படலம் 11

கூம்புவெட்டுகள்

உண்மையான வாழ்க்கைக்கும் அறிவுக்குமுள்ள தொடர்பு உங்கள் மாணவர்களுக்கு புலப்படட்டும். அறிவின்மூலம் உருமாற்றப்பட்ட உலகம் எப்படி இருக்கவியலும் என்பதை அவர்கள் புரிந்துகொள்ளட்டும். - பெருடாண்டு இரசல்

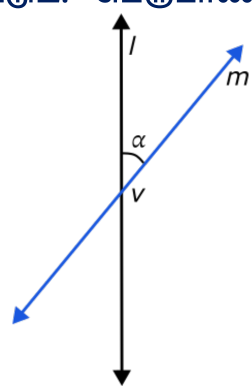
11.1 அறிமுகம்

அலகு 10-ல் கோட்டின் சமன்பாடுகளின் பல வடிவங்களை ஆராய்ந்தோம். இந்த அலகில், வட்டங்கள், நீளவட்டங்கள், பரவளைவுகள், அதிபரவளைவுகள் போன்ற வேறு சில வளைவரைகளைப்பற்றி அறிவோம். பரவளைவு, அதிபர வளைவு ஆகியவற்றின் கிரேக்கப்பெயர்களை அப்பலோனியசு வழங்கினார். இந்த வளைவரைகளை பொதுவாக கூம்பு வெட்டுகள் என்று அழைக்கிறோம்; ஏனெனில், இவற்றை ஒரு இருமடியுள்ள நேர்வட்டக் கூம்புக்கும் ஒரு தளத்துக்குமான இடைவெட்டுகளாக பெறலாம். இந்த வளைவரைகள் கோள்களின் இயக்கத்திலும் தொலைநோக்கிகள், அலைக்கொடிகள், கைவிளக்குகளில் எதிரொளிப்பிகள், தானுந்திகளின் முன்விளக்குகள் ஆகியவற்றின் வடிவமைப்பிலும் இன்ன பிற பல்வேறு துறைகளிலும் பெரிதும் பயன்படுகின்றன. இனி, ஒரு தளம் ஒரு இருமடிநேர்வட்டக் கூம்பை இடைவெட்டும்போது பலவகையான வளைவுகள் உண்டாவதை வரும் பகுதிகளில் பார்ப்போம்.

அப்பலோனியசு
(கி. மு. 262 –190)

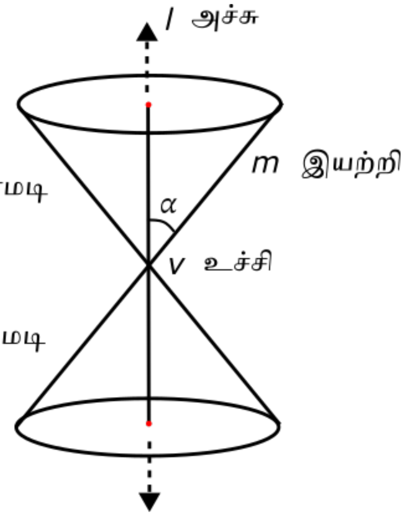
11.2 ஒரு கூம்பின் வெட்டுகள்

l ஒரு நிலையான செங்குத்துக்கோடு எனவும், அதனுடன் α என்ற கோணத்தில் குறுக்கிடும் m என்ற மற்றொரு கோடு V என்ற ஒரு நிலையான புள்ளியின்வழி செல்வதாகவும் கொள்க (படம் 11.1).

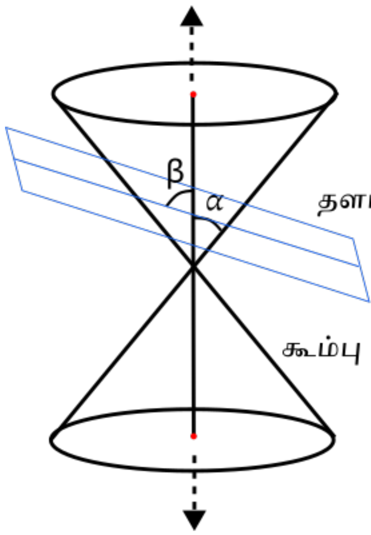


படம் 11.1

α மாறிலியாயிருக்கும் வகையில் l ஐச்சுற்றி m ஐ சுழற்றுவோம். இவ்வாறு உருவாகும் மேற்பரப்பு ஒரு இருமடிநேர்வட்டக்கூம்பு. இனி இதையே கூம்பு என்போம். இதன் இருபக்கங்களும் முடிவிலாத்தொலைவுக்கு நீள்வதாகவும் கொள்வோம் (படம் 11.2).



படம் 11.2



படம் 11.3

V என்ற புள்ளியை உச்சி என்றும் l என்ற கோட்டை கூம்பின் அச்சு என்றும் m என்ற சுழலும் கோட்டை கூம்பின் இயற்றி என்றும் அழைக்கிறோம். உச்சி கூம்பை இரண்டு பாதிகளாக பிரிக்கிறது. ஒவ்வொன்றும் கூம்பின் ஒரு மடி என்கிறோம்.

ஒரு கூம்புக்கும் ஒரு தளத்துக்குமான இடைவெட்டை *கூம்புவெட்டு* என்கிறோம். இவ்வாறு, கூம்புவெட்டு என்பது ஒரு தளம் ஒரு நேர்வட்டக்கூம்பை வெட்டுவதால் ஏற்படும் வளைவரை. கூம்பின் நோக்கீட்டில் இடைவெட்டும் தளத்தின் இடநிலையையும் அது அச்சுடன் தாங்கும் கோணத்தையும் சார்ந்து வெவ்வேறு வகையான கூம்புவெட்டுகள் கிடைக்கின்றன. இடைவெட்டும் தளம் கூம்பின் நெடுநிற்ப அச்சுடன் தாங்கும் கோணம் β என்க (படம் 11.5).

கூம்புடன் தளத்தின் இடைவெட்டு கூம்பின் உச்சியில் நிகழலாம்; அல்லது உச்சிக்கு மேலோ கீழோ மடியின் ஒரு பகுதியில் நிகழலாம்

11.2.1 வட்டம், நீளவட்டம், பரவளைவு, அதிபரவளைவு

தளம் கூம்புமடியை வெட்டும்போது (கூம்பின் உச்சியை தவிர) கீழ்க்காணும் நிலைமைகள் நிலவலாம்.

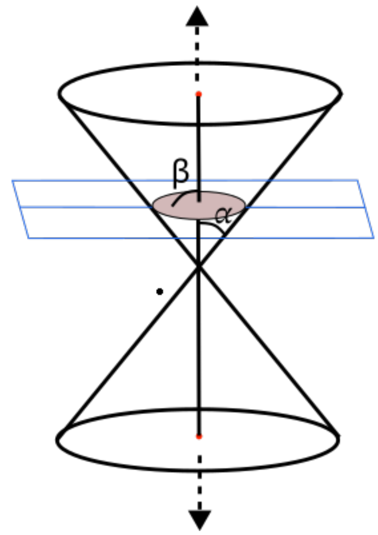
(அ) $\beta = 90°$ என்றபோது, வெட்டு ஒரு வட்டம் (படம் 11.4).

(ஆ) $\alpha < \beta < 90°$ என்றபோது, வெட்டு ஒரு நீளவட்டம் (படம் 11.5).

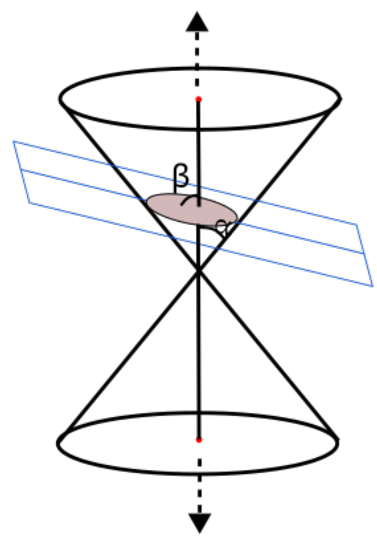
(இ) $\beta = \alpha$ என்றபோது, வெட்டு ஒரு பரவளைவு (படம் 11.6).

(மேலுள்ள மூன்று நிலைமைகளுள் ஒவ்வொன்றிலும் தளம் கூம்பின் ஒரு மடியை மட்டுமே குறுக்கே வெட்டுகிறது).

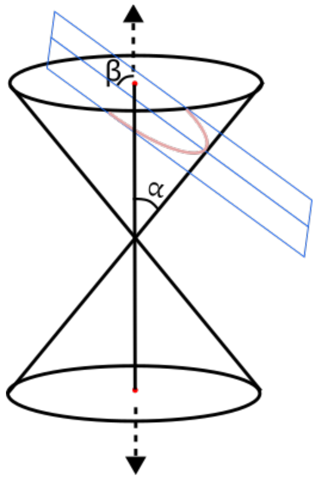
(ஈ) $0 \leq \beta < \alpha$ என்றபோது, தளம் இரு கூம்புமடிகளையும் வெட்டுகிறது; குறுக்குவெட்டும் வளைவரை ஒரு அதிபரவளைவு (படம் 11.7).



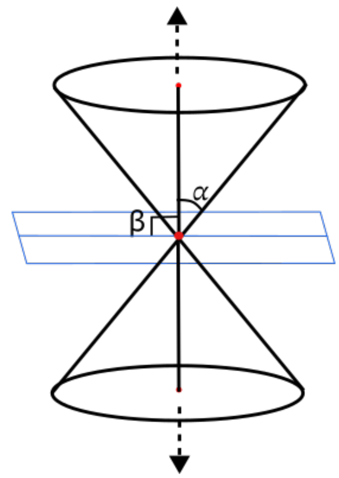
படம் 11.4



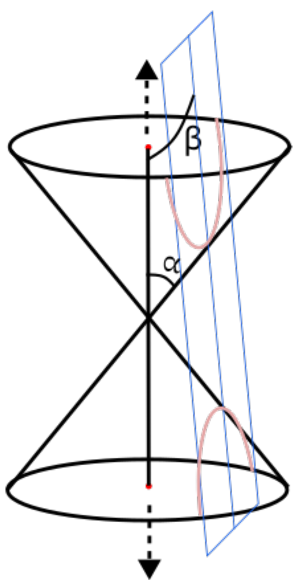
படம் 11.5



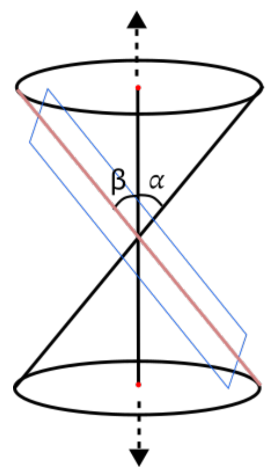
படம் 11.6



படம் 11.8



படம் 11.7



படம் 11.9

11.2.2 உலைந்தோடும் கூம்புவெட்டுகள்

தளம் கூம்பின் உச்சியில் வெட்டும்போது பின்வரும் வேற்றுவங்கள் உள்ளன.

(அ) $\alpha < \beta \leq 90°$ எனில் அந்த வெட்டு ஒரு புள்ளி (படம் 11.7).

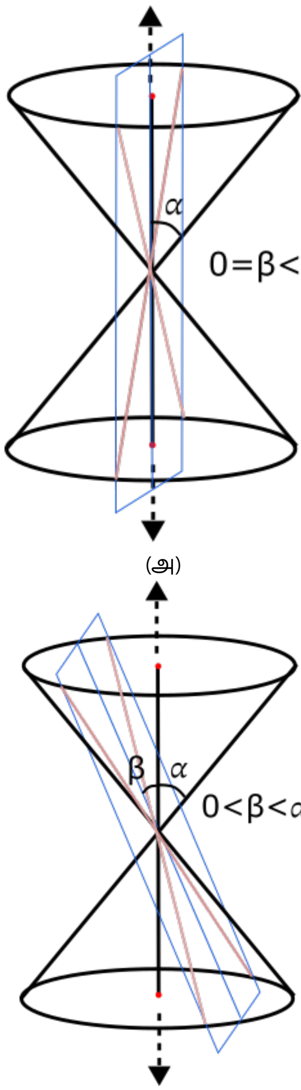
(ஆ) $\beta = \alpha$ எனில் தளத்தில் கூம்பின் இயற்றி உள்ளது; வெட்டு ஒரு நேர்க்கோடு (படம் 11.8).

இது ஒரு பரவளைவின் உலைந்தோடும் வேற்றுவம்.

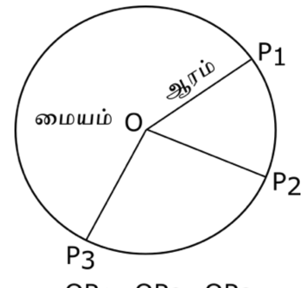
(இ) $0 \leq \beta < \alpha$ எனில் வெட்டு ஒரு இடைவெட்டும் நேர்க்கோட்டுச்சோடி (படம் 11.9).

இது ஒரு அதிபரவளைவின் உலைந்தோடும் வேற்றுவம்.

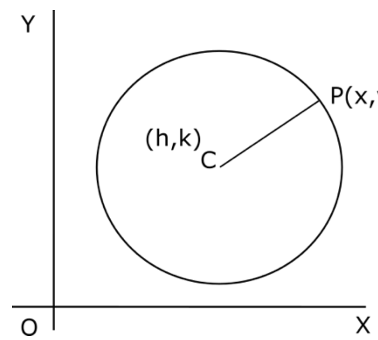
பின்வரும் பகுதிகளில், ஒவ்வொரு கூம்புவெட்டையும் வடிவியற்பண்புகளால் வரையறுத்து அதன் சமன்பாட்டை செந்தர வடிவில் பெறுவோம்.



படம் 11.10



படம் 11.11



படம் 11.12

11.3 வட்டம்

வரையறை 1 வட்டம் என்பது ஒரு தளத்தில் ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து சமத்தொலைவிலுள்ள எல்லாப்புள்ளிகளின் கணம்.

நிலையான புள்ளியை வட்டத்தின் மையம் என்றும் மையத்திலிருந்து வட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியின் தொலைவை வட்டத்தின் ஆரம் (படம் 11.11) என்றும் அழைக்கிறோம்.

வட்டத்தின் மையம் ஒருங்களவுச்சட்டத்தின் மூலத்தில் இருக்கும்போது வட்டத்தின் சமன்பாடு மீயெளிமையானது. எனினும், பொதுவான மையமும் ஆரமுமுள்ள ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாட்டை கீழே நாம் பெறுகிறோம் (படம் 11.11).

$C\,(h,k)$ வட்டத்தின் மையமும் r ஆரமும் என்க. $P(x,y)$ என்ற புள்ளி வட்டத்தில் இருப்பதாக கொள்க (படம் 11.11). அப்படியெனில், வரையறையின்படி, $|CP| = r.$ தொலைவு வாய்ப்பாட்டால்,

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$$

அதாவது

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

இது (h,k) வில் மையமும் r ஆரமுமுள்ள வட்டத்துக்கான சமன்பாடு.

சான்று 1 $(0,0)$இல் மையமும் r ஆரமுமுள்ள வட்டத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு இங்கு $h = k = 0$. எனவே, வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2 = r^2$$

சான்று 2 $(-3,2)$இல் மையமும் 4 ஆரமுமுள்ள வட்டத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு: இங்கு $h=-3,\quad k=2, r=4.$ எனவே, தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x+3)^2+(y-2)^2 = 16$$

சான்று 3

$$x^2+y^2+8x+10y-8 = 0$$

என்ற சமன்பாடுள்ள வட்டத்தின் மையத்தையும் ஆரத்தையும் காண்க.

தீர்வு சமன்பாட்டில், அடைப்புக்குறிக்குள் உள்ள வர்க்கங்களை நிறைவு செய்து

$$(x^2+8x+16)+(y^2+10y+25) = 8+16+25$$

என்று பெறுகிறோம். அதாவது

$$(x+4)^2+(y+5)^2 = 49$$

$$\{x-(-4)\}^2+\{y-(-5)\}^2 = 7^2$$

எனவே, வட்டத்தின் மையம் $(-4,-5)$, ஆரம் 7.

சான்று 4 $(2,-2)$, $(3,4)$ ஆகிய புள்ளிகளின் வழி செல்வதும் மையம் $x+y=2$ என்ற கோட்டில் உள்ளதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

என்க. வட்டம் $(2,-2)$, $(3,4)$ வழியாக செல்வதால்

$$(2-h)^2+(-2-k)^2 = r^2 \qquad (11.1)$$

$$(3-h)^2+(4-k)^2 = r^2 \qquad (11.2)$$

ஆகிய சமன்பாடுகளையும் மையம் $x+y=2$ என்ற கோட்டில் இருப்பதால்

$$h+k=2 \qquad (11.3)$$

என்பதையும் பெறுகிறோம். இந்த மூன்று சமன்பாடுகளையும் தீர்த்து நாம் பெறுபவை

$$h=0.7, \quad k=1.3, \quad r^2=12.58$$

எனவே, தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x-0.7)^2+(y-1.3)^2 = 12.58$$

பயிற்சி 11.1

பின்வரும் 1முதல் 5வரையான ஒவ்வொரு பயிற்சியிலும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

1. மையம் $(0,2)$, ஆரம் 2
2. மையம் $(-2,3)$, ஆரம் 4
3. மையம் $(^1/_2, ^1/_4)$, ஆரம் $^1/_{12}$
4. மையம் $(1,1)$ ஆரம் $\sqrt{2}$
5. மையம் $(-a,-b)$, ஆரம் $\sqrt{a^2-b^2}$

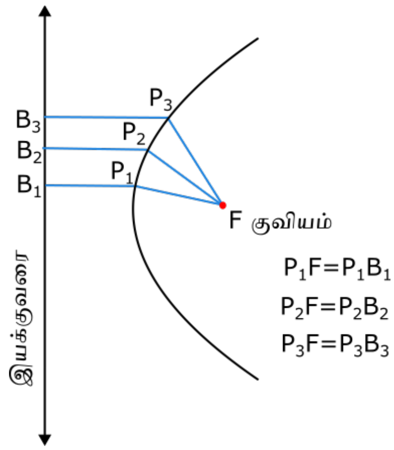
பின்வரும் 6முதல் 9வரையான ஒவ்வொரு பயிற்சியிலும் வட்டத்தின் மையத்தையும் ஆரத்தையும் காண்க.

6. $(x+5)^2+(y-3)^2=36$
7. $x^2+y^2-4x-8y-45=0$
8. $x^2+y^2-8x+10y-12=0$
9. $2x^2+2y^2-x=0$
10. $(4,1)$, $(6,5)$ ஆகிய புள்ளிகளின்வழி செல்வதும் மையம் $4x+y=16$ என்ற கோட்டிலுள்ளதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.
11. $(2,3)$, $(-1,1)$ ஆகிய புள்ளிகளின்வழி செல்வதும் மையம் $x-3y-11=0$ என்ற கோட்டிலுள்ளதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.
12. ஆரம் 5 உள்ளதும் மையம் x அச்சிலுள்ளதும் $(2,3)$ என்ற புள்ளியின்வழியாக செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.
13. $(0,0)$இன்வழி செல்வதும் ஒருங்களவச்சுகளுடன் a, b என்ற இடைவெட்டுகளை உண்டாக்குவது மான வட்டத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.
14. $(2,2)$இல் மையமுள்ளதும் $(4,5)$இன்வழி செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.
15. $(-2.5, 3.5)$ என்ற புள்ளி $x^2+y^2=25$ என்ற வட்டத்தின் உள்ளா, வெளியா, மீதா இருக்கிறது?

11.4 பரவளைவு

வரையறை 2 பரவளைவு என்பது ஒரு தளத்தில் நிலையான கோட்டிலிருந்தும் அந்த கோட்டிலில்லாத ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந் தும் சமத்தொலைவிலுள்ள புள்ளிகளின் கணம்.

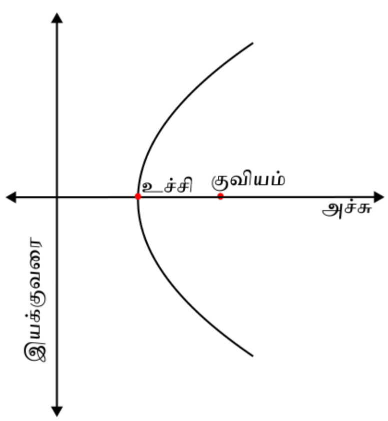
நிலையான கோட்டை பரவளைவின் இயக்குவரை என்றும் புள்ளியை F என்று குறித்து அதை குவியம் என்றும் அழைக்கிறோம். (படம் 11.13). பரவளைய வடிவம் பந்தை காற்றில் எறியும் போது அது செல்லும் பாதை.



படம் 11.13

> குறிப்பு: இந்த நிலையான புள்ளி நிலையான கோட்டில் இருந்தால், தளத்தில் அந்தக் கோட்டிலிருந்தும் புள்ளியிலிருந்தும் சமத் தொலைவிலுள்ள புள்ளிகளின் கணம் புள்ளி யின்வழி கோட்டுக்கு செங்குத்தாகச்செல்லும் ஒரு நேர்க்கோடு. இந்த நேர்க்கோட்டை பரவளை வின் உலைந்தோடு வேற்றுவம் என்கிறோம்.

குவியத்தின்வழி இயக்குவரைக்கு செங்குத் தாக செல்லும் ஒரு கோட்டை பரவளைவின் அச்சு என்று அழைக்கிறோம். பரவளைவு அச்சை இடைவெட்டும் புள்ளியை பரவளைவின் உச்சி என்று அழைக்கிறோம். (படம் 11.14). அச்சு பரவளைவின் ஒரு சமச்சீர்மையச்சு என்பதை நோக்குக.

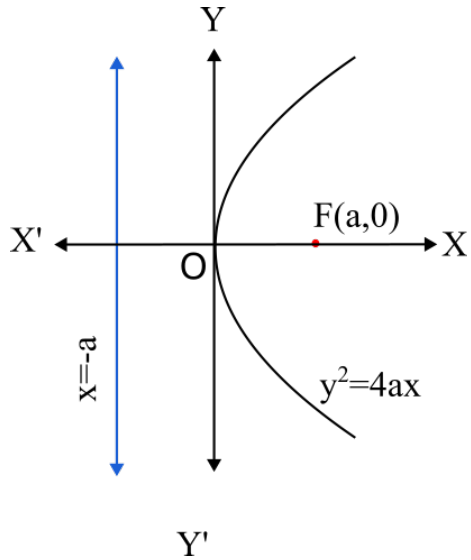


படம் 11.14

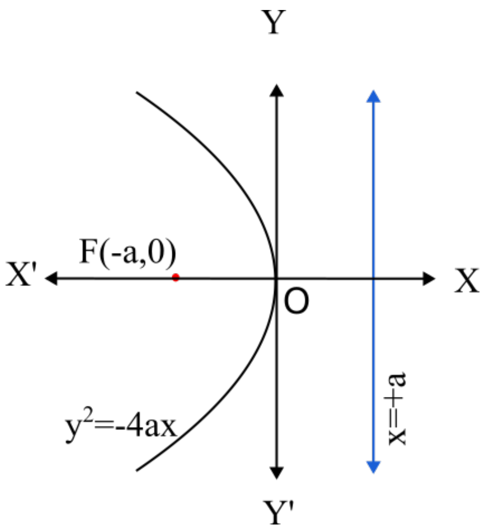
11.4.1 பரவளைவின் செந்தரச்சமன்பாடுகள்

பரவளைவின் உச்சி மூலத்திலும் சமச்சீர்மை யச்சு xஅச்சாகவோ yஅச்சாகவோவும் இருந்தால் சமன்பாடு மீயெளிமையானது. இவ்வாறு சாத்தியமாகும் நான்கு திசையமைவுகளை படம் 11.15 காட்டுகிறது. படம் 11.15(அ)இல் காட்டிய $(a, 0)$ குவியமாகவும் $x=-a$ இயக்குவரையாக வுமுள்ள பரவளைவுக்கான சமன்பாட்டை பெறுவோம்; இங்கு $a>0$.

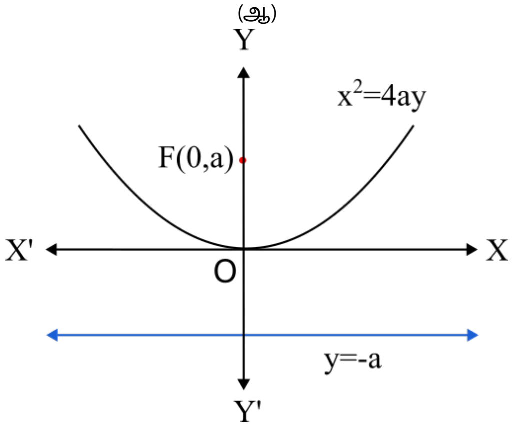
படம் 11.16இல் காட்டியபடி, F குவியமாகவும், l இயக்குவரையாகவுமுள்ள ஒரு பரவளைவை கருதுவோம். படத்தில் பரவளைவின் அச்சை FM என்ற கோடாகவும் உச்சியை O என்றும் காட்டியிருக்கிறோம். பரவளைவின் வரையறை யின்படி FM என்ற கோட்டுத்துண்டை O இருசமவெட்டுகிறது. இப்போது, O வை மூலமாகவும் F இன்வழியாகச்செல்லும் OX ஐ x அச்சாகவும் செங்குத்தான OY ஐ y அச்சாகவும் கொள்வோம்.



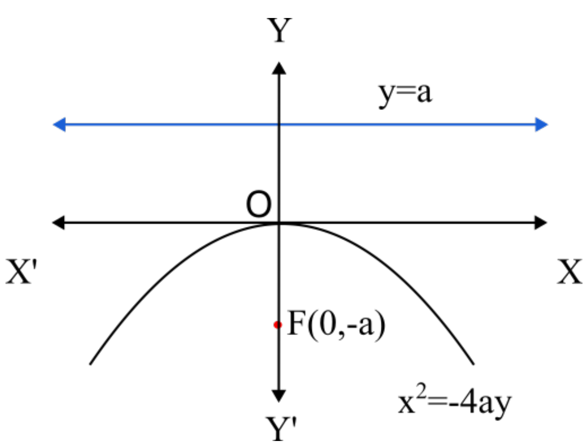
(அ)



(ஆ)

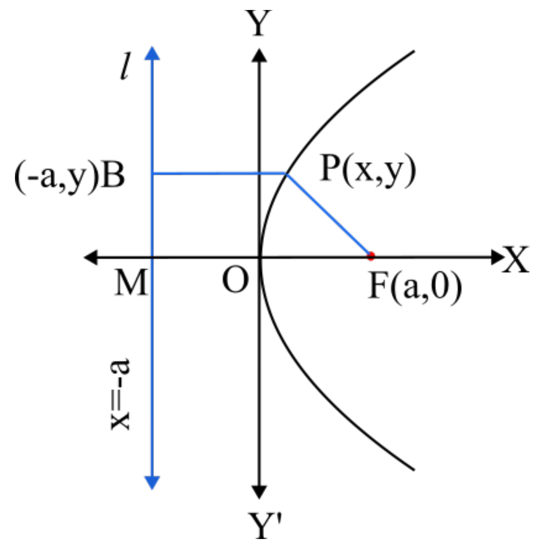


(இ)



(ஈ)

படம் 11.15



படம் 11.16

இயக்குவரையிலிருந்து குவியத்துக்கான தொலைவு $2a$ என்க. அப்படியெனில், குவியத்தின் ஒருங்களவுகள் $(a,0)$ என்றும் இயக்குவரையின் சமன்பாடு $x+a=0$ என்றும் காண்கிறோம். $P(x,y)$ பரவளைவிலுள்ள ஒரு புள்ளி என்க. அப்படியெனில்

$$PF = PB$$

இங்கு, PB இயக்குவரைக்கு செங்குத்தானது. Bயின் ஒருங்களவுகள் $(-a,y)$. தொலைவுவாய்ப்பாட்டால்

$$PF = \sqrt{(x-a)^2+y^2}$$
$$PB = \sqrt{(x+a)^2}$$

என்பனவற்றை பெறுகிறோம். இவற்றை சமமிட்டு

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2} = \sqrt{(x+a)^2}$$

அதாவது

$$(x-a)^2+y^2 = (x+a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
$$y^2 = 4ax, \qquad a > 0$$

என்று பெறுகிறோம். எனவே, பரவளைவிலுள்ள எந்தப்புள்ளியும்

$$y^2 = 4ax \qquad (11.4)$$

என்பதை நிறைவேற்றுகிறது. திருப்புக்கூற்றாக, $P(x,y)$ (11.4) ஆம் சமன்பாட்டை நிறைவேற்றினால்,

$$PF = \sqrt{(x-a)^2+y^2} = \sqrt{(x-a)^2+4ax}$$
$$= \sqrt{(x+a)^2} = PB \qquad (11.5)$$

எனவே $P(x,y)$ பரவளைவின்மீது உள்ளது.

இவ்வாறு, (11.4), (11.5)ஆம் சமன்பாடுகளிலிருந்து உச்சி மூலத்திலும் குவியம் $(a,0)$த்திலுமுள்ள பரவளைவின் சமன்பாடு $y^2 = 4ax$ என்றும் அதன் இயக்குவரை $x=-a$ என்றும் நிறுவியிருக்கிறோம்.

குறிப்பு (11.4) ஆம் சமன்பாட்டில், $a > 0$ என்பதால், x எந்த நேர்ம மதிப்பையோ சுழியத்தையோ எடுக்கலாம்; ஆனால் எதிர்ம மதிப்பை எடுக்கவியலாது; வளைவரை முதல் காற்பகுதியிலும் நான்காம் காற்பகுதியிலும் முடிவின்றி நீள்கிறது. பரவளைவின் அச்சு நேர்ம xஅச்சு.

இதைப்போல்,

படம் 11.15(ஆ)விலுள்ளதற்கு $y^2 = -4ax$ என்றும்

படம் 11.15(இ)யிலுள்ளதற்கு $x^2 = 4ay$ என்றும்

படம் 11.15(ஈ)யிலுள்ளதற்கு $x^2 = -4ay$ என்றும்

பரவளைவுச்சமன்பாடுகளை வருவிக்கலாம்.

இந்த நான்கு சமன்பாடுகளையும் செந்தரச்சமன்பாடுகள் என்கிறோம்.

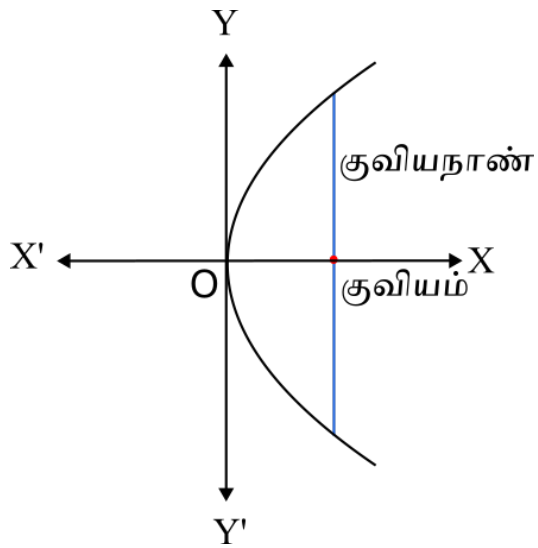
குறிப்புரை பரவளைவுகளின் செந்தரச் சமன்பாடுகள் ஒரு ஒருங்களவச்சில் கவனத்தை குவிக்கின்றன; உச்சியை மூலத்தில் வைத்து இயக்குவரையை மற்ற ஒருங்களவச்சுக்கு இணையாக வைக்கின்றன. எந்தப்புள்ளியும் உச்சியாகவும் எந்தக்கோடும் இயக்குவரையாக வும் உள்ள பரவளைவுகளின் படிப்பு நம் நோக்கவீச்சுக்கு அப்பாற்பட்டது.

படம் 11.14இலிருந்தும் பரவளையங்களின் செந்தரச்சமன்பாடுகளிலிருந்தும் பின்வருவன வற்றை காண்கிறோம்:

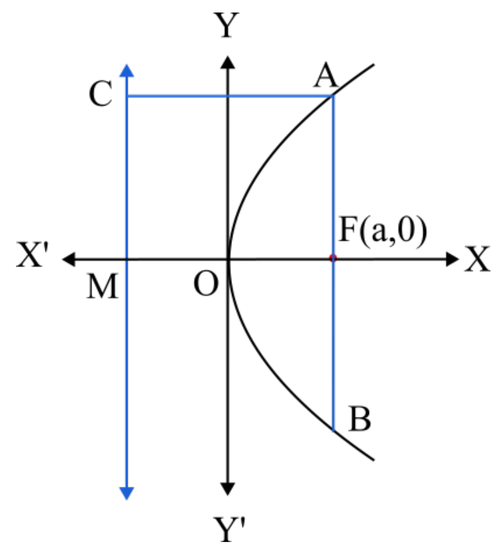
1. பரவளையம் தன் அச்சைப்பற்றி சமச்சீராக உள்ளது. சமன்பாட்டில் y^2 இருந்தால், சமச்சீரச்சு xஅச்சுக்குநேராகவும் x^2 இருந்தால் yஅச்சுக்குநேராகவும் உள்ளது.
2. சமச்சீரச்சு x அச்சுக்குநேராக உள்ளபோது பரவளைவு
3. x இன் கெழு நேர்மம் எனில் வலப்பக்கம் திறந்திருக்கிறது
4. x இன் கெழு எதிர்மம் எனில் இடப்பக்கம் திறந்திருக்கிறது.
5. சமச்சீரச்சு y அச்சுக்குநேராக உள்ளபோது பரவளைவு
6. y இன் கெழு நேர்மம் எனில் மேனோக்கி திறந்திருக்கிறது
7. y இன் கெழு எதிர்மம் எனில் கீழ்நோக்கி திறந்திருக்கிறது.

11.4.2 செங்குவிநாண்

வரையறை 3 ஒரு பரவளைவின் செங்குவிநாண் என்பது பரவளைவின் அச்சுக்கு செங்குத்தாக குவியத்தின்வழியாக செல்வதும் நுனிப்புள்ளி கள் பரவளையத்தில் உள்ளதுமான ஒரு கோட்டுத்துண்டம் (படம் 11.17).



படம் 11.17



படம் 11.18

$y^2 = 4ax$ **என்ற பரவளைவின்** செங்குவிநாணின் **நீளத்தை கண்டறிய (படம் 11.18):**

பரவளையத்தின் வரையறையின்படி, $AF = AC$.

ஆனால் $AC = FM = 2a$

எனவே $AF = 2a$.

பரவளைவு x அச்சைப்பொறுத்து சமச்சீரா யிருப்பதால் $AF = FB$. எனவே

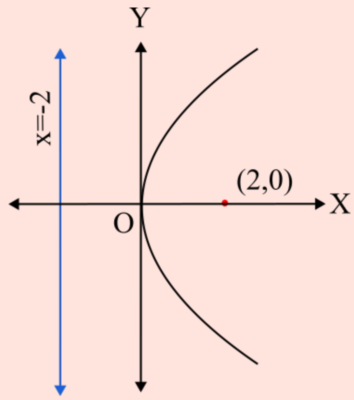
AB = செங்குவிநாணின் நீளம் $= 4a$.

சான்று 5 $y^2 = 8x$ என்ற பரவளைவுக்கு, குவியத்தின் ஒருங்களவுகள், அச்சு, இயக்குவரையின் சமன்பாடு, செங்குவிநாண் ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு சமன்பாட்டில் y^2 இருப்பதால், சமச்சீரச்சு xஅச்சு.

xஇன் கெழு நேர்மமானதால், பரவளைவு வலப்பக்கமாக திறக்கிறது. கொடுத்த பரவளையத்தின் சமன்பாட்டை செந்தரச் சமன்பாடான $y^2 = 4ax$ என்பதுடன் ஒப்பிட்டு $a = 2$ என்று காண்கிறோம்.

இவ்வாறு, பரவளைவின் குவியம் $(2, 0)$; இயக்குவரையின் சமன்பாடு. $x = -2$; குவிய நாணின் நீளம் $4a = 4 \times 2 = 8$. (படம் 11.19).



படம் 11.19

சான்று 6 $(2, 0)$ குவியமாகவும் $x = -2$ இயக்குவரையாகவுமுள்ள பரவளைவின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு $(2, 0)$ என்ற குவியம் x அச்சில் இருப்பதால், x அச்சே பரவளைவின் அச்சு. எனவே, பரவளைவின் சமன்பாடு $y^2 = 4ax$ என்ற வடிவிலோ $y^2 = -4ax$ என்ற வடிவிலோ இருக்கவேண்டும். இயக்குவரை $x = -2$ என்றும் குவியம் $(2,0)$ என்றுமிருப்பதால் பரவளைவு $y^2 = 4ax$ என்ற வடிவத்தில் இருக்கவேண்டும்; இங்கு $a = 2$. எனவே தேவையான சமன்பாடு $y^2 = 4 \times 2x = 8x$.

சான்று 7 உச்சி $(0, 0)$இலும் குவியம் $(0, 2)$இலும் உள்ள பரவளைவின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு உச்சி $(0, 0)$இலும் குவியம் yஅச்சிலுள்ள $(0, 2)$ இலும் இருப்பதால், பரவளைவின் அச்சு yஅச்சு. எனவே, பரவளைவின் சமன்பாடு என்ற $x^2 = 4ay$ என்ற வடிவத்தில் உள்ளது. இதனால்,

$x^2 = 4 \times 2y$ அதாவது $x^2 = 8y$ என்று பெறலாம்.

சான்று 8 $(2, -3)$ என்ற புள்ளியின்வழி செல்வதும் yஅச்சைப்பற்றி சமச்சீரானது மான பரவளைவின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு பரவளைவு yஅச்சைப்பற்றி சமச்சீரானது என்பதால் (மூலத்தில் உச்சியுள்ள பரவளையங்களையே நாம் இங்கு கருதுகிறோம்), சமன்பாடு $x^2 = 4ay$ என்றோ $x^2 = -4ay$ என்றோ உள்ளது; இங்கு குறி பரவளைவு மேல்நோக்கியோ கீழ்நோக்கியோ திறப்பதைப்பொறுத்தது. ஆனால் பரவளைவு கடந்து செல்லும் $(2, -3\ )$ நான்காவது காற்பகுதியில் உள்ளதால், அது கீழ்நோக்கி திறக்க வேண்டும். எனவே சமன்பாடு $x^2 = -4ay$ என்ற வடிவமுள்ளது.

பரவளைவு $(2, -3)$இன்வழி செல்வதால்

$2^2 = -4a\,(-3)$ அதாவது $a = {}^1\!/_3$

எனவே, பரவளைவின் சமன்பாடு

$x^2 = -4({}^1\!/_3)y$

அதாவது $3x^2 = -4y$.

பயிற்சி 11.2

பின்வரும் 1 முதல் 6 வரையான ஒவ்வொரு, பயிற்சியிலும் பரவளையத்தின் அச்சு, குவியத்தின் ஒருங்களவுகள், இயங்குவரையின் சமன்பாடு, செங்குவிநாணின் நீளம்.ஆகியவற்றை காண்க.

1. $y^2 = 12x$
2. $x^2 = 6y$
3. $y^2 = -8x$
4. $x^2 = -16y$
5. $y^2 = 10x$
6. $x^2 = -9y$

7 முதல் 12 வரையிலான ஒவ்வொரு பயிற்சியிலும், கொடுத்துள்ள வரைக்கட்டுகளை நிறைவேற்றும் பரவளைவின் சமன்பாட்டை காண்க.

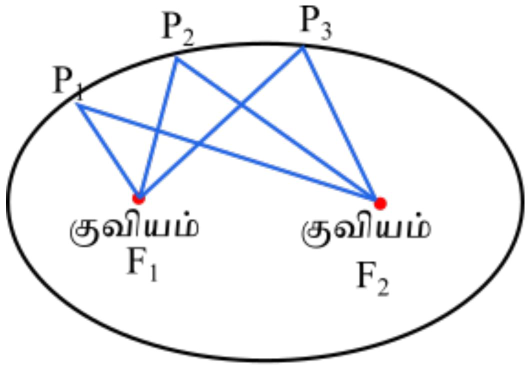
7. குவியம் $(6,0)$; இயக்குவரை $x = -6$
8. குவியம் $(0, -3)$; இயக்குவரை $y = 3$
9. உச்சி $(0,0)$; குவியம் $(3,0)$
10. உச்சி $(0,0)$; குவியம் $(-2,0)$
11. உச்சி $(0,0)$; $(2,3)$இன்வழியாக செல்கிறது: அச்சு xஅச்சுக்குநேராக உள்ளது.
12. உச்சி $(0,0)$; $(5,2)$வழியாக செல்கிறது; அச்சு yஅச்சைப்பொறுத்து சமச்சீராக உள்ளது

11.5 நீளவட்டம்

வரையறை 4 நீளவட்டம் என்பது ஒரு தளத்திலுள்ள இரண்டு நிலையான புள்ளிகளி லிருந்துள்ள தொலைவுகளின் கூட்டுத்தொகை மாறிலியாகும்படியான புள்ளிகளின் கணம். அதாவது, F_1 , F_2 நிலையான புள்ளிகள் எனில் $PF_1 + PF_2$ மாறிலியாயிருக்கும்படியான P என்ற புள்ளிகளின் கணம் நீளவட்டம். இந்த F_1, F_2 என்ற இரண்டு நிலையான புள்ளிகளை நீளவட்டத்தின் *குவியங்கள்* என்கிறோம் (படம் 11.20).

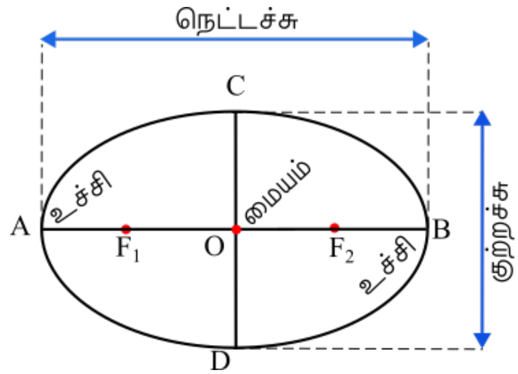
குறிப்பு நீளவட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளிக்கும் இரண்டு நிலையான புள்ளிகளுக்குமுள்ள தொலைவுகளின் கூட்டுத்தொகை ஒரு மாறிலி என்றோம். இந்த மாறிலி இரண்டு நிலையான புள்ளிகளுக்கிடையான தொலைவைவிட எப்பொழுதும் அதிகமாகவே இருக்கும்.

குவியங்களை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டத்தின் மையப்புள்ளியை நீளவட்டத்தின் *மையம்* என்கிறோம். குவியங்களின்வழி நீளவட்டத்தின் புள்ளிகள்வரை செல்லும் கோட்டுத்துண்டத்தை நெட்டச்சு என்றும் மையத்தின் வழியாக நெட்டச்சுக்கு செங்குத்தாக நீளவட்டத்தின் புள்ளிகள்வரை செல்லும் கோட்டுத்துண்டத்தை குற்றச்சு என்றும் சொல்கிறோம். நெட்டச்சின் நுனிப்புள்ளிகளை நீளவட்டத்தின் உச்சிகள் என்கிறோம் (படம் 11.21).



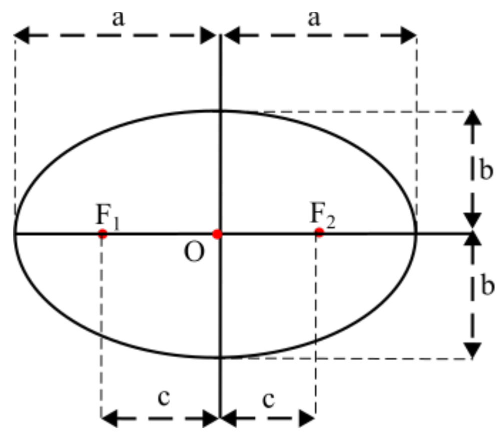
$$P_1F_1+P_1F_2=P_2F_1P_2F_2=P_3F_1P_3F_2$$

படம் 11.20



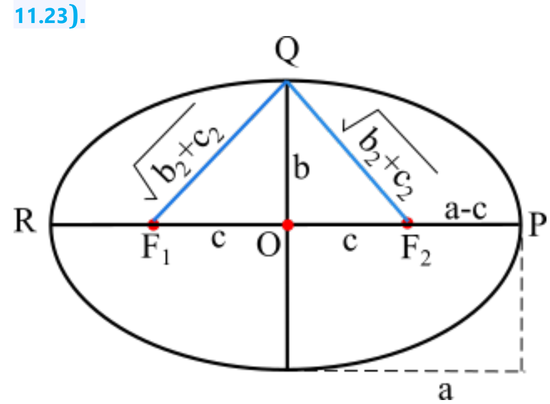
படம் 11.21

நெட்டச்சின் நீளத்தை $2a$ என்றும் குற்றச்சின் நீளத்தை $2b$ என்றும் குவியங்களிடையான தொலைவை $2c$ என்றும் குறிக்கிறோம். அப்படியெனில், a அரைநெட்டச்சின் நீளமும் b அரைக்குற்றச்சின் நீளமும் ஆகின்றன (படம் 11.22).



படம் 11.22

11.5.1 அரைநெட்டச்சு, அரைக்குற்றச்சு, நீளவட்டத்தின் மையத்திலிருந்து குவியத்தின் தொலைவு ஆகியவற்றிடையான உறவு (படம் 11.23).



படம் 11.23

நெட்டச்சின் ஒரு நுனியிலுள்ள P என்ற புள்ளியை கருதுக. இந்தப்புள்ளியிலிருந்து குவியங்கள்வரையிலான தொலைவுகளின் கூட்டுத்தொகை $F_1 P + F_2 P = F_1 O + OP + F_2 P$

இந்த கூட்டுத்தொகை $= c + a + a - c = 2a$.

குற்றச்சின் ஒரு நுனியிலுள்ள Q என்ற புள்ளியை கருதுக. Qவிலிருந்து குவியங்கள்வரையிலான தொலைவுகளின் கூட்டுத்தொகை

$$F_1Q + F_2\,Q = \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{b^2+c^2}$$
$$= 2\sqrt{b^2+c^2}$$

P, Q ஆகிய இரண்டும் நீளவட்டத்தில் இருப்பதால், நீளவட்டத்தின் வரையறையின்படி,

$2\sqrt{b^2+c^2} = 2a;$

அதாவது, $a = \sqrt{b^2+c^2}$

$a^2 = b^2 + c^2$

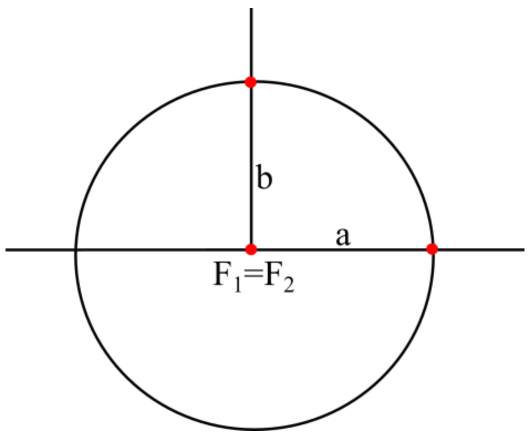
அதாவது, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

11.5.2 நீளவட்டத்தின் தனித்துவ வேற்றுவங்கள்

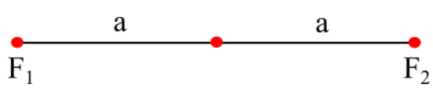
மேல் பெற்ற $c^2 = a^2 - b^2$ என்ற சமன்பாட்டில் நாம் a வை நிலையாக வைத்து c யை சுழியத்தி லிருந்து a வரை மாற்றினால் நீளவட்டத்தின் வடிவம் பின்வருமாறு மாறுகிறது.

வேற்றுவம் (அ) $c = 0$ என்றபோது, இரண்டு குவியங்களும் நீளவட்டத்தின் மையத்துடன் ஒன்றுசேர்ந்து $a^2 = b^2$, அதாவது, $a = b$, என்றாகி நீளவட்டம் வட்டமாகிறது (படம் 11.24). எனவே, 11.3ஆம் பகுதியில் விவரித்த வட்டம் நீளவட்டத்தின் தனித்துவவேற்றுவம்.

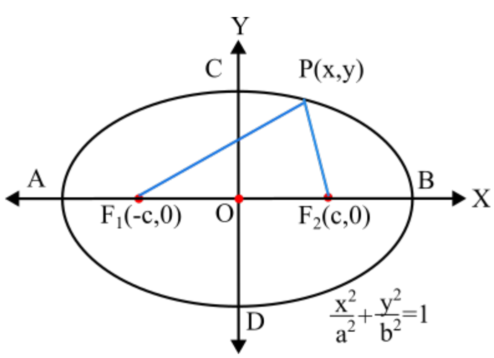
வேற்றுவம் (ஆ) $c = a$ எனில் $b = 0$. நீளவட்டம் குவியங்களை இணைக்கும் F_1F_2 என்ற கோட்டுத்துண்டாக குறைகிறது (படம் 11.25).



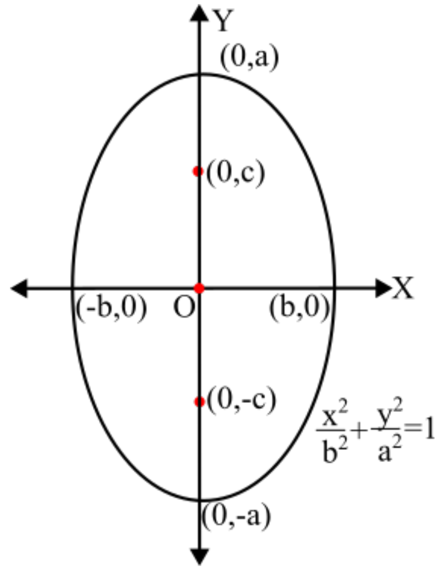
படம் 11.24



படம் 11.25



(அ)



(ஆ)

படம் 11.26

11.5.3 மையமகன்மை

வரையறை 5 நீளவட்டத்தின் மையமகன்மை என்பது மையத்திலிருந்து நீளவட்டத்தின் ஒரு குவியத்துக்கும் ஒரு உச்சிக்குமுள்ள தொலைவுக ளின் விகிதம். மையமகன்மையை e என்று குறிக்கிறோம். அதாவது $e = c/a$.

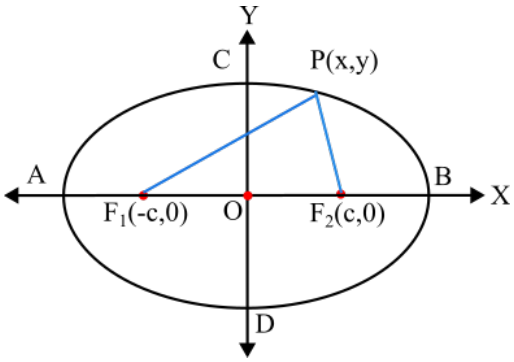
குவியம் மையத்திலிருந்து c தொலைவில் இருப்பதால், மையமகன்மையின்வழியில், மையத்திலிருந்து ae தொலைவில் குவியம் இருப்பதாகவும் சொல்லலாம்.

11.5.4 நீளவட்டத்தின் செந்தரச்சமன்பாடுகள்

நீளவட்டத்தின் மையம் மூலத்திலும் குவியங்கள் x அச்சிலோ y அச்சிலோவும் இருந்தால், ஒரு நீளவட்டத்தின் சமன்பாடு மிகவும் எளிமையானது இந்த இரண்டு சாத்தியமான திசையமைவுகளையும் படம் 11.26 காட்டுகிறது.

xஅச்சில் குவியம் இருக்குமாறு மேற்படத்தில் காட்டிய நீளவட்டத்தின் சமன்பாட்டை வருவிப்போம்.

படம் 11.27இல் காட்டியபடி, குவியங்களை F_1, F_2 என்றும் அவற்றை இணைக்கும் கோட்டின் நடுப்புள்ளியை O என்றும் குறிப்போம். Oவை மூலமாகவும் OF_2ஐ நேர்ம xஅச்சாகவும் கொள்வோம். அப்படியெனில் OF_1 எதிர்ம xஅச்சு. Oவின்வழி x அச்சுக்கு செங்குத்தாக yஅச்சு செல்கிறது F_1, F_2 ஆகியவற்றின் ஒருங்களவுகள் முறையே $(-c, 0)$, $(c, 0)$ என்க.



படம் 11.27

நீளவட்டத்திலுள்ள $P(x,y)$ என்ற ஏதோவொரு புள்ளியை கருதுக. Pயிலிருந்து இரண்டு குவியங்களுக்குமுள்ள தொலைவுகளின் கூட்டுத்தொகை $2a$. எனவே,

$$PF_1 + PF_2 = 2a \qquad (11.6)$$

தொலைவுவாய்ப்பாட்டை பயன்படுத்தி

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

அதாவது

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

என்று பெறுகிறோம். இருபுறமும் வர்க்கமாக்கி

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$$

என்றும், இதை எளிமையாக்கி

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a - {}^{c}/_{a}\, x$$

என்றும் பெறுகிறோம். மீண்டும் வர்க்கமாக்கி எளிமையாக்கி

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

அதாவது

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

என்று பெறுகிறோம். ஏனெனில், $c^2 = a^2 - b^2$

எனவே நீளவட்டத்திலுள்ள எந்தப்புள்ளியும்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (11.7)$$

என்ற சமன்பாட்டை நிறைவேற்றுகிறது.

திருப்புக்கூற்றாக, $P\,(x,y)$ (11.7) ஆம் சமன்பாட்டை நிறைவுசெய்வதாக கொள்வோம். அப்போது,

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

எனவே, ($b^2 = a^2 - c^2$) என்பதை பயன்படுத்தி

$$PF_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$= \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left[\frac{a^2-x^2}{a^2}\right]}$$

$$= \sqrt{(x+c)^2 + (a^2-c^2)\left[\frac{a^2-x^2}{a^2}\right]}$$

$$= \sqrt{\left(a+\frac{cx}{a}\right)^2} = a + \frac{c}{a}x$$

என்று பெறுகிறோம். இவ்வாறே

$$PF_2 = a - \frac{a}{c}x$$

எனவே,

$$PF_1 + PF_2 = a + \frac{c}{a}x + a - \frac{c}{a}x = 2a \qquad (11.8)$$

இவ்வாறு,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

என்ற சமன்பாட்டை நிறைவேற்றும் எந்தப் புள்ளியும் வடிவிய வரைக்கட்டையும் நிறைவேற்றுகிறது. எனவே $P(x,y)$ நீளவட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ளது.

எனவே, (11.7), (11.7) ஆகிய சமன்பாடுகளால், மூலத்தில் மையமும் xஅச்சு நெட்டச்சாகவுமுள்ள நீளவட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

என்று நிறுவியிருக்கிறோம்.

> **குறிப்பு** மேலே பெற்ற நீளவட்டச்சமன்பாட்டிலிருந்து நீளவட்டத்திலுள்ள $P\,(x,y)$ என்ற ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும்
>
> $$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{y^2}{b^2}\right) \le 1, \quad \text{அதாவது}, x^2 \le a^2,$$
>
> $$\text{அதாவது} -a \le x \le a$$
>
> என்று காண்கிறோம். எனவே நீளவட்டம் $x = -a$ என்ற கோட்டுக்கும் $x = a$ என்ற கோட்டுக்குமிடையில் கிடக்கிறது; இந்த கோடுகளை தொடுகிறது. இதைப்போலவே, நீளவட்டம் $y = -b$ என்ற கோட்டுக்கும் $y = b$ என்ற கோட்டுக்குமிடையில் கிடப்பதையும் அந்த கோடுகளை தொடுவதையும் நீங்கள் எளிதில் சரிபார்க்கலாம்.

இதே முறையை பின்பற்றி படம் 11.26(ஆ)வில் காட்டிய நீளவட்டத்தின் சமன்பாட்டை

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

என்று வருவிக்கலாம்.

இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளையும் நீளவட்டங்களின் செந்தரச்சமன்பாடுகள் என அழைக்கிறோம்.

> **குறிப்பு** செந்தரச்சமன்பாடுகள் மையம் மூலத்திலும் நெட்டச்சும் குற்றச்சும் ஒருங்கள வச்சுகளிலும் உள்ள நீளவட்டங்களை விவரிக்கின்றன. வேறு ஏதாவதொரு புள்ளியில் மையமும், மையத்தின்வழி

செல்லும் எந்தக்கோட்டிலும் நெட்டச்சும் மையத்தின்வழி நெட்டச்சுக்குச்செங்குத்தாக செல்லும் குற்றச்சும் உள்ள நீளவட்டங்கள் நம் நோக்கவீச்சுக்கு அப்பாற்பட்டவை.

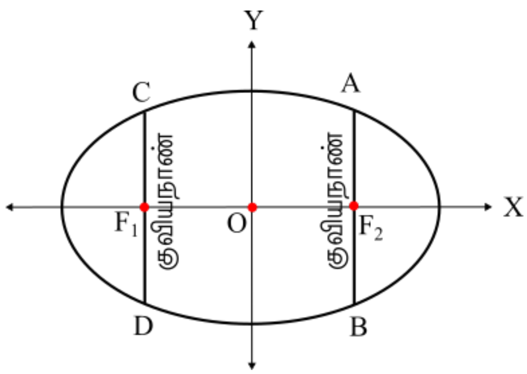
நீளவட்டங்களின் செந்தரச்சமன்பாடுகளிலிருந்து (படம் 11.26) கீழ்க்கண்டவற்றை காண்கிறோம்:

1. நீளவட்டம் இரு ஒருங்களவச்சுகளைப் பற்றியும் சமச்சீரானது; ஏனெனில், (x,y) நீளவட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி எனில் $(-x,y)$, $(x,-y)$, $(-x,-y)$ ஆகியவையும் நீளவட்டத்திலுள்ள புள்ளிகள்.

2. குவியங்கள் எப்போதும் நெட்டச்சில் இருக்கின்றன. சமச்சீரச்சுகளில் இடைவெட்டுகளை கண்டறிவதன்மூலம் நெட்டச்சை தீர்மானிக்கலாம். அதாவது, x^2 இன் கெழுவின் கீழ்க்காரணி பெரிதெனில் நெட்டச்சு x அச்சுக்குநேராகவும், y^2 இன் கீழ்க்காரணி பெரிதெனில் yஅச்சுக்குநேராகவும் இருக்கிறது.

11.5.5 செங்குவிநாண்

வரையறை 6 ஒரு நீளவட்டத்தின் செங்குவிநாண் ஒரு குவியத்தின்வழி நெட்டச்சுக்கு செங்குத்தாக செல்வதும் நுனிப்புள்ளிகள் நீளவட்டத்தில் இருப்பதுமான ஒரு கோட்டுத்துண்டம்.(படம் 11.28)



படம் 11.28

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

என்ற நீளவட்டத்தின் செங்குவிநாணின் நீளத்தை காண:

AF_2 இன் நீளம் l என்போம். அப்படியெனில் Aஇன் ஒருங்களவுகள் (c,l); அதாவது, (ae,l). A நீளவட்டத்தில் இருப்பதால்,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{அதாவது}, \frac{(ae)^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow l^2=b^2(1-e^2)$$

ஆனால்

$$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}$$

எனவே,

$$l^2=\frac{b^4}{a^2}, \quad \text{அதாவது } l=\frac{b^2}{a}$$

நீளவட்டம் இரண்டு அச்சுகளைப்பற்றியும் சமச்சீரானது. yஅச்சைப்பற்றி சமச்சீரானது என்பதிலிருந்து $AF_2=F_2B$ என்றும் செங்குவிநாணின் நீளம் $2b^2/a$ என்றும் காண்கிறோம்.

சான்று 9

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

என்ற நீளவட்டத்தின் குவியங்களின் ஒருங்களவுகள், உச்சிகள், நெட்டச்சின் நீளம், குற்றச்சின் நீளம் மையமகன்மை செங்குவிநாணின் நீளம் ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு $x^2/25$ இன் கீழ்க்காரணி $y^2/9$ இன் கீழ்க்காரணியைவிட பெரியதாக உள்ளதால், நெட்டச்சு xஅச்சில் உள்ளது. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுடன்

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

என்பதை ஒப்பிட்டு

$a=5, \quad b=3.$,

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}$$
$$=4$$

என்று பெறுகிறோம். எனவே, குவியங்களின் ஒருங்களவுகள் $(-4,0)$, $(4,0)$; உச்சிகள் $(-5,0),(5,0)$. நெட்டச்சின் நீளம் $2a=10$; குற்றச்சின் நீளம் $2b=6$; மையமகன்மை $4/5$; செங்குவிநாண் $2b^2/a=18/5$.

சான்று 10 $9x^2+4y^2=36$ என்ற நீளவட்டத்தின் குவியங்களின் ஒருங்களவுகள், உச்சிகள், நெட்டச்சுக்குற்றச்சுகளின் நீளங்கள், மையமகன்மை ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு கொடுத்த நீளவட்டத்தின் சமன்பாட்டை செந்தரவடிவில்

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

என்று எழுதலாம். $y^2/9$இன் கீழ்க்காரணி $x^2/4$இன் கீழ்க்காரணியைவிட பெரிதாயிருப்பதால், நெட்டச்சு yஅச்சில் உள்ளது. கொடுத்த சமன்பாட்டை

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

என்ற செந்தரச்சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிட்டு

$$b=2, \quad a=3$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

என்று பெறுகிறோம். எனவே குவியங்கள் $(0,5),(0,-5)$; உச்சிகள் $(0,3),(0,-3)$;

நெட்டச்சின் நீளம் 6, குற்றச்சின் நீளம் 4; மையமகன்மை $\sqrt{5}/_3$.

சான்று 11 உச்சிகள் $(\pm 13, 0)$ என்றும் குவியங்கள் $(\pm 5, 0)$ என்றுமுள்ள நீளவட்டத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு உச்சிகள் x அச்சில் இருப்பதால், சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

என்ற வடிவத்தில் இருக்கவேண்டும்; இங்கு a அரைநெட்டச்சு.

$$a=13, c=\ 5$$

என்று கொடுத்திருப்பதால், $c^2=a^2-b^2$ என்ற உறவிலிருந்து

$$25=169-b^2,\qquad \text{அதாவது } b=12$$

என்று பெறுகிறோம். எனவே நீளவட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$$

சான்று 12 நெட்டச்சுநீளம் 20ஆகவும் குவியங்கள் $(0, \pm 5)$ இலுமுள்ள நீளவட்டத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு குவியங்கள் yஅச்சில் இருப்பதால், நெட்டச்சு yஅச்சில் உள்ளது. எனவே, நீளவட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

என்ற வடிவமுள்ளது.

$$a=\text{அரைநெட்டச்சு}=20/_2=10.$$

எனவே, $c^2=a^2-b^2$ என்ற உறவிலிருந்து, $5^2=10^2-b^2$, அதாவது $b^2=75$ என்று பெறுகிறோம்.

எனவே நீளவட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{75}+\frac{y^2}{100}=1$$

சான்று 13 நெட்டச்சு x அச்சிலுள்ளதும் $(4,3)$, $(-1,4)$ ஆகிய புள்ளிகளின்வழியாக செல்வதுமான நீளவட்டச்சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு நீளவட்டத்தின் செந்தரவடிவம்

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$(4,3), (-1,4)$ ஆகியவை நீளவட்டத்தில் உள்ளதால்,

$$\frac{16}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1$$

இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளையும் தீர்த்து,

$$a^2=\frac{247}{7},\qquad b^2=\frac{247}{15}$$

என்று பெறுகிறோம். எனவே தேவையான சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{\left(\frac{247}{7}\right)}+\frac{y^2}{\left(\frac{247}{15}\right)}=1$$

அதாவது

$$7x^2+15y^2=247$$

பயிற்சி 11.3

1 முதல் 9 வரையிலான ஒவ்வொரு பயிற்சியிலும் நீளவட்டத்தின் குவியங்களின் ஒருங்களவுகள், உச்சிகள், நெட்டச்சுநீளம், குற்றச்சுநீளம், மையமகன்மை, செங்குவிநாணின் நீளம் ஆகியவற்றை காண்க.

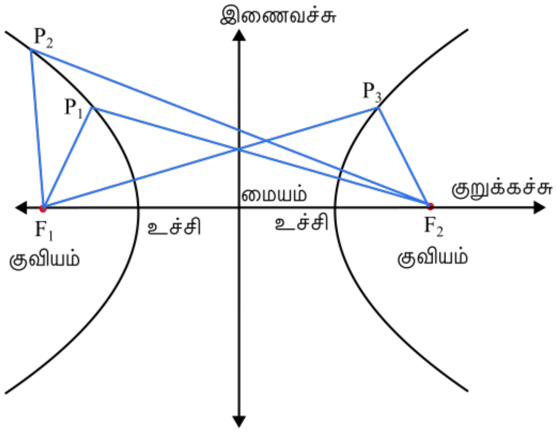
1. $$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$$
2. $$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$$
3. $$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$
4. $$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$$
5. $$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$$
6. $$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{400}=1$$
7. $$36x^2+4y^2=144$$
8. $$16x^2+y^2=16$$
9. $$4x^2+9y^2=36$$

10 முதல் 20 வரையான ஒவ்வொரு பயிற்சியிலும், வரைக்கட்டுகளை நிறைவுசெய்யும் நீளவட்டத்தின் சமன்பாட்டை காண்க:

10. உச்சிகள் $(\pm 5,0)$, குவியங்கள் $(\pm 4,0)$
11. உச்சிகள் $(0,\pm 13)$, குவியங்கள் $(0,\pm 5)$
12. உச்சிகள் $(\pm 6,0)$, குவியங்கள் $(\pm 4,0)$
13. நெட்டச்சின் நுனிகள் $(\pm 3,0)$, குற்றச்சின் நுனிகள் $(0,\pm 2)$
14. நெட்டச்சின் நுனிகள் $(0,\pm\sqrt{5})$, குற்றச்சின் நுனிகள் $(\pm 1,0)$
15. நெட்டச்சுநீளம் 26, குவியங்கள் $(\pm 5,0)$
16. குற்றச்சுநீளம் 16, குவியங்கள் $(0,\pm 6)$
17. குவியங்கள் $(\pm 3,0), a = 4$
18. $b = 3, c = 4$, மையம் மூலத்திலும் குவியங்கள் xஅச்சிலும்
19. மையம் $(0,0)$; நெட்டச்சு yஅச்சில்; $(3,2), (1,6)$ வழியாக செல்கின்றது.
20. நெட்டச்சு xஅச்சில்; $(4,3), (6,2)$ வழியாக செல்கின்றது.

11.6 அதிபரவளைவு

வரையறை 7 அதிபரவளைவு என்பது ஒரு தளத்திலுள்ள இரண்டு நிலையான புள்ளிகளிலிருந்துள்ள தொலைவுகளின் வேறுபாடு மாறிலியாக இருக்கும்படியான புள்ளிகளின் கணம். அதாவது, F_1, F_2 நிலையான புள்ளிகள் எனில் $PF_1 - PF_2$ மாறிலியாயிருக்கும் படியான P என்ற புள்ளிகளின் கணம் அதிபரவளைவு.

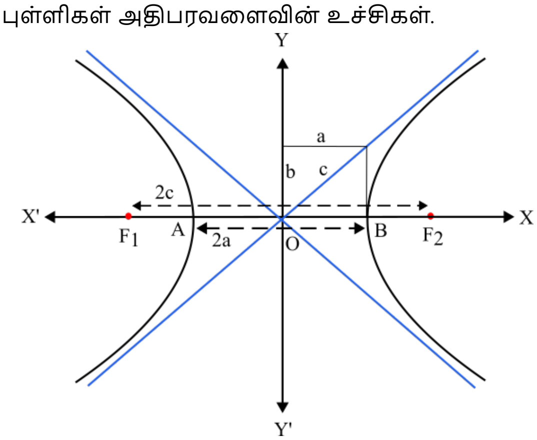


$\mathrm{P_1F_2\text{-}P_1F_1 = P_2F_2\text{-}P_2F_1 = P_3F_1\text{-}P_3F_2}$

படம் 11.29

வரையறையில் பயன்படும் வேறுபாடு என்ற சொல் சேய்மைப்பள்ளியின் தொலைவிலிருந்து அண்மைப்புள்ளியின் தொலைவை கழித்ததை குறிக்கிறது. இந்த F_1, F_2 என்ற இரண்டு நிலையான புள்ளிகளை அதிபரவளைவின் குவியங்கள் என்கிறோம் (படம் 11.29).

குவியங்களை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளியை அதிபரவளைவின் மையம் என்கிறோம். குவியங்களின்வழி செல்லும் கோட்டை குறுக்கச்சு என்றும் மையத்தின்வழியாகவும் குறுக்கச்சுக்கு செங்குத்தாகவும் செல்லும் கோட்டை இணைவச்சு என்றும் அழைக்கிறோம். குறுக்கச்சை அதிபரவளைவு இடைவெட்டும் புள்ளிகள் அதிபரவளைவின் உச்சிகள்.



படம் 11.30

குவியங்களிடைத்தொலைவை $2c$ என்றும், உச்சிகளிடைத்தொலைவை (குறுக்கச்சின் நீளம்) $2a$ என்றும் குறிக்கிறோம், மேலும்

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

என்று வரையறுத்தால், $2b$ இணைவச்சின் நீளமாகிறது. (படம் 11.30).

$P_1F_2 - P_1F_1$ என்ற மாறிலியை காண:

படம் 11.30இல் A, B என்ற புள்ளிகளை கருதி, அதிபரவளைவின் வரையறையின்படி,

$$BF_1 - BF_2 = AF_2 - AF_1$$

என்று பெறுகிறோம். BF_1 ஐ $BA + AF_1$ என்று எழுதலாம் என்பதால், இந்த சமன்பாடு

$$BA + AF_1 - BF_2 = AB + BF_2 - AF_1,$$

அதாவது $AF_1 = BF_2$

என்றாகிறது. எனவே நமக்கு வேண்டிய மாறிலி

$$BF_1 - BF_2 = BA + AF_1 - BF_2 = BA = 2a.$$

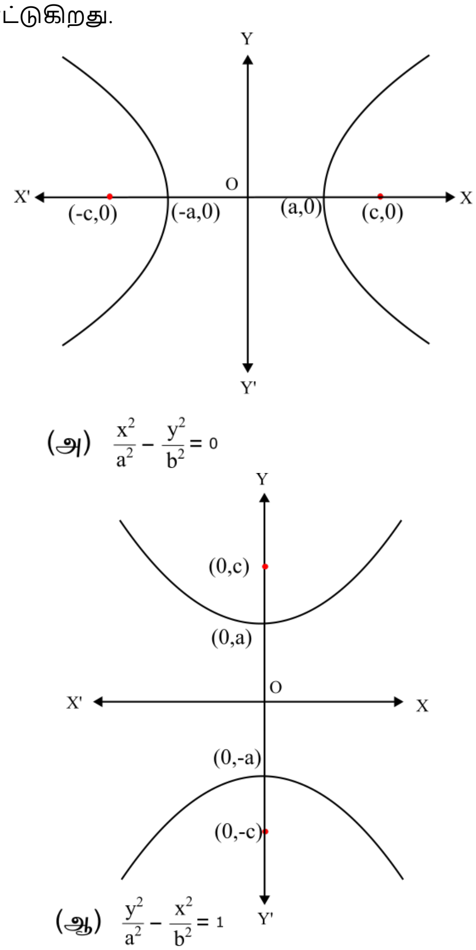
11.6.1 மையமகன்மை

வரையறை 8 நீளவட்டத்தில்போலவே $e = {}^{c}/_{a}$ என்ற விகிதத்தை அதிபரவளைவின் மையமகன்மை என்று அழைக்கிறோம். $c \geq a$

என்பதால், மையமகன்மை ஒருபோதும் ஒன்றைவிட குறையாது. மையமகன்மையின் அடிப்படையில், குவியங்கள் மையத்திலிருந்து ae தொலைவில் உள்ளன.

11.6.2 அதிபரவளைவின் செந்தரச்சமன்பாடு

அதிபரவளைவின் மையம் மூலத்திலும் குவியங்கள் x அச்சிலோ y அச்சிலோவும் இருந்தால் அதிபரவளைவின் சமன்பாடு மிகவும் எளிமையானது. இத்தகைய இரண்டு சாத்தியமான திசையமைவுகளையும் படம் 11.31 காட்டுகிறது.

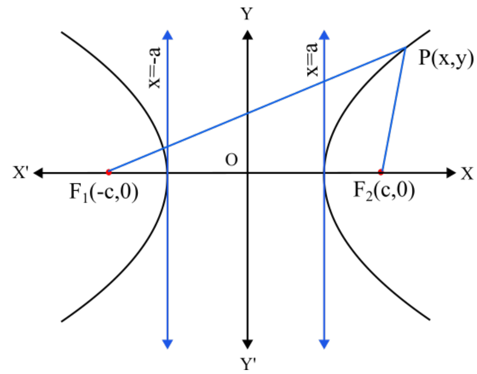


படம் 11.31

படம் 11.31(அ)வில் காட்டியபடி x அச்சில் குவியமுள்ள அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டை வருவிப்போம்.

F_1 , F_2 ஆகியவற்றை குவியங்களாகவும், O வை F_1F_2 என்ற கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளியாகவும் கொள்வோம். O வை மூலமாகவும் O விலிருந்து F_2 இன்வழி செல்லும் கோட்டை நேர்ம xஅச்சாகவும் , F_1இன்வழி வரும் கோட்டை எதிர்ம அச்சாகவும் கொள்வோம். அப்படியெனில், x அச்சுக்கு செங்குத்தாக O இன்வழி செல்லும் கோடு y அச்சு. F_1 இன் ஒருங்களவுகள் $(-c,0)$ என்க; F_2 $(c,0)$ என்க (படம் 11.32).

$P(x,y)$ அதிபரவளைவில் ஒரு புள்ளி என்க. Pயிலிருந்து சேய்மைக்குவியத்துக்கும் அண்மைக்குவியத்துக்குமுள்ள தொலைவுகளின் வேறுபாடு $2a$ அதாவது $PF_1 - PF_2 = 2a$.



படம் 11.32

தொலைவுவாய்ப்பாட்டை பயன்படுத்தி

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

அதாவது

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

என்று பெறுகிறோம். இருபுறமும் வர்க்கமாக்கி

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+(x-c)^2+y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

என்றும், மேலும் எளிமையாக்கி

$$\frac{cx}{a}-a=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

என்றும் பெறுகிறோம். மீண்டும் வர்க்கமாக்கி மேலும் எளிமையாக்கும்போது,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

அதாவது

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

கிடைக்கிறது: ஏனெனில் $c^2-a^2=b^2$. எனவே அதிபரவளைவிலுள்ள எந்தவொரு புள்ளியும்

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

என்ற சமன்பாட்டை நிறைவுசெய்கிறது.

திருப்புக்கூற்றாக, $P(x,y)$ மேற்கண்ட சமன்பாட்டை நிறைவுசெய்வதாக கொள்வோம்.

$$y^2=b^2\left(\frac{x^2-a^2}{a^2}\right)$$

எனவே,

$$PF_1 = +\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
$$= +\sqrt{(x+c)^2+b^2\left(\frac{x^2-a^2}{a^2}\right)}$$
$$= a + \frac{c}{a}x$$

இதைப்போலவே,

$$PF_2 = a - \frac{a}{c}x$$

அதிபரவளைவில் c $> a$; P $x = a$ என்ற கோட்டுக்கு வலப்பக்கமாக இருப்பதால், $x > a$. அதனால், ${}^{c}/_{a}\, x > a$. எனவே, $a - {}^{c}/_{a}\, x$ எதிர்மமாகிறது. அதாவது

$$PF_2 = \frac{c}{a}x - a$$

எனவே

$$PF_1 - PF_2 = a + \frac{c}{a}x - \frac{c}{a}x + a = 2a$$

மேலும், P $x = -a$ என்ற கோட்டின் இடதுபுறத்தில் இருந்தால்,

$$PF_1 = -\left[a + \frac{c}{a}x\right], \qquad PF_2 = a - \frac{c}{a}x$$

இந்த வேற்றுவத்தில், $PF_2 - PF_1 = 2a$. இவ்வாறு,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

என்ற சமன்பாட்டை நிறைவுசெய்யும் எந்தப்புள்ளியும் அதிபரவளயத்தில் உள்ளது.

இவ்வாறு, உச்சி மூலத்திலும் குறுக்கச்சு zஅச்சுக்குநேராகவுமுள்ள ஒரு அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

என்று நிறுவியிருக்கிறோம்.

இதைப்போல், படம் 11.31(ஆ)வில் காட்டியதுபோல் உச்சி மூலத்திலும் குறுக்கச்சு yஅச்சுக்குநேராகவுமுள்ள ஒரு அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

என்று காணலாம்.

இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளும் அதிபரவளைவின் செந்தரச்சமன்பாடுகள்.

குறிப்பு $a = b$ என்றுள்ள ஒரு அதிபரவளைவை சமப்பக்க அதிபரவளைவு என்று அழைக்கிறோம்.

குறிப்பு மேற்கண்ட

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து, அதிபரவளைவிலுள்ள ஒவ்வொரு (x, y) என்ற புள்ளியிலும்

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2}, \qquad \text{அதாவது } \left|\frac{x}{a}\right| \geq 1$$

என்பது விளங்குகிறது. அதாவது $x \leq -a$ என்றோ $x \geq a$ என்றோ இருக்கவேண்டும். எனவே, அதிபரவளைவின் எந்தப்பகுதியும் $x = +a$, $x = -a$ ஆகிய கோடுகளுக்கிடையில் இல்லை; அதாவது, இணைவச்சில் மெய்யிடைவெட்டல் இல்லை.

குறிப்பு செந்தரச்சமன்பாடுகள் மையம் மூலத்திலும் குறுக்கச்சும் இணைவச்சும் ஒருங்களவுச்சுகளுக்குநேராகவும் உள்ள அதிபரவளைவுகளை விவரிக்கின்றன. வேறு புள்ளியில் மையமும் அதன்வழி செல்லும் இரண்டு செங்குத்துக்கோடுகள் அச்சுகளாகவுமுள்ள அதிபரவளைவுக்கள் உள்ளன. அத்தகைய வேற்றுவங்களைப்பற்றி உயர் வகுப்புகளில் படிப்பீர்கள்.

அதிபரவளைவுக்களின் செந்தரச்சமன்பாடுகளிலிருந்து (படம் 11.29) கீழ்க்கண்டவற்றை அறிகிறோம்.

1. அதிபரவளைவு இரண்டு அச்சுகளையும் பற்றி சமச்சீரானது. (x, y) அதிபரவளைவில் ஒரு புள்ளி எனில் $(-x, y)$, (x, y), $(x, -y)$, $(-x, -y)$ ஆகிய புள்ளிகளும் அதிபரவளை வில் உள்ளன.
2. குவியங்கள் எப்போதும் குறுக்கச்சில் உள்ளன. நேர்மவுருபின் கீழ்க்காரணி குறுக்கச்சை தருகிறது. சான்றாக,

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

என்ற அதிபரவளைவின் குறுக்கச்சு xஅச்சுக்குநேராக உள்ளது. அதன் நீளம் 6.

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$$

என்பதன் குறுக்கச்சு yஅச்சு; நீளம் 10.

11.6.3 செங்குவிநாண்

வரையறை 9 அதிபரவளைவின் செங்குவிநாண் என்பது குறுக்கச்சுக்கு செங்குத்தாக ஒரு குவியத்தின்வழியே செல்வதும் நுனிப்புள்ளிகள் அதிபரவளையத்தில் இருப்பதுமான ஒரு கோட்டுத்துண்டம்.

நீள்வட்டத்தில் கண்டதுபோலவே, அதிபரவளைவின் செங்குவிநாணின் நீளம் ${}^{2b^2}/_{a}$ என்று காண்பது எளிது.

சான்று 14 (அ)

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

(ஆ) $y^2 - 16x^2 = 16$

ஆகிய அதிபரவளைவுகளின் குவியங்கள், உச்சிங்கள் ஆகியவற்றின் ஒருங்களவுகள்,

மையமகன்மை, செங்குவிநாணின் நீளம் ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு (அ)

$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$$

என்ற சமன்பாட்டை செந்தரச்சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிட்டு

$$a=3, b,=4, c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}\ =5$$

என்று காண்கிறோம். எனவே, குவியங்களின் ஒருங்களவுகள் $(\pm 5,0)$, உச்சிகள் $(\pm 3,0)$.

$$\text{மையமகன்மை} = e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$$

$$\text{செங்குவிநாண்}\ =\frac{2b^2}{a}=\frac{32}{3}$$

(ஆ) சமன்பாட்டை இருபுறமும் 16 ஆல் வகுத்தால்,

$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{1}=1$$

கிடைக்கிறது. இதை செந்தரச்சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிட்டு

$$a=4, b=1, c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+1}\ =\sqrt{17}$$

$$\text{மையமகன்மை,}\quad e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$\text{செங்குவிநாண்} = \frac{2b^2}{a}=\frac{1}{2}$$

என்று பெறுகிறோம். எனவே, குவியங்களின் ஒருங்களவுகள் $(0,\pm 17)$. உச்சிகள் $(0,\pm 4)$.

சான்று 15 குவியங்கள் $(0,\pm 3)$, உச்சிகள் $\left(0,\pm {\sqrt{11}}/{2}\right)$ என்றுள்ள அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு y அச்சில் குவியங்கள் இருப்பதால், அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

என்ற வடிவானது. உச்சிகள்

$$\left(0,\pm\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$$

என்பதால்,

$$a=\frac{\sqrt{11}}{2}$$

குவியங்கள் $(0,\pm 3)$ என்பதால், $c=3$,

$$b^2=c^2-a^2=\frac{25}{4}$$

எனவே, அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{y^2}{\left(\frac{11}{4}\right)}-\frac{x^2}{\left(\frac{25}{4}\right)}=1$$

அதாவது, $100y^2-44x^2=275$.

சான்று 16 குவியங்கள் $(0,\pm 12)$ என்றும் செங்குவிநாணின் நீளம் 36 என்றுமுள்ள அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு குவியங்கள் $(0,\pm 12)$ என்பதால் அது $c=12$ என்று தருகிறது.

செங்குவிநாண்

$$\frac{2b^2}{a}=36$$

எனவே, $b^2=18a$.

$c^2=a^2+b^2$ என்பதிலிருந்து $144=a^2+18a$

அதாவது $a^2+18a-144=0$

$$a=\frac{-18\pm\sqrt{18^2+4\times 144}}{2}=-9\pm 15$$

என்ற சமன்பாடும் $a=-24, 6$ என்ற தீர்வுகளும் கிடைக்கின்றன. a எதிர்மமாக இருக்கவியலாது என்பதால், $a=6, b^2=108$

எனவே, தேவையான அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{108}=1$$

அதாவது $3y^2-x^2=108$.

பயிற்சி 11.4

1முதல் 6வரையிலான ஒவ்வொரு பயிற்சியிலும், அதிபரவளைவின் குவியங்கள், உச்சிகள் ஆகியவற்றின் ஒருங்களவுகள், மையமகன்மை செங்குவிநாணின் நீளம் ஆகியவற்றை காண்க.

1. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$
2. $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{27}=1$
3. $9y^2-4x^2=36$
4. $16x^2-9y^2=576$
5. $5y^2-9x^2=36$
6. $49y^2-16x^2=784$

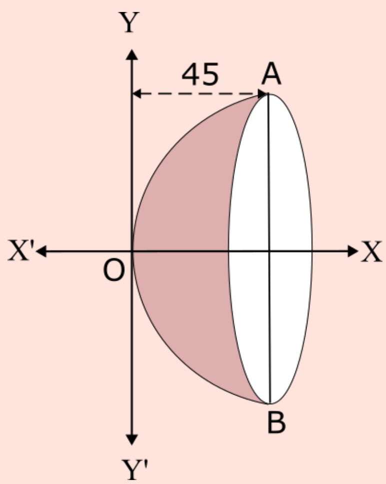
7 முதல் 15 வரையிலான ஒவ்வொரு பயிற்சியிலும், கொடுத்ததை நிறைவுசெய்யும் அதிபரவளைவின் சமன்பாடுகளை காண்க.

7. உச்சிகள் $(\pm 2,0)$, குவியங்கள் $(\pm 3,0)$[
8. உச்சிகள் $(0,\pm 5)$, குவியங்கள் $(0,\pm 8)$

9. உச்சிகள் $(0,\pm3)$, குவியங்கள் $(0,\pm5)$
10. குவியங்கள் $(\pm5,0)$, குறுக்கச்சுநீளம் 8
11. குவியங்கள் $(0,\pm13)$, இணைவச்சு நீளம் 24
12. குவியங்கள் $(\pm3\sqrt{5}\ ,0)$, **செங்குவிநா**ணின் நீளம் 8
13. குவியங்கள் $(\pm4,0)$, செங்குவிநாணின் நீளம் 12
14. உச்சிகள் $(\pm7,0)$, $e=4/3$
15. குவியங்கள் $(0,\pm\sqrt{10}\ )$, $(2,3)$ வழியாக செல்கிறது

பலவகைச்சான்றுகள்

சான்று 17 படம் 11.33இல் காட்டிய ஒரு பரவளைய ஆடியின் குவியம் அதன் உச்சியிலிருந்து 5 செமீ தொலைவில் உள்ளது. ஆடி 45 செமீ ஆழத்தில் இருந்தால், AB என்ற தொலைவை காண்க.



படம் 11.33

தீர்வு குவியத்திலிருந்து உச்சியின் தொலைவு, $a=5\,cm$. ஆடியின் உச்சி மூலத்திலும் அச்சு நேர்ம x அச்சிலும் இருந்தால், பரவளைய வெட்டின் சமன்பாடு

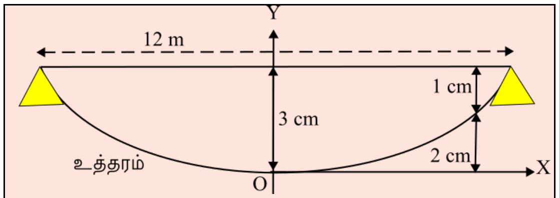
$$y^2=4(5)x=20x$$

$x=45$ எனில் $y^2=900$

எனவே $AB=2y=2\times30=60\,cm$.

சான்று 18 ஒரு உத்தரத்தை 12 மீட்டர் இடைவெளியிலுள்ள தூண்கள் தாங்குகின்றன. சுமை உத்தரத்தின் மையத்தில் குவிந்திருப்ப தால், அங்கு 3 செமீ விலகல் ஏற்படுகிறது. இவ்வாறு விலகலுற்ற உத்தரம் ஒரு பரவளைய வடிவில் உள்ளது. மையத்திலிருந்து எவ்வளவு தொலைவில் 1 செமீ விலகல் உள்ளது?

தீர்வு பரவளையத்தின் உச்சி மீத்தாழ்வான புள்ளியிலும் அச்சு நெடுநிற்பமாகவும் இருக் கின்றன. படம் 11.34இல் காட்டியபடி உச்சியில் மூலமும் கிடைமட்டமாக x அச்சுமுள்ள ஒரு ஒருங்களவமைப்பை தேர்வோம்.



படம் 11.34

இந்த ஒருங்களவமைப்பில் பரவளைவின் சமன்பாடு $x^2=4ay$ என்ற வடிவானது. பரவளைவு $\left(6\,m, {}^{3}\!/_{100}\,m\right)$இன்வழி செல்வதால்

$$6^2\,m^2=4a\left(\frac{3}{100}\,m\right)$$

$$a=\frac{36\times100}{12}m=300\,m$$

1 செமீ விலகல் A,B என்ற புள்ளிகளிடையில் இருப்பதாக குறிப்போம். அதாவது

$$AB=\frac{1}{100}m$$

Bஇன் ஒருங்களவுகள் $\left(x,\frac{2}{100}\right)$

எனவே, $x^2=4\times300\times\frac{2}{100}=24$

அதாவது $x=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ மீட்டர்.

சான்று 19 15 செமீ நீளமுள்ள ஒரு தண்டின் ஒரு நுனி xஅச்சிலும் மறுநுனி yஅச்சிலும் எப்போதும் இருக்கின்றன. தண்டின் x அச்சிலுள்ள முனையிலிருந்து $6\,cm$ தொலைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியை கருதுக. இந்தப்புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு நீளவட்டம் என்று காட்டுக.

தீர்வு படம் 11.35இல் தண்டுநுனிகள் A,B என்ற இடங்களில் இருப்பதாக கொள்வோம். AB என்ற கோடு xஅச்சுடன் θ என்ற கோணத்தை தாங்கு வதாகவும் கொள்வோம். P என்ற புள்ளியை $AP=6\,cm$ என்றிருக்குமாறு எடுப்போம்.

$AB=15$ செமீ என்பதால், $PB=9$ செ.மீ. P இலிருந்து y அச்சுக்கு செங்குத்தாக PQவையும் xஅச்சுக்கு செங்குத்தாக PRஐயும் வரைவோம்.

ΔPBQவிலிருந்து

உவவி $\theta = \dfrac{x}{9}$

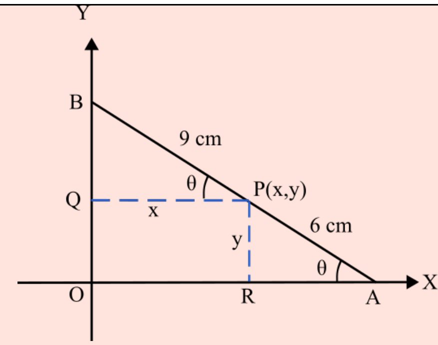
$\Delta\, PRA$யிலிருந்து,

வவி $\theta = \dfrac{y}{6}$

உவவி$^2\theta +$ வவி$^2\theta = 1$ என்பதால்

$$\left(\frac{x}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$$



படம் 11.35

11ஆம் படலத்தில் பலவகைப்பயிற்சிகள்

1. ஒரு பரவளைவ எதிரொளிப்பியின் விட்டம் 20 செ.மீ, ஆழம் 5 செ.மீ எனில் குவியத்தை காண்க.
2. ஒரு வளைவு நெடுநிற்ப அச்சுள்ள பரவளைவ வடிவத்தில் உள்ளது. வளைவின் உயரம் 10 மீ, அடியகலம் 5 மீ எனில் பரவளைவின் உச்சியிலிருந்து 2 மீ கீழ் அதன் அகலம் என்ன?
3. சீராக சுமையேற்றிய ஒரு தொங்கு பாலத்தின் வடம் பரவளைவ வடிவத்தில் தொங்குகிறது., 100 மீட்டர் நீளமுமுள்ள கிடைமட்டச்சாலை, நெடுநிற்பக்கம்பிகளால் வடத்துடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது, மீநீளமான கம்பி 30 மீட்டரும் மீக்குட்டையானது 6 மீட்டரும் எனில். நடுவிலிருந்து 18 மீட்டர் தொலைவிலுள்ள கம்பியின் நீளத்தை காண்க.
4. ஒரு வளைவு அரைநீளவட்ட வடிவில் உள்ளது. இது அடியில் 8 மீட்டர் அகலமும், மையத்தில் 2 மீட்டர் உயரமும் உள்ளது. ஒரு நுனியிலிருந்து 1.5 மீ தொலைவில் வளைவின் உயரத்தை காண்க.
5. 12 செ.மீ நீளமுள்ள ஒரு தண்டு அதன் நுனிகள் எப்போதும் ஒருங்களவச்சுகளை தொடுமாறு நகர்கிறது. x அச்சைத்தொடும் நுனியிலிருந்து 3 செ.மீ. தொலைவில் கம்பியிலுள்ள P என்ற புள்ளியின் இயங்குவரைச்சமன்பாட்டை காண்க.
6. $x^2 = 12y$ என்ற பரவளைவின் உச்சியை அதன் செங்குவிநாணின் நுனிகளுடன் இணைக்கும் கோடுகளால் உருவாகும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவை காண்க.
7. ஒரு ஓட்டப்பந்தயவெளியில் ஓடும் ஒரு மனிதன் இரண்டு கொடிகளிலிருந்து தன் தொலைவுகளின் கூட்டுத்தொகை எப்போதும் 10 மீ என்பதை காண்கிறார். கொடிக்கம்பங்களுக்கிடையான தொலைவு 8 மீ.. மனிதன் ஓடும் பாதையின் சமன்பாட்டை காண்க.
8. $y^2 = 4\,ax$ என்ற பரவளைவில் ஒரு சமப்பக்க முக்கோணத்தை உள்வரைகிறோம்; இங்கு முக்கோணத்தின் ஒரு உச்சி பரவளைவின் உச்சியில் உள்ளது. முக்கோணத்தின் பக்கநீளத்தை காண்க.

சுருக்கவுரை

- வட்டம் ஒரு தளத்தில் நிலையான புள்ளியிலிருந்து சமத்தொலைவிலுள்ள புள்ளிகளின் கணம்.
- (h,k)இல் மையமும் r ஆரமுமுள்ள ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.
- பரவளைவு தளத்தில் ஒரு நிலையான கோட்டிலிருந்தும் ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்தும் சமத்தொலைவிலுள்ள புள்ளிகளின் கணம்.
- $(a,0)$ இல் குவியமும் $x = -a$ இயக்குவரையாகவுமுள்ள பரவளைவின் சமன்பாடு $y^2 = 4ax$, இங்கு $a > 0$.
- ஒரு பரவளைவின் **செங்குவிநாண்** அதன் அச்சுக்கு செங்குத்தாகவும் குவியத்தின்வழி செல்வதும் நுனிப்புள்ளிகள் பரவளைவின்மீது உள்ளதுமான ஒரு கோட்டுத்துண்டு,
- $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவின் செங்குவிநாணின் நீளம் $4a$.
- நீளவட்டம் ஒரு தளத்தில் இரண்டு நிலையான புள்ளிகளிலிருந்தான தொலைவுகளின் கூட்டுத்தொகை மாறிலியாகவுள்ள புள்ளிகளின் கணம்.
- குவியங்கள் xஅச்சிலுள்ள நீளவட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

- நீளவட்டத்தின் செங்குவிநாண் பேரச்சுக்குச்செங்குத்தானதும் ஒரு குவியத்தின்வழியாக செல்வதும் நுனிப்புள்ளிகள் நீளவட்டத்தின்மீது உள்ளதுமான ஒரு கோட்டுத்துண்டு.
- $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
  என்ற சமன்பாடுள்ள நீளவட்டத்தின் செங்குவிநாணின் நீளம் $2b^2/a$.
- நீளவட்டத்தின் மையமகன்மை நீளவட்டத்தின் மையத்திலிருந்து ஒரு குவியத்துக்கும் ஒரு உச்சிக்குமுள்ள தொலைவுகளின் விகிதம்.
- அதிபரவளைவு ஒரு தளத்தில் இரண்டு நிலையான புள்ளிகளிலிருந்தான தொலைவுகளின் வேறுபாடு மாறிலியாகவுள்ள புள்ளிகளின் கணம்.
- குவியங்கள் xஅச்சிலுள்ள அதிபரவளைவின் சமன்பாடு
  $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
- அதிபரவளைவுவின் செங்குவிநாண் குறுக்கச்சுக்கு செங்குத்தாகவும் குவியத்தின்வழியாக செல்வதும் நுனிப்புள்ளிகள் அதிபரவளைவின்மீது உள்ளதுமான ஒரு கோட்டுத்துண்டு.
- $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ என்ற சமன்பாடுள்ள அதிபரவளைவின் **செங்குவிநா**ணின் நீளம் $2b^2/a$.
- அதிபரவளைவின் மையமகன்மை மையத்திலிருந்து ஒரு குவியத்துக்கும் ஒரு உச்சிக்குமுள்ள தொலைவுகளின் விகிதம்.

வரலாற்றுக் குறிப்பு

வடிவியல் கணிதத்தின் மிகவும் பழமையான கிளைகளுள் ஒன்று. கிரேக்க வடிவியாலர்கள் கோட்பாட்டுமுக்கியத்துவமும் நடைமுறைமுக்கியத்துவமும் வாய்ந்த பல வளைவுகளின் பண்புகளை ஆராய்ந்தனர். இயூக்கிளிடு சுமார் கி.மு 300இல் வடிவியல்பற்றிய தனது ஆய்வு விரிவுரையை எழுதினார். இவர் முதன்முதலில் இயற்கையைப்பற்றிய சிந்தனைகளால் எழுந்த அடிக்கோள்களின் அடிப்படையில் வடிவங்களை ஒருங்கமைத்தவர். பண்டைய இந்தியர்களும் கிரேக்கர்களும் ஆராய்ந்த வடிவியல் குறிக்கணித்தின் செயல்முறையை பயன்படுத்தவில்லை. இயூக்கிளிடு வடிவியலுக்கு மேற்கொண்ட தொகுத்தாக்க அணுகுமுறையும் சுல்பசூத்திரங்களின் அணுகுமுறையும் சுமார் 1300 ஆண்டுகளாக தொடர்ந்தது. கிமு 200இல், அப்பலோனியசு எழுதிய கூம்புவெட்டுகள் என்ற நூலில் பதினெட்டு நூற்றாண்டுகளாக மாறாத பல முக்கியமான கண்டுபிடிப்புகள் இருந்தன.

இக்காலத்து பகுப்பாய்வுவடிவியலை இரினே இடேக்காட்டு (1596-1650) என்பவரின் பெயரால் காருட்டீசிய வடிவியல் என்று அழைக்கிறோம். இவர் 1637ஆம் ஆண்டில் 'வடிவியல்' என்ற நுலை வெளியிட்டார். ஆனால் பகுப்பாய்வுவடிவவியலின் அடிப்படைக்கொள்கைகளையும் முறைகளையும் **ஏற்கெனவே** பியர்டி பெர்மா (1601-1665) கண்டுபிடித்திருந்தார். புன்வாய்ப்பாக இந்த ஆய்பொருள்பற்றிய பெருமாவின் ஆய்வுக்கட்டுரை, 'தளத்திலும் திண்மத்திலும் இயங்குவரைகளின் அறிமுகம்' என்ற தலைப்பில் 1679ஆம் ஆண்டிலே அவரது மரணத்திற்குப்பின் வெளியானது. எனவே, இடேக்காட்டு பகுப்பாய்வுவடிவவியலின் தனித்துவமான கண்டுபிடிப்பாளராக கருதப்பட்டார்.

ஐசக்கு பேரோ காருட்டீசியமுறையை பயன்படுத்துவதை தவிர்த்தார். நியூட்டன் தீர்மானிக்கப்படாத கெழுக்களின் முறையை பயன்படுத்தி வளைவுகளின் சமன்பாடுகளை கண்டார். முனையவொருங்களவுகள் இருமுனையவொருங்களவுகள் போன்ற பலவகையான ஒருங்களவுகளை பயன்படுத்தினார். இலைபினிசு கிடையளவு, குத்தளவு, ஒருங்களவு ஆகிய சொற்களை பயன்படுத்தினார். பகுப்பாய்வுவடிவியலில் ஒரு முக்கியமான பாடநூலை இலோப்பிற்றால் (1700) எழுதினார்.

கிளேரோ (1729) வழங்கிய தொலைவுவாய்ப்பாடு நளினமாயில்லாவிட்டாலும் தொலைவுவாய்ப்பாட்டை முதன்முதலில் வழங்கியவர் அவரே. இவர் நேரியச்சமன்பாட்டின் இடைவெட்டுவடிவத்தையும் கொடுத்தார். கிரேமர் (1750) இரண்டு அச்சுகளையும் முறையாக பயன்படுத்தி வட்டத்தின் சமன்பாட்டை.

$$(y-a)^2+(b-x)^2=r^2$$

என்று தந்தார். பகுப்பாய்வுவடிவவியலில் அப்போதிருந்த சிறந்த விரிவேற்றத்தை வழங்கியவர் இவரே. மாஞ்சே (1781) நேர்க்கோட்டுக்கான இக்காலத்திய $y-y'=m(x-x')$. என்ற புள்ளிச்சாய்மைவடிவத்தை தந்தார். இரண்டு கோடுகள் செங்குத்தாயிருப்பதற்கான வரைக்கட்டு $mm'+1=0$ என்பதையும் கொடுத்தார்

சி. பி. இலக்குவா (1765-1843) மிகப்பல பாடநூல்களை எழுதியவர். பகுப்பாய்வுவடிவவியலுக்கு அவர் அளித்த பங்களிப்புகள் சிதறிக்காணப்படுகின்றன. அவர் கோட்டின் இருபுள்ளிவடிவத்தை

$$y-\beta=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}(x-\alpha)$$

என்று கொடுத்தார். (α,β) விலிருந்து $y=ax+b$ என்ற கோட்டுக்கான செங்குத்துநீளத்தையும்

$$\frac{(\beta-a-b)}{\sqrt{1+a^2}}$$

என்று கொடுத்தார். இரண்டு கோடுகளுக்கிடையான கோணத்தை கண்டுபிடிப்பதற்கான அவரது வாய்ப்பாடு

$$\text{தொவி}\ \theta=\left(\frac{a^{'}-a}{1+aa^{'}}\right)$$

பகுப்பாய்வுவடிவவியலின் கண்டுபிடிப்புக்குப்பிறகு இத்தகைய அடிப்படையான வாய்ப்பாடுகளை கண்டுபிடிப்பதற்கு 150 ஆண்டுகளுக்கும் மேலாக நாம் காத்திருக்க வேண்டியுள்ளது என்பது வியப்பாக இருக்கிறது. 1818 ஆம் ஆண்டில், கட்டிடப்பொறியியலாளரான இலேம் $E=0, E'=0$ ஆகிய இரண்டு இயங்குவரைகளின் குறுக்குவெட்டுப்புள்ளியின்வழி செல்லும் வளைவரைக்கு $mE+m'E'=0$ என்ற வாய்ப்பாட்டை வழங்கினார்.

கணிதத்திலும் அறிவியலிலும் பல முக்கியமான கண்டுபிடிப்புகள் கூம்புவெட்டுகளுடன் தொடர்புடையவை.. கிரேக்கர்கள், குறிப்பாக ஆர்க்கிமீடிசும் $(287-212\mathrm{B.C})$ அப்பலோனியசும் (200 B.C.) கூம்புவெட்டுகளை அவற்றின் அழகுக்காகவே ஆராய்ந்தனர். இந்த வளைவுகள் இன்றைய விண்வெளியாய்வுலாவிலும் அணுத்துகள்களின் நடத்தைபற்றிய ஆராய்ச்சியிலும் முக்கியமான கருவிகள்.