொவி}\,\theta}$$

என்று காட்டுக.

14. $(-1,1)$, $(5,7)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை $x+y=4$ என்ற கோடு எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கிறது?
15. $(1,2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $4x+7y+5=0$ என்ற கோட்டின் தொலைவை $2x-y=0$ என்ற கோட்டின் திசையில் காண்க.
16. $(-1,2)$ என்ற புள்ளியின்வழி செல்லும் கோடு $x+y=4$ என்ற கோட்டை இந்தப்புள்ளியிலிருந்து 3 அலகு தொலைவில் இடைவெட்டவேண்டும் எனில் அந்த கோட்டை எந்த திசையில் வரையவேண்டும்?
17. ஒரு செங்கோணமுக்கோணத்தின் நெடும்பக்கத்தின் நுனிகள் $(1,3)$, $(-4,1)$ ஆகிய புள்ளிகளில் இருந்தால், முக்கோணத்தின் கால்களின் (செங்குத்தான பக்கங்கள்) சமன்பாடுகளை காண்க.
18. $x+3y=7$ என்ற கோட்டை ஒரு தளவாடியாகக்கொண்டு, $(3,8)$ என்ற புள்ளியின் நிழலுருவை காண்க.
19. $y=3x+1,\ 2y=x+3$ ஆகிய கோடுகள் $y=mx+4$ என்ற கோட்டுடன் சமமான சாய்வில் இருந்தால் mஇன் மதிப்பை காண்க.
20. $x+y-5=0, 3x-2y+7=0$ ஆகிய கோடுகளிலிருந்து $P(x,y)$ என்ற ஒரு மாறிப்புள்ளியின் செங்குத்துத்தொலைவுகளின் கூட்டுத்தொகை எப்போதும் 10 எனில் P ஒரு கோட்டில் அசையவேண்டும் எனக்காட்டுக.
21. $9x+6y-7=0$, $3x+2y+6=0$ ஆகிய இணைகோடுகளிலிருந்து சமத்தொலைவிலுள்ள கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.
22. $(1,2)$ என்ற புள்ளியின்வழி செல்லும் ஒரு ஒளிக்கதிர் x அச்சில் A என்ற புள்ளியில் எதிரொளித்து $(5,3)$ என்ற புள்ளியின்வழி செல்கிறது. Aயின் ஒருங்களவுகளை காண்க.
23. $\left(\sqrt{a^2-b^2},0\right)$, $\left(-\sqrt{a^2-b^2},0\right)$ ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து ${}^{x}/_{a}\,\text{உவவி}\,\theta+{}^{y}/_{b}\,\text{வவி}\,\theta=1$ என்ற கோட்டுக்கு வரைந்த செங்குத்துக்கோடுகளின் நீளங்களின் பெருக்குத்தொகை b^2 என்று நிறுவுக.
24. $2x-3y+4=0$, $3x+4y-5=0$ ஆகிய சமன்பாடுகள் விவரிக்கும் இரண்டு நேர்ப்பாதைகளின் சந்திப்பில் நிற்கும் ஒரு மனிதர் $6x-7y+8=0$ என்ற சமன்பாடு விவரிக்கும் பாதையை மீக்குறைந்த நேரத்தில் அடைய விரும்புகிறார். அவர் பின்பற்றவேண்டிய பாதையின் சமன்பாட்டை காண்க.

சுருக்கவுரை

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளின்வழி செல்லும் நெடுநிற்பமற்ற கோட்டின் சாய்மை

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2},\qquad x_1\neq x_2$$

ஒரு கோடு x அச்சின் நேர்மத்திசையுடன் α என்ற கோணத்தை உண்டாக்கினால், அந்த கோட்டின் சாய்மை $m=\text{தொவி}\,\alpha$, $\alpha\neq 90°$.

கிடைமட்டக்கோட்டின் சாய்மை சுழியம்; நெடுநிற்பக்கோட்டின் சாய்மையை வரையறுக்கவில்லை.

m_1,m_2 சாய்மைகளுள்ள L_1,L_2 என்ற கோடுகளிடையான கோணம் θ எனில்

$$\text{தொவி}\,\theta=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right|,\qquad 1+m_1m_2\neq 0$$

இரண்டு கோடுகளின் சாய்மைகள் சமம் எனிலும் எனில் மட்டுமேயும் அவை *இணையானவை*.

இரண்டு கோடுகளின் சாய்மைகளின் பெருக்குத்தொகை -1 எனிலும் எனில் மட்டுமேயும் அவை *செங்குத்தானவை*.

A,B,C என்ற மூன்று புள்ளிகளை கருதுக. ABயின் சாய்மை = BCயின் சாய்மை எனிலும் எனில் மட்டுமேயும் மூன்று புள்ளிகளும் கோடமைந்தவை.

xஅச்சிலிருந்து a தொலைவிலுள்ள கிடைமட்டக்கோட்டின் சமன்பாடு $y=a$ஓ $y=-a$ஓ.

yஅச்சிலிருந்து b தொலைவிலுள்ள நெடுநிற்பக்கோட்டின் சமன்பாடு $x=b$ஓ $x=-b$ஓ

(x, y) என்ற புள்ளி m சாய்மையுள்ளதும் (x_0, y_0) என்ற புள்ளியின்வழி செல்வதுமான கோட்டில் இருக்கிறது எனிலும் எனில் மட்டுமேயும், அதன் ஒருங்களவுகள் $y - y_0 = m(x - x_0)$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவேற்றுகின்றன.

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளின்வழி செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

(x, y) என்ற புள்ளி m சாய்மையும் c y வெட்டுத்துண்டுமுள்ள கோட்டில் இருக்கிறது எனிலும் எனில் மட்டுமேயும் $y = mx + c$.

m சாய்மையுள்ள ஒரு கோடு d என்ற xவெட்டுத்துண்டை உண்டாக்கினால், அதன் சமன்பாடு

$$y = m(x - d)$$

x, yஅச்சுகளில் முறையே a, b என்ற வெட்டுத்துண்டுகளை உண்டாக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

மூலத்திலிருந்து p செங்கோட்டுத்தொலைவும் செங்கோட்டுக்கும் நேரிய xஅச்சுக்கும் ω கோணமுமுள்ள கோட்டின் சமன்பாடு x உவவி $\omega + x$ வவி $\omega = p$.

A யும் B யும் ஒரேநேரத்தில் சுழியமாகாதபோது, $Ax + By + C = 0$ என்ற வடிவிலுள்ள சமன்பாட்டை *பொதுநேரியச்சமன்பாடு* என்றோ *கோட்டின் பொதுச்சமன்பாடு* என்றோ அழைக்கிறோம்.

(x_1, y_1) என்ற புள்ளியிலிருந்து $Ax + By + C = 0$ என்ற கோட்டின் செங்குத்துத்தொலைவு

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$Ax + By + C_1, Ax + By + C_2$ என்ற இணைகோடுகளிடையான தொலைவு

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$