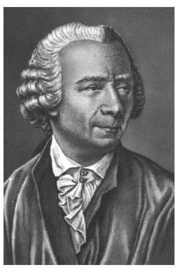
படலம் 12

முப்பரிமாண வடிவியலுக்கு அறிமுகம்

கணிதம் எல்லா அறிவியலுக்கும் அரசியாகவும் பணிப்பெண்ணாகவும் செயலாற்றுகிறது – எ. தே. பெல்

12.1 அறிமுகம்


இலியோனாடு ஆயிலர் (1707-1783)

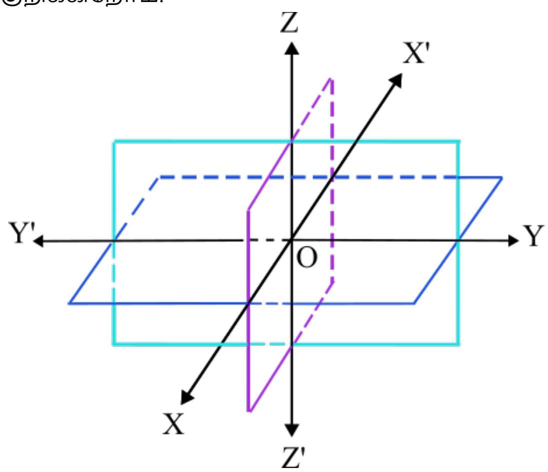
ஒரு தளத்தில் ஒரு புள்ளியை இடமறிய தளத்தில் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கிடக்கும் இரண்டு கோடுகளி லிருந்து புள்ளியின் செங்குத்துத் தொலைவுகள் பயன்படுவதை நாம் அறிவோம். இந்த கோடுகளை *ஒருங்களவச்சுகள்* என்கிறோம். இந்த இரண்டு தொலைவுகளும் *அச்சுகளைப் பொறுத்து புள்ளியின் ஒருங்களவு கள்.* நடைமுறையில் நாம் தளத்தில் கிடக்கும் புள்ளிகளை மட்டுமே கையாள்வதில்லை. சான்றாக, இடவெளியில் எறிந்த ஒரு பந்து வெவ்வேறு நேரங்களில் இருக்கும் இடநிலைக ளையோ ஒரு வானூர்தி ஓரிடத்திலிருந்து மற்றோரிடத்துக்கு பறக்கும்போது வெவ்வேறு நேரங்களில் அதன் இடநிலைகளையோ கருதுக.

இதைப்போல், முகட்டிலிருந்து தொங்கும் ஒரு மின்குமிழத்தின் கீழ்நுனியின் இடநிலை யையோ அறையிலுள்ள முகட்டுவிசிறியின் மையநுனியின் இடநிலையையோ கருதும்போது அறையின் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரண்டு சுவர்களிலிருந்து புள்ளிகளுக்கு இருக்கும் தொலைவுகள் மட்டுமல்லாமல், தலையிலிருந்து புள்ளியின் உயரத்தையும் நாம் அறியவேண்டும். எனவே, இரண்டு அளவுகள் போதாமல், அறையின் தரை, அடுத்தடுத்த இரண்டு சுவர்கள் ஆகிய ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று தளங்களிலிருந்து புள்ளியின் செங்குத்துத்தொலைவுகள் தேவை யாகின்றன. இந்த மூன்று தொலைவுகளை யும் மூன்று ஒருங்களவுத்தளங்களின் நோக்கீட்டில் புள்ளியின் ஒரங்களவுகள் என்கிறோம். இந்தப்படலத்தில் முப்பரிமாண வடிவியலின் அடிப்படைக்கருத்துருகளை படிப்போம்.

12.2 முப்பரிமாண இடவெளியில் ஒருங்களவச்சுகளும் ஒருங்களவுத்தளங்களும்

O என்ற புள்ளியில் சந்திக்கும் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தான மூன்று தளங்களை கருதுக (படம் 12.1). இந்த மூன்று தளங்களும் $X'OX$, $Y'OY$, $Z'OZ$ ஆகிய மூன்று கோடுகளில் இடைவெட்டுகின்றன. இவற்றை முறையே x, y, z அச்சுகள் என்றழைக்கிறோம். இந்த கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை என்பதை நோக்குக. *செவ்வகவொருங்களவமைப்பு* இந்த கோடுகளால் ஆனது. XOY , YOZ , ZOX ஆகிய தளங்களை முறையை XY தளம், YZ தளம், ZX தளம் என்கிறோம். இவை ஒருங்களவுத் தளங்கள். XOY தளத்தை கிடைமட்டமாக கருதினால் (படத்தில் கருப்புச்செவ்வகமாக காட்டப்பட்டது) இந்த தளத்துக்கு செங்குத்தான $Z'OZ$கோடு நெடுநிற்பமானது. XYதளத்திலிருந்து மேனோக்கி OZக்குநேராக அளந்த தொலைவுகளை நேர்மமாகவும் கீழ்நோக்கி OZ'க்குநேராக அளந்தவற்றை எதிர்மமாகவும் கொள்கிறோம். இதைப்போல், ZXதளத்துக்கு வலப்பக்கமாக OYக்குநேராக அளந்த தொலைவுகள் நேர்மம்; இடப்பக்கமாக OY'க்குநேராக அளந்தவை எதிர்மம்; YZதளத்துக்கு முன்பக்கமாக (நம்மை நோக்கி) OXக்குநேராக அளந்தவை நேர்மம்; பின்பக்கமாக OX'க்குநேரானவை எதிர்மம். O என்ற புள்ளியை ஒருங்களவமைப்பின் *மூலம்* என்கிறோம். மூன்று ஒருங்களவுத்தளங்களும் இடவெளியை எட்டு பகுதிகளாக பிறிக்கின்றன. இவற்றை *அரைக்காற்பகுதி*கள் என்கிறோம். இந்த அரைக்காற்பகுதிகளுக்கு $XOYZ$, $X'OYZ$, $X'OY'Z$, $XOY'Z$, $XOYZ'$, $X'OYZ'$, $X'OY'Z'$, $XOY'Z'$ என்று பெயரிட்டு அவற்றை முறையே Iஆம் ,

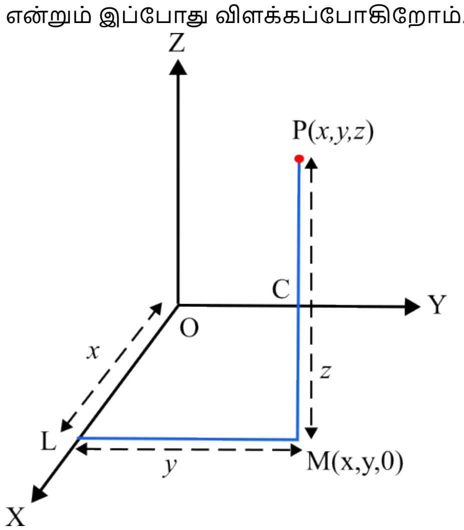
IIஆம், ... $VIII$ஆம் அரைக்காற்பகுதிகள் என்று குறிக்கிறோம்.



படம் 12.1

12.3 இடவெளியிலுள்ள ஒரு புள்ளியின் ஒருங்களவுகள்

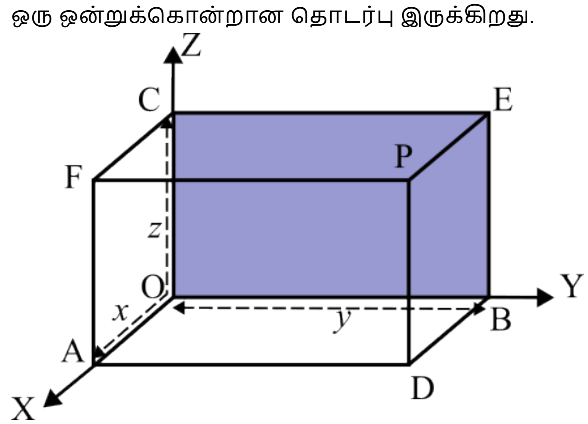
ஒருங்களவச்சுகள், ஒருங்களவுத்தளங்கள், மூலம் ஆகியவை அடங்கிய ஒரு நிலையான ஒருங்களவமைப்பை தேர்ந்தபின், இடவெளியிலுள்ள ஒரு புள்ளியுடன் (x, y, z) என்ற மூன்று ஒருங்களவுகளை தொடர்புறுத்தலாம் என்றும் திருப்புக்கூற்றாக, (x, y, z) என்ற மூன்று எண்களிலிருந்து இடவெளியிலுள்ள ஒரு புள்ளியின் இடநிலையை எவ்வாறு அறியலாம் என்றும் இப்போது விளக்கப்போகிறோம்.



படம் 12.2

இடவெளியிலுள்ள P என்ற ஒரு புள்ளியிலிருந்து XY தளத்துக்கு ஒரு செங்குத்துக்கோட்டை வரைவோம். இந்த செங்குத்துக்கோட்டின் அடி M (படம் 12.2). பிறகு, M என்ற இந்த புள்ளியிலிருந்து x அச்சுக்கு ML என்ற ஒரு செங்குத்துக்கோட்டை வரைகிறோம். இது x அச்சை L என்ற இடத்தில் சந்திக்கிறது. OL என்ற கோட்டுத்துண்டின் நீளம் x என்றும் $LM = y$ என்றும் $MP = z$ என்றும் கொள்வோம். அப்படியெனில், x, y, z ஆகியவை இடவெளியில் P என்ற புள்ளியின் *ஒருங்களவு*கள் என்கிறோம். படம் 12.2இல் $P(x, y, z)$ என்ற புள்ளி $XOYZ$ யரைக்காற்பகுதியில் இருப்பதை காண்கிறோம். எனவே x, y, z ஆகிய மூன்றும் நேர்மம். P வேறெந்த அரைக்காற்பகுதியில் இருந்தாலும் அதற்குத்தகுந்தவாறு x, y, zகளின் குறிகள் மாறுகின்றன. இவ்வாறு, இடவெளியிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியுடனும் (x, y, z) என்ற முறைமை யிட்ட மெய்யெண்மும்மம் தொடர்பாகிறது.

திருப்பியவாறு, (x, y, z) என்ற மூன்று எண்களிலிருந்து, முதலில் xக்கு நிகரான L என்ற புள்ளியை x அச்சில் குறித்து, பிறகு XY தளத்தில் M என்ற புள்ளியை அதன் ஒருங்களவுகள் (x, y) என்றிருக்குமாறு குறிக்கிறோம். LM x அச்சுக்கு செங்குத்தாகவும் y அச்சுக்கு இணையாகவும் இருப்பதை நோக்குக. M என்ற புள்ளியை அடைந்தபின், XY தளத்துக்கு MP என்ற செங்குத்துக்கோட்டை வரைந்து அதில் z தொலைவிலுள்ள Pயை பெறுகிறோம். இவ்வாறு பெற்ற P என்ற புள்ளியின் ஒருங்களவுகள் (x, y, z). எனவே, இடவெளியிலுள்ள புள்ளிகளுக்கும் (x, y, z) என்ற மெய்யெண்மும்மங்களுக்கும் ஒரு ஒன்றுக்கொன்றான தொடர்பு இருக்கிறது.



படம் 12.3

மறுவழியாக, இடவெளியில் கிடக்கும் P என்ற புள்ளியின்வழி ஒருங்களவுத்தளங்களுக்கு இணையான மூன்று தளங்களை வரைகிறோம். இந்த தளங்கள் x, y, zயச்சுகளை முறையே A, B, C ஆகிய புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன (படம் 12.3). $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$ என்க. அப்படியெனில், x, y, z ஆகியவை Pயின் ஒருங்களவுகள்; இதை $P(x, y, z)$ என்று எழுதுகிறோம். திருப்புக்கூற்றாக, x, y, zயிலிருந்து ஒருங்களவச்சுகளில் A, B, C என்ற புள்ளிகளை குறிக்கிறோம். A, B, C என்ற இந்த புள்ளிகளின்வழி முறையே YZ, ZX, XY ஆகிய தளங்களுக்கு இணையாக தளங்களை வரைகிறோம். $ADPF$, $BDPE$, $CEPF$ ஆகிய இந்த மூன்று தளங்களும் சந்திக்கும் P என்ற புள்ளி

(x, y, z) என்ற முறைமையிட்ட மும்மத்துக்கு நிகராகிறது. இடவெளியிலுள்ள $P(x, y, z)$ என்ற எந்தவொரு புள்ளிக்கும் x, y, z ஆகியவை முறையே YZ, ZX, XY தளங்களிலிருந்து செங்குத்துத்தொலைவுகள் என்பதை கண்டறிகிறோம்.

குறிப்பு மூலமாகிய Oவின் ஒருங்களவுகள் $(0,0,0)$. xஅச்சிலுள்ள எந்தப்புள்ளிக்கும் ஒருங்களவுகள் $(0, y, z)$ என்றவாறு இருக்கின்றன.

குறிப்புரை ஒரு புள்ளியின் ஒருங்களவுகளின் குறிகள் அந்த புள்ளி இருக்கும் அரைக்காற் பகுதியை தீர்மானிக்கின்றன. கீழ்க்காணும் அட்டவணை எட்டு அரைக்காற்பகுதிகளிலும் ஒருங்களவுகளின் குறிகளை காட்டுகிறது.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	$VIII$
x	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
y	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
z	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$

அட்டவணை 12.1

சான்று 1 படம் 12.3இல் $P\ (2,4,5)$ எனில் Fஇன் ஒருங்களவுகளை காண்க.

தீர்வு F என்ற புள்ளிக்கு OYக்குநேராக அளந்த தொலைவு சுழியம். எனவே, F இன் ஒருங்களவுகள் $(2,0,5)$.

சான்று 2 $(-3,1,2)$, $(-3,-1,2)$ ஆகிய புள்ளிகள் கிடக்கும் அரைக்காற்பகுதிகளை காண்க.

தீர்வு அட்டவணை 12.1இலிருந்து $(-3,1,2)$ இரண்டாம் அரைக்காற்பகுதியிலும் $(-3,1,-2)$ ஆறாம் அரைக்காற்பகுதியிலும் இருப்பதை காண்கிறோம்.

பயிற்சி 12.1

1. ஒரு புள்ளி xஅச்சில் உள்ளது. அதன் y, zயொருங்களவுகள் யாவை?
2. ஒரு புள்ளி XZதளத்தில் உள்ளது. அதன் yஒருங்களவைப்பற்றி என்ன சொல்லலாம்?
3. கீழ்க்காணும் புள்ளிகள் இருக்கும் அரைக்காற்பகுதிகளை உரைக்க. $(1,2,3)$, $(4,-2,3)$, $(4,-2,-5)$, $(4,2,-5)$, $(-4,2,-5)$, $(-4,2,5)$, $(-3,-1,6)$, $(-2,-4,-7)$.
4. கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக.
   a. xஅச்சும் yஅச்சும் சேர்ந்து __________தளத்தை உண்டாக்குகின்றன.
   b. XYதளத்திலுள்ள புள்ளிகளின் ஒருங்களவுகள் _______ என்ற வடிவானவை.
   c. ஒருங்களவச்சுகள் இடவெளியை _______ அரைக்காற்பகுதிகளாக பிரிக்கின்றன.

12.4 இரண்டு புள்ளிகளிடையான தொலைவு

இருபரிமாண ஒருங்களவமைப்பில் இரண்டு புள்ளிகளிடையான தொலைவை படித்திருக்கிறோம். அதை இப்போது முப்பரிமாணத்துக்கு நீட்டுவோம்.

$P(x_1, y_1, z_1), Q(x_2, y_2, z_2)$ ஆகியவை OX, OY, OZ ஆகிய செவ்வக அச்சமைப்பின் நோக்கீட்டிலான இரண்டு புள்ளிகள் என்க. P, Q என்ற புள்ளிகளின்வழி ஒருங்களவுத்தளங்களுக்கு இணையான தளங்களை வரைக. இது படம் 12.4இல் காட்டியபடி ஒரு இணைமுகியை உண்டாக்குகிறது. இப்போது, $\angle PAQ$ செங்கோணம் என்பதால், PAQ என்ற முக்கோணத்தில்

$$PQ^2 = PA^2 + AQ^2 \qquad (12.1)$$

மேலும், $\angle ANQ$ செங்கோணம் என்பதால், ANQவும் ஒரு செங்கோண முக்கோணம். எனவே

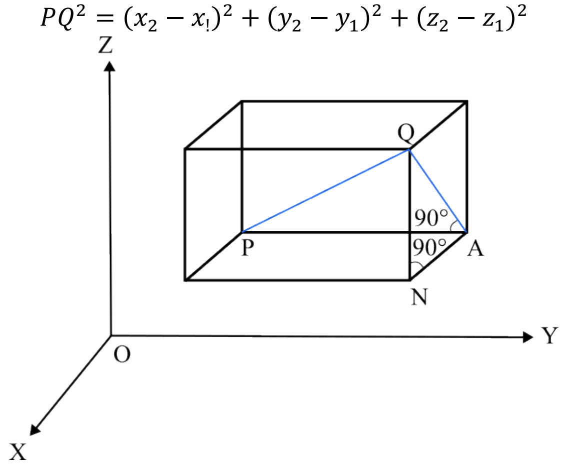
$$AQ^2 = AN^2 + NQ^2 \qquad (12.2)$$

$(12.1), (12.2)$ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$PQ^2 = PA^2 + AN^2 + NQ^2$$

என்று பெறுகிறோம். இப்போது $PA = y_2 - y_1$, $AN = x_2 - x_1, NQ = z_2 - z_1$ என்பதால்,

$$PQ^2 = (x_2 - x_!)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$



படம் 12.4

எனவே,

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

இது (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ஆகிய புள்ளிகளிடையான தொலைவை தருகிறது. குறிப்பாக, $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ எனில் P என்ற புள்ளி மூலம்; அப்போது $OQ = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$. இது மூலத்திலிருந்து $Q(x_2, y_2, z_2\ )$ என்ற ஒரு புள்ளியின் தொலைவை தருகிறது.

சான்று 3 $P(1,-3,4)$, $Q(-4,1,2)$ ஆகிய புள்ளிகளிடையான தொலைவை காண்க.

தீர்வு $P(1,-3,4)$, $Q(-4,1,2)$ ஆகிய புள்ளிகளிடையான PQ என்ற தொலைவு

$$PQ = \sqrt{(-4-1)^2+(1+3)^2+(2-4)^2} = \sqrt{25+16+4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$ அலகுகள்.

சான்று 4 $P(-2,3,5)$, $Q(1,2,3)$, $R(7,0,-1)$ ஆகிய புள்ளிகள் கோடமைந்தவை எனக்காட்டுக.

தீர்வு மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டில் இருந்தால் நுனிப்புள்ளிகளிலிருந்து நடுப் புள்ளிக்கான தொலைவுகளின் கூட்டுத்தொகை நுனிப்புள்ளிகளிடையான தொலைவுக்கு சமமாகவேண்டும். இந்த மூன்று தொலைவு களையும் முதலில் கணக்கிடுவோம்.

$$PQ = \sqrt{(1+2)^2+(2-3)^2+(3-5)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

$$QR = \sqrt{(7-1)^2+(0-2)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

$$PR = \sqrt{(7+2)^2+(0-3)^2+(-1-5)^2} = \sqrt{81+9+36} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$

$PQ + QR = PR$ என்பதால் புள்ளிகள் கோடமைந்தவை.

சான்று 5 $A(3,6,9)$, $B(10,20,30)$, $C(25,-41,5)$ ஆகியவை ஒரு செங்கோணமுக்கோணத்தின் உச்சிகளா?

தீர்வு மூன்று பக்கங்களுள் மீநீளமானதன் வர்க்கம் மற்றப்பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகைக்கு சமமாகிறதா என்று சோதிக்கவேண்டும்.

$$AB^2 = (10-3)^2+(20-6)^2+(30-9)^2 = 49+196+441 = 686$$

$$BC^2 = (25-10)^2+(-41-20)^2+(5-30)^2 = 225+3721+625 = 4571$$

$$CA^2 = (3-25)^2+(6+41)^2+(9-5)^2 = 484+2209+16 = 2709$$

$BC^2 \neq CA^2 + AB^2$ என்பதால் ABC செங்கோணமுக்கோணமன்று.

சான்று 6 A, B ஆகிய புள்ளிகள் முறையே $(3,4,5)$, $(-1,3,-7)$ என்றிருக்கும்போது, $PA^2 + PB^2 = 2k^2$ என்றிருக்குமாறு உள்ள P என்ற புள்ளிக்கணத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு P யின் ஒருங்களவுகள் (x,y,z) என்க. அப்படியெனில்

$$PA^2 = (x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2$$

$$PB^2 = (x+1)^2+(y-3)^2+(z+7)^2$$

$PA^2 + PB^2 = 2k^2$ என்று கொடுத்திருப்பதால்

$$(x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2+(x+1)^2+(y-3)^2+(z+7)^2 = 2k^2$$

அதாவது $2x^2+2y^2+2z^2-4x-14y+4z = 2k^2-109$

பயிற்சி 12.2

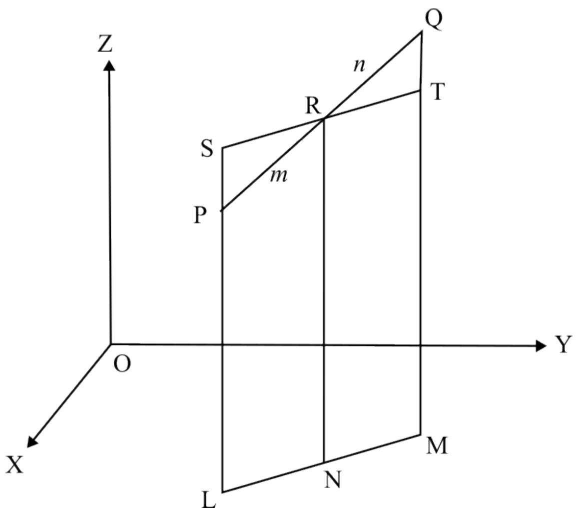
1. கீழ்க்காணும் புள்ளிச்சோடிகளிடையான தொலைவுகளை காண்க.
   a. $(2,3,5)$, $(4,3,1)$
   b. $(-3,7,2)$, $(2,4-1)$
   c. $(-1,3,-4)$, $(1,-3,4)$
   d. $(2,-1,3)$, $(-2,1,3)$
2. $(-2,3,5)$, $(1,2,3)$, $(7,0,-1)$ ஆகிய புள்ளிகள் கோடமைந்தவை எனக்காட்டுக.
3. கீழ்க்காண்பவற்றை சரிபார்க்க.
   a. $(0,7,-10)$, $(1,6,-6)$, $(4,9,-6)$ ஆகியவை ஒரு இருசமப்பக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகள்.
   b. $(0,7,10)$, $(-1,6,6)$, $(-4,9,6)$ ஆகியவை ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகள்
   c. $(-1,2,1)$, $(1,-2,5)$, $(4,-7,8)$, $(2,-3,4)$ ஆகியவை ஒரு இணைகரத்தின் உச்சிகள்.
4. $(1,2,3)$, $(3,2,-1)$ ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து சமத்தொலைவிலுள்ள புள்ளிகளின் கணத்துக்கான சமன்பாட்டை காண்க.
5. $A(4,0,0)$, $B(-4,0,0)$ ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து Pக்கான தொலைவுகளின் கூட்டுத்தொகை 10 என்றவாறான P என்ற புள்ளிகளின் சமன்பாட்டை காண்க.

12.5 வெட்டுவாய்ப்பாடு

இருபரிமாண வடிவியலில் ஒரு கோட்டுத் துண்டை ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் உட்பக்கமாக பிரிக்கும் புள்ளியின் ஒருங்களவுகளை எவ்வாறு காண்பது என்று கற்றிருக்கிறோம். இப்போது அதை முப்பரிமாணத்துக்கு நீட்டுவோம்.

இரண்டு புள்ளிகளையும் $P(x_1,y_1,z_1)$, $Q(x_2,y_2,z_2)$ என்று கொள்வோம். $R(x,y,z)$ என்ற புள்ளி PQவை $m:n$ என்ற விகிதத்தில் உட்பக்கமாக பிரிப்பதாக கொள்வோம். P, Q, R ஆகிய புள்ளிகளின்வழி XY தளத்துக்கு செங்குத்தான கோடுகளை வரைவோம். இவை XY தளத்தை முறையே L, M, N என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. PL, RN, QM ஆகிய கோட்டுத் துண்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று இணையானவை என்பதும் அவை ஒரே தளத்தில் உள்ளதும் தெளிவு. இந்த தளமும் XY தளமும் இடைவெட்டும் கோட்டில் L, M, N ஆகிய புள்ளிகள்

கிடக்கின்றன. R என்ற புள்ளியின்வழி LM என்ற கோட்டுக்கு இணையாக ST என்ற கோட்டை வரைவோம். ST என்ற இந்த கோடு LP யை வெளிப்பக்கமாக S என்ற இடத்திலும் MQவை T என்ற இடத்திலும் படம் 12.5இல் காட்டியபடி வெட்டுகிறது.



படம் 12.5

மேலும், $LNRS$, $NMTR$ ஆகிய நாற்கரங்கள் இணைகரங்கள் என்பதை நோக்குக. PSR, QTR ஆகியவை ஒத்த முக்கோணங்கள். எனவே,

$$\frac{m}{n}=\frac{PR}{QR}=\frac{SP}{QT}=\frac{SL-PL}{QM-TM}=\frac{NR-PL}{QM-NR}$$
$$=\frac{z-z_1}{z_2-z}$$

இது

$$z=\frac{mz_2+nz_1}{m+n}$$

என்பதை உள்ளுரைக்கிறது.

இதைப்போல், XZதளத்துக்கும் YZதளத்துக்கும் செங்குத்துக்கோடுகளை வரைவதன்மூலம்

$$y=\frac{my_2+ny_1}{m+n},\qquad x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

என்பனவற்றையும் பெறுகிறோம்.

எனவே, $P(x_1,y_1,z_1)$, $Q(x_2,y_2,z_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை $m:n$ என்ற விகிதத்தில் வெளிப்பக்கமாக பிரிக்கும் R என்ற புள்ளியின் ஒருங்களவுகள்

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\frac{my_2+ny_1}{m+n},\frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

R என்ற புள்ளி PQவை $m:n$ என்ற விகிதத்தில் வெளிப்பக்கமாக பிரித்தால், அதன் ஒருங்களவுகளை பெற nஐ $-n$ஆல் மாற்றிடுகிறோம்; அந்த ஒருங்களவுகள்

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\frac{my_2-ny_1}{m-n},\frac{(mz_2-nz_1)}{m-n}\right)$$

வேற்றுவம் 1 நடுப்புள்ளியின் ஒருங்களவுகள்: R PQவின் நடுப்புள்ளி எனில் $m:n=1:1$. எனவே,

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

வேற்றுவம் 2 PQவை $k:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஒருங்களவுகளை பெற, $k=m/n$ என்று வைக்கிறோம்.

$$\left(\frac{kx_2+x_1}{1+k},\frac{ky_2+y_1}{1+k},\frac{kz_2+z_1}{1+k}\right)$$

பொதுவாக, இரண்டு புள்ளிகளின்வழி செல்லும் கோட்டின்மீதுள்ள ஒரு புள்ளியைப் பற்றிய சிக்கல்களில் இந்த விளைவு யன்படுகிறது.

சான்று 7 $(1,-2,3)$, $(3,4,-5)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை $2:3$ என்ற விகிதத்தில் (அ) உட்பக்கத்தில் (ஆ) வெளிப்பக்கத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஒருங்களவுகளை காண்க.

தீர்வு (அ) $A\,(1,-2,3)$, $B\,(3,4,-5)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை உட்பக்கமாக $2:3$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி $P\,(x,y,z)$ என்க. அப்படியெனில்,

$$x=\frac{2(3)+3(1)}{2+3}=\frac{9}{5}$$
$$y=\frac{2(4)+3(-2)}{2+3}=\frac{2}{5}$$
$$z=\frac{2(-5)+3(3)}{2+3}=-\frac{1}{5}$$

எனவே, தேவையான புள்ளி

$$\left(\frac{9}{5},\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)$$

(ஆ) $A\,(1,-2,3)$, $B\,(3,4,-5)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை வெளிப்பக்கமாக $2:3$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி $P\,(x,y,z)$ என்க. அப்படியெனில்,

$$x=\frac{2(3)+(-3)(1)}{2+(-3)}=-3,$$
$$y=\frac{2(4)+(-3)(-2)}{2+(-3)}=-14,$$
$$z=\frac{2(-5)+(-3)(3)}{2+(-3)}=19$$

எனவே, தேவையான புள்ளி

$$(-3,-14,19)$$

சான்று 8 வெட்டுவாய்ப்பாட்டை பயன்படுத்தி, $(-4,6,10)$, $(2,4,6)$, $(14,0,-2)$ ஆகிய புள்ளிகள் கோடமைந்தவை என்று நிறுவுக.

தீர்வு புள்ளிகள் $A\,(-4,6,10)$, $B\,(2,4,6)$, $C\,(14,0,-2)$ என்க. ABயை P $k:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது என்க. அப்படியெனில், Pயின் ஒருங்களவுகள்

$$\left(\frac{2k-4}{k+1}, \frac{4k+6}{k+1}, \frac{6k+10}{k+1}\right)$$

kயின் ஏதோவொரு மதிப்புக்கு P Cயுடன் பொருந்துகிறதா என்று பார்ப்போம். xஒருங்களவுக்கு,

$$\frac{2k-4}{k+1} = 14$$

என்று வைக்கும்போது $k = -3/2$ என்று பெறுகிறோம். k இன் இந்த மதிப்புக்கு மற்ற இரண்டு ஒருங்களவுகளுக்காக

$$\frac{4k+6}{k+1} = \frac{4(-3/2)+6}{-3/2+1} = 0$$

$$\frac{6k+10}{k+1} = \frac{6(-3/2)+10}{-3/2+1} = -2$$

ஆகியவற்றை பெறுகிறோம். எனவே, $C\ (14, 0, -2)$ என்பது ABயின் வெட்டுப்புள்ளி. k எதிர்மமாயிருப்பதால் இது வெளிப்பக்க வெட்டு. அதாவது ABயை C வெளிப்பக்கமாக $3:2$ என்ற விகிதத்தில் வெட்டுகிறது. எனவே இவை மூன்றும் கோடமைந்தவை.

சான்று 9 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) ஆகியவை உச்சிகளாகவுள்ள ஒரு முக்கோணத்தின் வடிவமையத்தை காண்க.

தீர்வு $A\ (x_1, y_1, z_1)$, $B\ (x_2, y_2, z_2)$, $C\ (x_3, y_3, z_3)$ ஆகியவை ABC என்ற முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என்க. BCயின் நடுப்புள்ளி D என்க. அப்படியெனில் Dயின் ஒருங்களவுகள்

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right)$$

முக்கோணத்தின் வடிவமையம் G என்க. அப்படியெனில், ADயை G உட்பக்கமாக $2:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. எனவே, Gயின் ஒருங்களவுகள்

$$\frac{2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+x_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+y_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{z_2+z_3}{2}\right)+z_1}{2+1}$$

$$= \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{(z_1+z_2+z_3)}{3}\right)$$

சான்று 10 $(4, 8\ 10)$, $(6, 10, -8)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை YZதளம் பிரிக்கும் விகிதத்தை காண்க.

தீர்வு $A\ (4, 8\ 10)$, $B\ (6, 10, -8)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை $P(x, y, z)$ என்ற புள்ளி $k:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிப்பதாக கொள்வோம். அப்படியெனில், Pயின் ஒருங்களவுகள்

$$\left(\frac{4+6k}{k+1}, \frac{8+10k}{k+1}, \frac{10-8k}{k+1}\right)$$

P YZதளத்தில் கிடப்பதால் அதன் xஒருங்களவு சுழியம்; அதாவது $(4+6k)/(k+1) = 0$; அதாவது $k = -2/3$.

எனவே, XY தளம் ABயை வெளிப்பக்கமாக $2:3$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

பயிற்சி 12.3

1. $(-2, 3, 5)$, $(1, -4, 6)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை $2:3$ விகிதத்தில் (அ) உட்பக்கமாக (ஆ) வெளிப்பக்கமாக பிரிக்கும் புள்ளியின் ஒருங்களவுகளை காண்க.
2. $P\ (3, 2, -4)$, $Q\ (5, 4, -6)$, $R\ (9, 8, -10)$ ஆகியவை கோடமைந்தவை. PR ஐ Q பிரிக்கும் விகிதத்தை காண்க.
3. $(-2, 4, 7)$, $(3, -5, 8)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை YZதளம் பிரிக்கும் விகிதத்தை காண்க.
4. வெட்டுவாய்ப்பாட்டை பயன்படுத்தி $A\ (2, -3, 4)$, $B\ (-1, 2, 1)$, $C\ (0, 1/3, 2)$ ஆகிய புள்ளிகள் கோடமைந்தவை என்று காட்டுக.
5. $P\ (4, 2, -6)$, $Q\ (10, -16, 6)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை முச்சமவெட்டும் புள்ளிகளின் ஒருங்களவுகளை காண்க.

பலவகைச்சான்றுகள்

சான்று 11 $A\ (1, 2, 3)$, $B\ (-1, -2, -1)$, $C\ (2, 3, 2)$, $D\ (4, 7, 6)$ ஆகிய புள்ளிகள் ஒரு இணைகரத்தின் உச்சிகள் என்றும் $ABCD$ செவ்வகமன்று என்றும் காட்டுக.

தீர்வு $ABCD$ இணைகரம் என்று காட்ட அதன் எதிரெதிர்ப்பக்கங்கள் சமம் என்று காட்டவேண்டும்.

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (-2\ -2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$$

$$BC = \sqrt{(2+1)^2 + (3+2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

$$CD = \sqrt{(4\ -2)^2 + (7\ -3)^2 + (6\ -2)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$$

$$DA = \sqrt{(1-4)^2 + (2\ -7)^2 (3-6)^2} = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

$AB = CD$, $BC = AD$ என்பதால் $ABCD$ இணைகரம். இப்போது, $ABCD$ செவ்வகமன்று எனக்காட்ட அதன் மூலைவிட்டங்களான

ACயும் BDயும் சமமல்ல என்று காட்டவேண்டும்.

$$AC = \sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2+(2-3)^2}$$
$$= \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$
$$BD = \sqrt{(4+1)^2+(7+2)^2+(6+1)^2}$$
$$= \sqrt{25+81+49} = \sqrt{155}$$

$AC \neq BD$ என்பதால் $ABCD$ செவ்வகமன்று.

குறிப்பு மூலைவிட்டங்களான AC யும் BD யும் ஒன்றையொன்று இருசமவெட்டுகின்றன என்று காட்டுவதன்மூலமும் $ABCD$ இணைகரம் என்று காட்டலாம்.

சான்று 12 $A\,(3,4,-5)$, $B\,(-2,1,4)$ ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து சமத்தொலைவில் இருக்கும் புள்ளிகளின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு $P\,(x,y,z)$ என்பது $PA = PB$ என்றிருக்கும்படியான ஒரு புள்ளி என்க. அப்படியெனில்

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2}$$
$$= \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2}$$
$$(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2$$
$$= (x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2$$
$$10x+6y+18z-29=0$$

சான்று 13 ABC என்ற முக்கோணத்தின் வடிவமையம் $(1,1,1)$. A, Bயின் ஒருங்களவுகள் முறையே $(3,-5,7)$ $(-1,7,-6)$ எனில் Cயின் ஒருங்களவுகளை காண்க.

தீர்வு C யின் ஒருங்களவுகள் (x,y,z) என்க; வடிவமையம் $G\,(1,1,1)$ என்க. அப்படியெனில்,

$$\frac{x+3-1}{3} = 1, \quad \text{அதாவது } x = 1$$
$$\frac{y-5+7}{3} = 1, \quad \text{அதாவது } y = 1$$
$$\frac{z+7-6}{3} = 1, \quad \text{அதாவது } z = 2$$

எனவே, Cயின் ஒருங்களவுகள் $(1,1,2)$.

பலவகைப்பயிற்சிகள்

1. $ABCD$ என்ற இணைகரத்தின் மூன்று உச்சிகள் $A\,(3,-1,2)$, $B\,(1,2,-4)$, $C\,(-1,1,2)$. நான்காம் உச்சியின் ஒருங்களவுகளை காண்க.
2. $A\,(0,0,6)$, $B\,(0,4,0)$, $C\,(6,0,0)$ ஆகிய உச்சிகளுள்ள முக்கோணத்தின் நடுமங்களின் நீளங்களை காண்க.
3. $P\,(2a,2,6)$, $Q\,(-4,3b,-10)$, $R\,(8,14,2c)$ உச்சிகளாகவுள்ள முக்கோணத்தின் வடிவமையம் மூலம் எனில் a,b,c ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை காண்க.
4. $P\,(3,-2,5)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $5\sqrt{2}$ தொலைவில் y யச்சிலுள்ள புள்ளிகளின் ஒருங்களவுகளை காண்க.
5. x ஒருங்களவு 4 உள்ள R என்ற ஒரு புள்ளி $P\,(2,-3,4)$, $Q\,(8,0,10)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டில் இருக்கிறது. Rஇன் ஒருங்களவுகளை காண்க.

   [உதவி: R PQவை $k:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது என்க. Rஇன் ஒருங்களவுகள்

   $$\left(\frac{8k+2}{k+1}, \frac{-3}{k+1}, \frac{10k+4}{k+1}\right)$$

   ]
6. A யும் B யும் முறையே $(3,4,5)$, $(-1,3,-7)$ என்ற புள்ளிகள் எனில் $PA^2+PB^2=k^2$ என்றவாறான P என்ற புள்ளிகளின் சமன்பாட்டை காண்க; இங்கு k ஒரு மாறிலி.

சுருக்கவுரை

- முப்பரிமாணத்தில், ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று கோடுகள் செவ்வகக்காருட்டீசிய ஒருங்களவமைப்பின் ஒருங்களவச்சுகளாக பணியாற்றுகின்றன. இந்த அச்சுகளை x, y, zயச்சுகள் என்றழைக்கிறோம்.
- அச்சுகளின் ஒவ்வொரு சோடியும் தீர்மானிக்கும் மூன்று தளங்கள் ஒருங்களவுத்தளங்கள். அவற்றை XY, YZ, ZXதளங்கள் என்றழைக்கிறோம்.
- மூன்று ஒருங்களவுத்தளங்களும் இடவெளியை எட்டு அரைக்காற்பகுதிகளாக பிரிக்கின்றன.
- முப்பரிமாண வடிவியலில், P என்ற ஒரு புள்ளியின் ஒருங்களவுகளை (x,y,z) போன்ற ஒரு மும்மமாக எழுதுகிறோம். இங்கு x, y, z ஆகியவை முறையே YZ, ZX, XY தளங்களிலிருந்து தொலைவுகள்.

- (அ) x அச்சிலுள்ள எந்தப்புள்ளியும் $(x, 0,0)$ என்ற வடிவானது; (ஆ) y அச்சிலுள்ள எந்தப்புள்ளியும் $(0, y, 0)$வடிவானது; (இ) zஅச்சிலுள்ள எந்தப்புள்ளியும் $(0,0, z)$வடிவானது.
- $P(x_1, y_1, z_1), Q(x_2, y_2, z_2)$ என்ற இரண்டு புள்ளிகளிடையான தொலைவு

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ என்ற இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை உட்பக்கமாகவும் வெளிப்பக்கமாகவும் $m\colon n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் R என்ற புள்ளியின் ஒருங்களவுகள் முறையே

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right), \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m-n}\right)$$

- $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ என்ற இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளியின் ஒருங்களவுகள்

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

- (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) என்ற புள்ளிகள் உச்சியாகவுள்ள ஒரு முக்கோணத்தின் வடிவமையத்தின் ஒருங்களவுகள்

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$$

வரலாற்றுக்குறிப்பு

பகுப்பாய்வுவடிவியலின் தந்தையான இரினே இடேக்காட்டு (1596 – 1650) 1637இல் முக்கியமாக தளவடிவியலையே கையாண்டார். அவரின் உடன்கண்டாக்கரான பியர் பெர்மாவும் (1601-1665) இலா கயரும் (1640-1718) அவ்வாறே. முப்பரிமாண வடிவியலுக்கான சில மொழிவுரைகள் அவர்கள் எழுதியதில் இருப்பினும் விவரங்கள் இல்லை. இடேக்காட்டு முப்பரிமாண ஒருங்களவுகளைப்பற்றி சிந்தித்திருக்கிறார். ஆனால் அவர் அதை வளராக்கவில்லை. யா. பெருனூலி (1667-1748) 1715இல் இலைபினிசுக்கு எழுதிய கடிதத்தில் நாம் இன்று பயன்படுத்தும் ஒருங்களவுத்தளங்களை அறிமுகமாக்கினார். பகுப்பாய்வுத்திண்மவடிவியலின் அமைமுறையான வளராக்கத்தை முதன்முதலில் வழங்கியவர் அந்துவான் பேரண்டு (1666-1716). அவர் இதை 1700இல் பிரான்சிய அறிவகத்தில் ஒரு ஆராய்ச்சியுரையாக வழங்கினார். இலி. ஆயிலர் (1707-1783) முப்பரிமாண ஒருங்களவுவடிவியலை தன் 'வடிவியலுக்கு அறிமுகம்' என்ற நூலின் இரண்டாம் பகுதியின் பிற்சேர்க்கையில் 5ஆம் படலமாக 1748இல் அமைமுறையாக எடுத்தார்.

பத்தொன்பதாம் நூற்றாண்டின் நடுவிலே வடிவியல் மூன்று பரிமாணங்களுக்குமேல் நீட்டப்பட்டது. ஐன்சுடைனின் ஒப்பளவுமைக்கோட்பாட்டின் நேரவெளித்தொடர்வத்தில் இது பயன்படுவதை நன்கறிவோம்.