# படலம் 13

# எல்லைகளும் வகையீடுகளும்

**இயற்கையின் செயல்பாடுகளை விளக்க கணிதத்தை வெற்றிகரமாக பயன்படுத்துவதில் நுண்கணிதம் ஒரு மையப்பங்கை வகிக்கிறது–ஒயிற்றெட்டு**

## 13.1 அறிமுகம்

ஐசக்கு நியூட்டன்
(1642-1727)

இந்த படலம் நுண்கணிதத்துக்கு ஒரு அறிமுகம். ஒரு சார்பனின் களத்தில் புள்ளிகள் மாறும்போது அதன் மதிப்பு மாறுவதை ஆராயும் ஒரு கணிதப்பிரிவு நுண்கணிதம். வகையீட்டை வரையறுக்கும்முன்பு, அதைப்பற்றிய ஒரு உள்ளுணர்வான கருத்தை வழங்குகிறோம். பிறகு, எல்லையின் ஒரு எளிய வரையறையை வழங்கி எல்லைகளின் குறிக்கணிதத்தை சற்று காண்போம். அதன்பின் வகையீட்டை வரையறுத்து அதன் குறிக்கணிதத்தை கற்போம். சில வழக்கமான சார்பன்களின் வகையீடுகளையும் காண்போம்.

## 13.2 வகையீட்டின் உள்ளுணர்வான கருத்து

உயரமான ஒரு மலையுச்சியிலிருந்து விழவிட்ட ஒரு பொருள் $t$ நொடிகளில் $4.9t^2$ மீட்டரை கடக்கிறது என்று பரிசோதனைகள் காட்டுகின்றன; அதாவது பொருள் கடக்கும் தொலைவை மீட்டரில் $s$ என்று குறித்தால், அதை $t$யின் ஒரு சார்பனாக $s = 4.9t^2$ என்று எழுதலாம்.

வெவ்வேறு நேரங்களை நொடியிலும் அந்த நேரங்களில் மலையுச்சியிலிருந்து விழும் பொருள் கடந்த தொலைவுகளை மீட்டரிலும் அட்டவணை 13.1 தருகிறது.

இந்த தரவுகளிலிருந்து $t = 2$ நொடி போன்ற ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் பொருளின் திசைவேகத்தை காண விரும்புகிறோம். ஒரு அணுகுமுறை என்னவென்றால், $t = 2$ நொடியில் முடியும் வெவ்வேறு நேர இடைவெளிகளில் சராசரித்திசைவேகத்தை கணக்கிட்டு $t = 2$ நொடியிலுள்ள திசைவேகத்தைப்பற்றி ஏதும் அறியலாமா என்று பார்ப்பது.

சராசரித்திசைவேகம், $v$ என்பது $t_t$, $t_2$ ஆகிய நேரங்களுக்கிடையில் கடந்த தொலைவை அந்த நேர இடைவெளியால் வகுத்து பெறுவது. ஆகவே

முதல் இரண்டு நொடிகளில் சராசரித்திசைவேகம்

$$= \frac{t_1 = 0\text{இலிருந்து } t_2 = 2\text{வரை கடந்த தொலைவு}}{\text{நேர இடைவெளி } (t_2 - t_1)}$$

$$= \frac{(19.6 - 0)\ m}{(2 - 0)\ s} = 9.8\ m/s$$

இதைப்போல், $t = 1$, $t = 2$ என்ற நேரங்களிடையில் சராசரித்திசைவேகம்

$$\frac{(19.6 - 4.9)m}{(2 - 1)s} = 14.7\frac{m}{s}$$

இவ்வாறே தொடர்ந்து பல $t_1$ மதிப்புகளுக்கு $t = t_1$, $t = 2$ என்ற இடைவெளிகளில் சராசரித்திசைவேகங்களை கணக்கிடுகிறோம். வெவ்வேறு $t_1$ மதிப்புகளுக்கு இந்த சராசரித் திசைவேகங்களை அட்டவணை 13.2 தருகிறது.

அட்டவணை 13.1

| $t$ | $s$ | $t$ | $s$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2.05 | 20.59225 |
| 1 | 4.9 | 2.1 | 21.609 |
| 1.5 | 11.025 | 2.2 | 23.716 |
| 1.8 | 15.876 | 2.5 | 30.625 |
| 1.9 | 17.689 | 3 | 44.1 |
| 1.95 | 18.63225 | 4 | 78.4 |
| 2 | 19.6 | | |

அட்டவணை 13.2

| $t_1$ | 0 | 1 | 1.5 | 1.8 | 1.9 | 1.95 | 1.99 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$ | 9.8 | 14.7 | 17.15 | 18.62 | 19.11 | 19.35 | 19.55 |

சராசரித்திசைவேகம் படிப்படியாக அதிகரிப்பதை அட்டவணை 13.2இல் காண்கி

றோம். $t = 2$இல் முடியும் இடைவெளிகளை சிறிதாக்கும்போது $t = 2$இல் சராசரித்திசைவேகத்தை மேலும் துல்லியமாக நெருங்குவோம் என்று எதிர்பார்க்கலாம். 1.99 நொடிக்கும் 2 நொடிக்குமிடையில் பெரும் மாறுதல் ஏதும் நிகழாது என்ற நம்பிக்கையில், $t = 2$ நொடியில் சராசரித்திசைவேகம் $19.551\, m/s$ ஐவிட சற்றே அதிகமாயிருக்கும் என்று நாம் எதிர்பார்க்கலாம்.

இந்த முடிபு கீழ்க்காணும் கணக்கீட்டால் வலுவடைகிறது. $t = 2$இல் தொடங்கும் பல நேர இடைவெளிகளில் சராசரித்திசைவேகங்களை கணக்கிடுவோம். முன்புபோலவே, $t = 2$ நொடிக்கும் $t = t_2$ நொடிக்குமிடையில், $v$ என்று நாம் குறிக்கும் சராசரித்திசைவேகம்

$$= \frac{2 \text{ நொடிக்கும் } t_2\text{க்கும் இடையில் தொலைவு}}{t_2 - 2}$$

$$= \frac{t_2\text{இல் தொலைவு} - 2 \text{ நொடியில் தொலைவு}}{t_2 - 2}$$

$$= \frac{t_2\text{இல் தொலைவு} - 19.6}{t_2 - 2}$$

இரண்டு நொடியில் தொடங்கி $t_2$ நொடியில் முடியும் நேர இடைவெளிகளில் கணக்கிட்ட சராசரித்திசைவேங்களை அட்டவணை 13.3 காட்டுகிறது.

**அட்டவணை 13.3**

| $t_2$ | 4 | 3 | 2.5 | 2.2 | 2.1 | 2.05 | 2.01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$ | 29.4 | 24.5 | 22.05 | 20.58 | 20.09 | 19.845 | 19.649 |

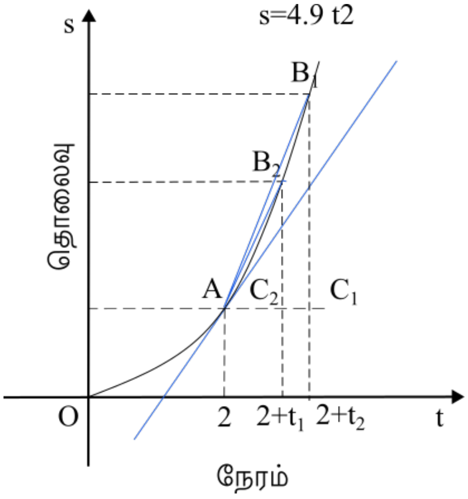
இங்கும் இடைவெளிகள் சிறிதாகி 2 நொடிகளை நெருங்க 2 நொடியிலுள்ள சராசரி வேகத்தின் துல்லியமான மதிப்பை பெறுகிறோம்.

முதல் கணக்கீட்டுத்தொகுதியில் இரண்டு நொடிக்கு முன்புள்ள பல நேர இடைவெளிகளில் சராசரித்திசைவேகத்தை கணக்கிட்டோம். இரண்டுக்கு சற்றுமுன்பு அதிக மாற்றமிருக்காது என்று நம்பினோம். இரண்டாம் கணக்கீட்டுத் தொகுதியில் இரண்டு நொடிக்கு பின்னுள்ள பல நேர இடைவெளிகளில் சராசரித்திசைவேகத்தை கணக்கிட்டு இரண்டுக்கு சற்றுப்பின்பு அதிக மாற்றமிருக்காது என்று நம்பினோம். இயல் நிகழ்வுகளின் அடிப்படையிலே இந்த இரண்டு தொகுதிகளில் கணக்கிட்ட சராசரித்திசைவேகங்களும் ஒரு பொதுவான எல்லையை அணுகவேண்டும் என்று எதிர்பார்ப்போம். $t = 2$ நொடிகளில் பொருளின் திசைவேகம் $19.551\, m/s$ க்கும் $19.649\, m/s$ க்கும் இடையில் இருக்கும் என்று நாம் உறுதியுடன் முடிவுசெய்யலாம். செய்நுட்பமாக, $t = 2$ நொடியில் பொருளின் உடனடித்திசைவேகம் $19.551\, m/s$ க்கும் $19.649\, m/s$ க்கும் இடையில் இருக்கிறது என்கிறோம். *இடப்பெயர்ச்சி மாறும் வீதமே திசைவேகம்* என்பது நாம் நன்கறிந்தது. ஆகவே நாம் இதுவரை செய்தது என்னவென்றால், வெவ்வேறு நேரங்களில் கொடுத்துள்ள தொலைவுகளின் தரவுகளிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் தொலைவின் மாற்றவீதத்தை மதிப்பிட்டிருக்கிறோம். இதை $t = 2$இல் $s = 4.9t^2$ என்ற தொலைவுச்சார்பனின் *வகைக்கெழு* 19.551க்கும் 19.649 க்குமிடையில் இருக்கிறது என்கிறோம்.

இந்த எல்லைநிகழ்முறையை நோக்கும் மற்றொரு விதத்தை படம் 13.1 காட்டுகிறது. இது மலையுச்சியிலிருந்து விழும் பொருளின் தொலைவை ($s$) நேரத்துக்கு ($t$) எதிராக வரைந்த வரைகோடு. நேர இடைவெளிகளின் $h_1, h_2, \ldots$ என்ற தொடரி சுழியை அணுகும்போது,

$$\frac{C_1B_1}{AC_1}, \frac{C_2B_2}{AC_2}, \frac{C_3B_3}{AC_3}, \ldots$$

என்ற தொடரி அணுகும் அதே எல்லையை சராசரித்திசைவேகங்கள் அணுகுகின்றன; இங்கு, $h_1 = AC_1$ என்ற நேர இடைவெளியில் பொருள் கடக்கும் தொலைவு $C_1B_1 = s_1 - s_0$ ; இவ்வாறே மற்றவையும். இந்த தொடரி $A$இல் வளைவரையின் தொடுகோட்டின் சாய்மையை அணுகுகிறது என்ற முடிவுக்கு வருவது படம் 13.1இலிருந்து இயல்பாக தோன்றுகிறது. வேறுவிதமாகச்சொன்னால், $t = 2$ என்ற நேரத்தில் ஒரு பொருளின் $v(t)$ என்று நாம் குறிக்கும் உடனடித்திசைவேகம் $s = 4.9t^2$ என்ற வளைவரையின் $t = 2$ இலுள்ள தொடுகோட்டின் சாய்மைக்கு சமம்.



படம் 13.1

## 13.3 எல்லைகள்

மேற்கண்ட உரை எல்லைநிகழ்முறையை நாம் நன்கு புரிந்துகொள்ளவேண்டும் என்பதை தெளிவாக்குகிறது. எல்லை என்ற கருத்துருவை பழகிக்கொள்வதற்கு சில சான்றுகளை காண்போம்.

$f(x) = x^2$ என்ற சார்பனை கருதுக. $x$ இன் மதிப்பு சுழியத்தின் அருகிலிருக்கும்போது $f(x)$ இன் மதிப்பும் சுழியத்தின் அருகில் இருக்கிறது (இரண்டாம் படலத்தில் படம் 2.10ஐ காண்க). இதை

$$\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}}\, f(x) = 0$$

என்கிறோம். ( $x$ சுழியத்தை அணுகும்போது $f(x)$ இன் எல்லை சுழியம் என்று வாசிக்க). $x$ சுழியத்தை அணுகும்போது $f(x)$இன் எல்லையை $x = 0$இல் $f(x)$க்கு இருக்கவேண்டிய மதிப்பாக நாம் எண்ணலாம். பொதுவாக, $x \to a$ என்றபோது, $f(x) \to l$ எனில் $f(x)$ என்ற *சார்பனின் எல்லை* $l$ என்கிறோம்; இதை குறியீட்டால்,

$$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, f(x) = l$$

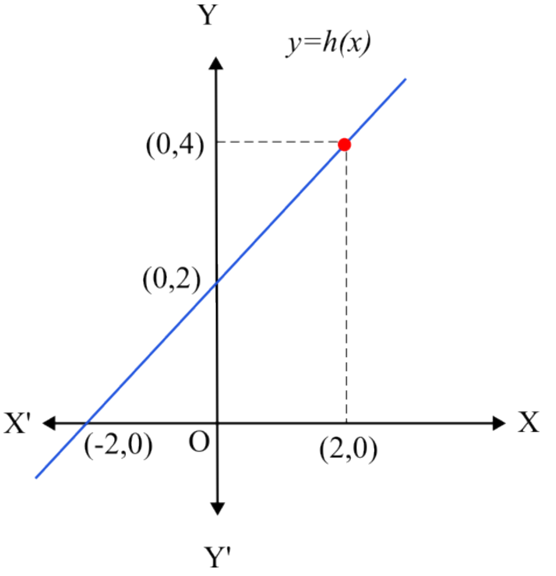
என்று எழுதுகிறோம்.

$g(x) = |x|, x \neq 0$ என்ற சார்பனை கருதுக. $g(0)$ வரையறுக்கப்படாததை நோக்குக. சுழியத்தின் மிக அருகிலுள்ள $x$இன் மதிப்புகளுக்கு நாம் $g(x)$ஐ கணக்கிட்டு, $g(x)$ இன் மதிப்பு சுழியத்தை நெருங்குவதை காண்கிறோம். ஆகவே, $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}\, g(x) = 0$. இது $g(x) = |x|, x \neq 0$ என்ற வரைபடத்திலிருந்து உள்ளுணர்வால் தெளிவாகிறது. (இரண்டாம் படலத்தில் படம் 2.13ஐ காண்க).

கீழ்க்காணும் சார்பனை கருதுக.

$$h(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \qquad x \neq 2$$

2க்கு மிக அருகில் ஆனால் 2க்கு சமமில்லாத $x$மதிப்புகளுக்கு $h(x)$இன் மதிப்புகளை கணக்கிடுவோம். இந்த எல்லா மதிப்புகளும் 4இன் மிக அருகில் இருப்பதை உணர்ந்துகொள்க. இதற்கு வலுவூட்ட படம் 13.2இலுள்ள $y = h(x)$ என்ற சார்பனின் வரைபடத்தை காண்க.



படம் 13.2

மேற்கண்ட சான்றுகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட $x = a$ என்ற இடத்தில் சார்பன் எடுக்கவேண்டிய மதிப்பு $x$ எவ்வாறு $a$ஐ அணுகுகிறது என்பதை சார்ந்திருக்கவில்லை. $x$ $a$ஐ அணுக இரண்டு வழிகள் இருப்பதை நோக்குக. வலப்பக்கத்திலிருந்து அணுகலாம்; அதாவது $x$இன் மதிப்புகள் $a$ஐவிட அதிகமாயிருக்கலாம். அல்லது இடப்பக்கத்திலிருந்து அணுகலாம்; அதாவது $x$இன் மதிப்புகள் $a$ஐவிட குறைவாயிருக்கலாம். இதனால் *வலப்பக்க எல்லை, இடப்பக்க எல்லை* என இரண்டுவிதமான எல்லைகள் இருக்கின்றன. வலப்பக்கத்திலிருந்து $x$ $a$ஐ அணுகும்போது கிடைக்கும் $f(x)$இன் மதிப்புகளிலிருந்து பெற்ற எல்லையை அந்த சார்பனின் வலப்பக்க எல்லை என்கிறோம்; இடப்பக்க எல்லைக்கும் அதைப் போலவே. இதை எடுத்துக்காட்ட,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$$

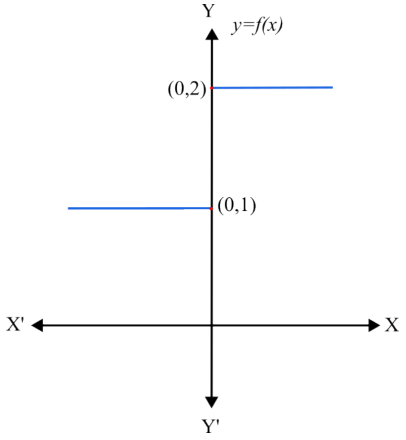
என்ற சார்பனை கருதுக. இதன் வரைபடத்தை படம் 13.3 காட்டுகிறது. தெளிவாக, $x \le 0$ என்பதற்கு நிகரான $f(x)$இன் மதிப்புகளிலிருந்து 0த்தில் $f$இன் மதிப்பாக நாம் பெறுவது 1க்கு சமம். இதை 0த்தில் $f(x)$இன் இடப்பக்க எல்லை என்றழைத்து,

$$\underset{x\to 0^-}{\text{எல்லை}}\, f(x) = 1$$

என்று எழுதுகிறோம்; இங்கு, $x$ 0த்தை இடப்பக்கமிருந்து அணுகுகிறது என்பதை $x \to 0^-$ என்று குறித்தோம். இதைப்போல, $x > 0$ என்பதற்கு நிகரான $f(x)$இன் மதிப்புகளிலிருந்து 0த்தில் $f$இன் மதிப்பாக 2ஐ பெறுவதால், இதை 0த்தில் $f(x)$இன் வலப்பக்க எல்லையாக

$$\underset{x\to 0^+}{\text{எல்லை}}\, f(x) = 2$$

எனறு எழுதுகிறோம். இந்த சார்பனுக்கு வலப்பக்க எல்லையும் இடப்பக்க எல்லையும் வேறுபடுகின்றன; அதனால், $x$ சுழியத்தை அணுகும்போது $f(x)$இன் எல்லை இல்லை என்கிறோம். சுழியத்தில் சார்பனின் மதிப்பு வரையறுக்கப்பட்டது என்பதை நோக்குக; எனினும் அங்கு எல்லை இல்லை.



படம் 13.3

**சுருக்கவுரை**

$a$யின் அருகில் இடப்பக்கமுள்ள $x$ மதிப்புகளில் $f(x)$இன் மதிப்புகளிலிருந்து $a$யில் நாம் எதிர்பார்க்கும் $f$இன் மதிப்பை

$\underset{x\to a^-}{\text{எல்லை}} f(x)$ என்று குறித்து, அதை $a$யில் $f$இன் *இடப்பக்க எல்லை* என்றழைக்கிறோம்.

$a$யின் அருகில் வலப்பக்கம் உள்ள $x$ மதிப்புகளில் $f(x)$இன் மதிப்புகளிலிருந்து $a$யில் நாம் எதிர்பார்க்கும் $f$இன் மதிப்பை $\underset{x\to a^+}{\text{எல்லை}} f(x)$ என்று குறித்து, அதை $a$யில் $f$இன் *வலப்பக்க எல்லை* என்றழைக்கிறோம்.

இடப்பக்க எல்லையும் வலப்பக்க எல்லையும் சமமானால் இந்த மதிப்பை $\underset{x\to a}{\text{எல்லை}} f(x)$ என்று குறித்து, அதை $a$யில் $f$இன் *எல்லை* என்றழைக்கிறோம்.

**எடுத்துக்காட்டு 1** $f(x) = x + 10$ என்ற சார்பனை கருதுக. $x = 5$இல் இந்த சார்பனின் எல்லையை காண விரும்புகிறோம்.

5இன் மிக அருகிலுள்ள $x$ மதிப்புகளுக்கு $f(x)$ இன் மதிப்புகளை கணக்கிடுவோம். 5 இன் இடப்பக்கமுள்ள சில மதிப்புகள் 4.9, 4.95, 4.99, 4.995, … இன்ன பிற. இந்த புள்ளிகளில் சார்பனின் மதிப்புகளை அட்டவணை 13.4 காட்டுகிறது. அதைப்போல், 5.001, 5.01, 5.1 ஆகியவை 5இன் அருகில் வலப்பக்கமுள்ள மெய்யெண்கள். இந்த புள்ளிகளிலும் சார்பனின் மதிப்புகளை அதே அட்டவணையில் காட்டியிருக்கிறோம்.

**அட்டவணை 13.4**

| $x$ | 4.9 | 4.95 | 4.99 | 4.995 | 5.001 | 5.01 | 5.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 14.9 | 14.95 | 14.99 | 14.995 | 15.001 | 15.01 | 15.1 |

$x = 4.995$, $5.0001$ ஆகியவற்றுக்கு இடையிலுள்ள இடங்களில் ஏதும் எதிர்பாராதது நிகழவில்லை என்ற எடுகோளுடன், $x = 5$இல் $f(x)$இன் மதிப்பு 14.995ஐவிட அதிகமாகவும் 15.001ஐவிட குறைவாகவும் இருக்கவேண்டும் என்று அட்டவணை 13.4இலிருந்து தருவிக்கிறோம். 5இன் இடப்பக்கமிருக்கும் எண்களிலிருந்து $x = 5$இல் $f(x)$இன் மதிப்பு 15 என்று எடுகொள்வது காரணத்துவமானது. அதாவது,

$$\underset{x\to 5^-}{\text{எல்லை}} f(x) = 15$$

இதைப்போல், $x$ வலப்பக்கத்திலிருந்து 5ஐ அணுகும்போது 15 என்ற மதிப்பை அடைவதாக தோன்றுகிறது; அதாவது,

$$\underset{x\to 5^+}{\text{எல்லை}} f(x) = 15$$

ஆகவே, $f(x)$இன் இடப்பக்க எல்லையும் வலப்பக்க எல்லையும் 15க்கு சமமாகும் வாய்ப்பு அதிகம். இவ்வாறு,

$$\underset{x\to 5^-}{\text{எல்லை}} f(x) = \underset{x\to 5^+}{\text{எல்லை}} f(x)$$
$$= \underset{x\to 5}{\text{எல்லை}} f(x) = 15$$

எல்லை 15க்கு சமம் என்ற இந்த முடிபு இந்த சார்பனின் வரைபடத்தை பார்ப்பதன்மூலம் சற்று வலுவடைகிறது. இந்த வரைபடத்தை இரண்டாம் படலத்திலுள்ள படம் 2.16 காட்டுகிறது. அந்தப்படத்தில், $x$ இடப்பக்கமிருந்தோ வலப்பக்கமிருந்தோ 5ஐ அணுகும்போது $f(x) = x + 10$ என்ற சார்பன் (5,15) என்ற புள்ளியை அணுகுவதை காண்கிறோம். சார்பனின் மதிப்பும் $x = 5$இல் 15 என்பதையும் அந்தப்படத்திலிருந்து காண்கிறோம்.

**எடுத்துக்காட்டு 2** $f(x) = x^3$ என்ற சார்பனை கருதுக. $x = 1$இல் இந்த சார்பனின் எல்லையை காண முயல்வோம்.

முந்தைய சான்றில்போலவே 1க்கு அருகிலுள்ள $x$ மதிப்புகளுக்கு $f(x)$இன் மதிப்புகளை பட்டியலிடுவோம். இது அட்டவணை 13.5இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

**அட்டவணை 13.5**

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0.9 | 0.729 |
| 0.99 | 0.970299 |
| 0.999 | 0.997002999 |
| 1.001 | 1.003003001 |
| 1.01 | 1.030301 |
| 1.1 | 1.331 |

அட்டவணையிலிருந்து, $x = 0.999$க்கும் 1.001க்குமிடையில் சார்பனின் போக்கில் குறிப்பிடத்தக்க மாற்றம் ஏதும் நிகழவில்லை என்ற எடுகோளுடன், $f(x)$இன் மதிப்பு 0.997002999க்கும் 1.003003001க்கும் இடைப்பட்டதாக இருக்கவேண்டும் என்று தருவிக்கிறோம். 1இன் இடப்பக்கத்திலுள்ள எண்களிலிருந்து $x = 1$இல் $f(x)$இன் மதிப்பு 1 என்று எடுகொள்வது காரணமுடையதாகிறது; அதாவது

$$\underset{x\to 1^-}{\text{எல்லை}} f(x) = 1.$$

அதைப்போல், $x$ வலப்பக்கத்திலிருந்து 1ஐ அணுகும்போது 1 என்ற மதிப்பு இருக்கவேண்டும்; அதாவது

$$\underset{x\to 1^+}{\text{எல்லை}} f(x) = 1.$$

ஆகவே, $f(x)$இன் இடப்பக்க எல்லையும் வலப்பக்க எல்லையும் 1க்கு சமம் என்பது வாய்ப்பானது. இவ்வாறு,

$$\underset{x\to 1^-}{\text{எல்லை}} f(x) = \underset{x\to 1^+}{\text{எல்லை}} f(x) = \underset{x\to 1}{\text{எல்லை}} f(x)$$
$$= 1.$$

எல்லை 1க்கு சமம் என்ற இந்த முடிபு இரண்டாம் படலத்தின் படம் 2.11இலுள்ள இந்த சார்பனின் வரைபடத்தை பார்ப்பதன்மூலம் சற்று வலுவடைகிறது. அந்தப்படத்தில், $x$ வலப்பக்கமிருந்தோ இடப்பக்கமிருந்தோ 1ஐ அணுக, $f(x) = x^3$ என்ற சார்பனின் வரைபடம் (1,1) என்ற புள்ளியை அணுகுவதை காண்கிறோம்.

இங்கும், $x = 1$ இல் சார்பனின் மதிப்பு 1க்குச்சமமாக நேர்கிறது.

**எடுத்துக்காட்டு 3** $f(x) = 3x$ என்ற சார்பனை கருதுக. $x = 2$இல் இந்த சார்பனின் எல்லையை காண முயல்வோம்.

இப்போது அட்டவணை 13.6இன் பொருள் உங்களுக்கு உடனே விளங்கும்.

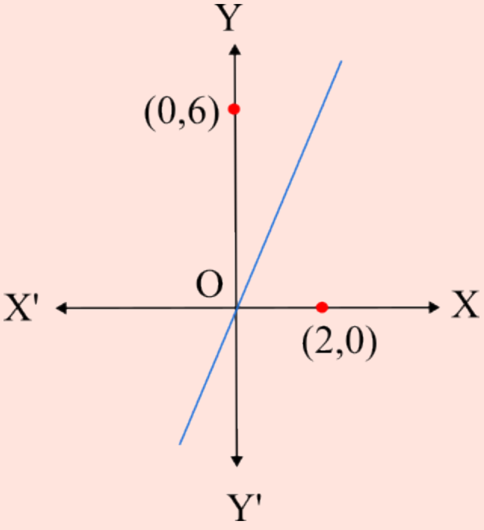
**அட்டவணை 13.6**

| $x$ | 1.9 | 1.95 | 1.99 | 1.999 | 2.001 | 2.01 | 2.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5.7 | 5.85 | 5.97 | 5.997 | 6.003 | 6.03 | 6.3 |

முன்புபோலவே, $x$ இடமிருந்தோ வலமிருந்தோ 2ஐ அணுக $f(x)$இன் மதிப்பு 6ஐ அணுகுவதாக தோன்றுகிறது. இதை

$$\underset{x\to 2^-}{\text{எல்லை}}\, f(x) = \underset{x\to 2^+}{\text{எல்லை}}\, f(x)$$
$$= \underset{x\to 2}{\text{எல்லை}}\, f(x) = 6$$

என்று பதிந்துகொள்கிறோம். படம் 13.4இல் காட்டிய இந்த சார்பனின் வரைபடம் இதற்கு வலுவூட்டுகிறது.



படம் 13.4

**எடுத்துக்காட்டு 4** $f(x) = 3$ என்ற மாறிலிச்சார்பனை கருதுக. $x = 2$ இல் இதன் எல்லையை காண முயல்வோம்.

இது மாறிலிச்சார்பன் ஆதலால், அதற்கு எல்லாவிடங்களிலும் ஒரே மதிப்பு (இங்கு 3) இருக்கிறது; அதாவது 2இன் அருகிலுள்ள புள்ளிகளில் அதன் மதிப்பு 3. ஆகவே

$$\underset{x\to 2^-}{\text{எல்லை}}\, f(x) = \underset{x\to 2^+}{\text{எல்லை}}\, f(x) = \underset{x\to 2}{\text{எல்லை}}\, f(x)$$
$$= 3$$

$f(x)$இன் வரைபடம் (0,3) வழியே செல்லும் $x$ அச்சுக்கு இணையான ஒரு நேர்க்கோடு; இதை இரண்டாம் படலத்தில் படம் 2.9 காட்டுகிறது. இதிலிருந்தும் தேவையான எல்லை 3 என்பது தெளிவாகிறது. உண்மையில், $a$ என்ற எந்த மெய்யெண்ணுக்கும் $\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, f(x) = 3$ என்பது தெளிவு.

**எடுத்துக்காட்டு 5** $f(x) = x^2 + x$ என்ற சார்பனை கருதுக. $\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\, f(x)$ ஐ காண விரும்புகிறோம்.

$x = 1$ இன் அருகில் $f(x)$ இன் மதிப்புகளை அட்டவணை 13.7இல் பட்டியலிடுகிறோம்.

**அட்டவணை 13.7**

| $x$ | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 1.01 | 1.1 | 1.2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.71 | 1.9701 | 1.997 | 2.03 | 2.31 | 2.64 |

இதிலிருந்து

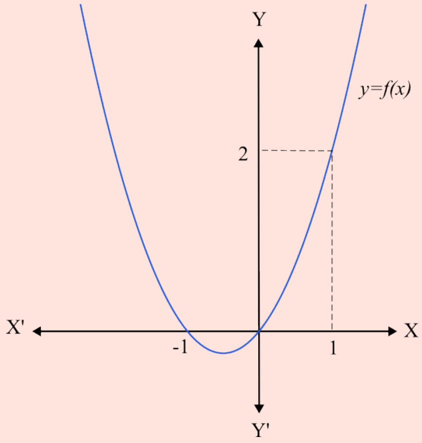
$$\underset{x->1^-}{\text{எல்லை}}\, f(x) = \underset{x\to 1^+}{\text{எல்லை}}\, f(x)$$
$$= \underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\, f(x) = 2$$

என்று தருவிப்பது காரணமுடையது.

படம் 13.5இல் காட்டிய $f(x) = x^2 + x$ இன் வரைபடத்திலிருந்து $x$ 1 ஐ அணுகும்போது வரைபடம் (1,2) ஐ அணுகுவது தெளிவு. இங்கும்

$$\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\, f(x) = f(1)$$

என்று காண்கிறோம்.



படம் 13.5

இப்போது

$$\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\, x^2 = 1, \underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\, x = 1$$

எனில் கீழ்க்காணும் மூன்று மெய்களையும் நீங்கள் விளங்கிக்கொளளலாம்.

$$\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}(x+1) = \underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\, x + \underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\, 1$$
$$= 1 + 1 = 2$$

$$\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\, x^2 + \underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\, x = 1 + 1 = 2$$
$$= \underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}(x^2 + x)$$

$$\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\, x \,.\, \underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}(x+1) = 1.2 = 2$$
$$= \underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}[x(x+1)]$$
$$= \underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}(x^2 + x)$$

**எடுத்துக்காட்டு 6** $f(x) =$ வலி $x$ என்ற சார்பனை கருதுக.

$$\underset{x\to{}^{\pi}/_{2}}{\text{எல்லை}}\ \text{வவி}\,x$$

என்பதைக்காண ஆர்வங்கொள்கிறோம்; இங்கு, கோணத்தை ஆரையனில் அளக்கிறோம்.

${}^{\pi}/_{2}$ இன் அருகில் $f(x)$இன் மதிப்புகளை (தோராயமாக) பட்டியலிட்டு (அட்டவணை 13.8)

$$\underset{x\to\frac{\pi}{2}^-}{\text{எல்லை}}\, f(x) = \underset{x\to\frac{\pi}{2}^+}{\text{எல்லை}}\, f(x) = \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\text{எல்லை}}\, f(x)$$
$$= 1$$

என்று தருவிக்கலாம். மேலும் படம் 3.8 (படலம் 3) தரும் $f(x) = \text{வவி}\,x$ இன் வரைபடமும் இதற்கு ஆதரவளிக்கிறது. இங்கும்

$$\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\text{எல்லை}}\, f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

**அட்டவணை 13.8**

| $x$ | $\frac{\pi}{2} - 0.1$ | $\frac{\pi}{2} - 0.01$ | $\frac{\pi}{2} + 0.01$ | $\frac{\pi}{2} + 0.1$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.9950 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9950 |

**எடுத்துக்காட்டு 7** $f(x) = x + \text{உவவி}\,x$ என்ற சார்பனை கருதுக. $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}\, f(x)$ ஐ காண விரும்புகிறோம்.

இங்கு, 0இன் அருகில் $f(x)$இன் (தோராய) மதிப்புகளை பட்டியலிடுகிறோம் (அட்டவணை 13.9).

**அட்டவணை 13.9**

| $x$ | $-0.1$ | $-0.01$ | $-0.001$ | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.985 | 0.990 | 0.999 | 1.00 | 1.01 | 1.1 |

அட்டவணை 13.9இலிருந்து

$$\underset{x\to 0^-}{\text{எல்லை}}\, f(x) = \underset{x\to 0^+}{\text{எல்லை}}\, f(x)$$
$$= \underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}\, f(x) = 1$$

என தருவிக்கலாம். இங்கும், $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}\, f(x) = f(0) = 1$ என்பதை நோக்குகிறோம்.

இப்போது

$$\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}(x + \text{உவவி}\,x)$$
$$= \underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}\, x$$
$$+ \underset{x\to}{\text{எல்லை}}\, \text{உவவி}\,x$$

என்பதை நீங்களே சரிபார்த்துக்கொள்ளலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு 8** $f(x) = 1/x^2$ என்ற சார்பனை $x > 0$ என்றபோது கருதுவோம். $\underset{x\to 0^+}{\text{எல்லை}}\, f(x)$ஐ காண விரும்புகிறோம்

இங்கு, சார்பனின் களம் நேர்ம மெய்யெண்களாக கொடுத்துள்ளதை நோக்குக. ஆகவே, $f(x)$இன் மதிப்புகளை பட்டியலிடும் போது $x$ 0ஐ இடப்பக்கமிருந்து அணுகுவதைப்பற்றி நாம் பேசுவதில் பொருளில்லை. 0இன் அருகிலுள்ள நேர்ம $x$ மதிப்புகளுக்கு சார்பனின் மதிப்புகளை கீழே அட்டவணை 13.10இல் பட்டியலிடுகிறோம். இந்த அட்டவணையில் $n$ ஏதோவொரு நேர்ம முழுவெண்.

$x$ 0த்தை அணுக, $f(x)$ பெரிதாகிக் கொண்டே போவதை அட்டவணையில் காண்கிறோம். அதாவது, $f(x)$இன் மதிப்பை எந்தவொரு எண்ணையும்விட பெரிதாக ஆக்கிக்கொள்ளலாம்.

**அட்டவணை 13.10**

| $x$ | 1 | 0.1 | 0.01 | $10^{-n}$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 1100 | 10000 | $10^{2n}$ |

கணிதப்படி இதை

$$\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}\, f(x) = +\infty$$

என்கிறோம். இதுபோன்ற எல்லைகளை நாம் இந்த பாடத்தொகுதியில் இனி எதிர்கொள்ள மாட்டோம் என்பதை இப்போதே சொல்லிவிடுகிறோம்.

**எடுத்துக்காட்டு 9** $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}\, f(x)$ ஐ காண விரும்புகிறோம்; இங்கு,

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 2, & x > 0 \end{cases}$$

வழக்கம்போல், $f(x)$ இன் மதிப்புகளை $x$ 0த்தின் அருகிலிருக்கும்போது பட்டியலிடுகிறோம். $x$இன் எதிர்ம மதிப்புகளுக்கு $x - 2$ஐயும் நேர்ம மதிப்புகளுக்கு $x + 2$ஐயும் நாம் மதிப்பறியவேண்டியதை நோக்குக.

**அட்டவணை 13.11**

| $x$ | $-0.1$ | $-0.01$ | $-0.001$ | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-2.1$ | $-2.01$ | $-2.001$ | 2.001 | 2.01 | 2.1 |

அட்டவணை 13.11இன் முதல் மூன்று பதிகைகளிலிருந்து சார்பனின் மதிப்பு $-2$ஐநோக்கி நகர்வதால்

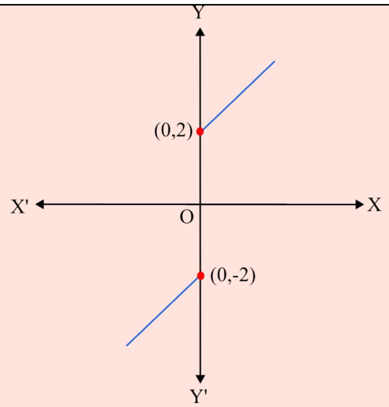
$$\underset{x\to 0^-}{\text{எல்லை}}\, f(x) = -2$$

என்று தருவிக்கிறோம். இறுதியான மூன்று பதிகைகளிலிருந்து சார்பனின் மதிப்பு 2ஐ அணுகுவதால்

$$\underset{x\to 0^+}{\text{எல்லை}}\, f(x) = 2$$

என்று தருவிக்கிறோம்.

இடப்பக்க எல்லையும் வலப்பக்க எல்லையும் சமமாகாததால், 0த்தில் சார்பனின் எல்லை இல்லை என்கிறோம்.



படம் 13.6

இந்த சார்பனின் வரைபடத்தை படம் 13.6 காட்டுகிறது. இங்கு, $x = 0$ த்தில் சார்பனின் மதிப்பு நன்கு வரையறுக்கப்பட்டது என்பதை குறிப்பிடுகிறோம்; அது அங்கு $0$த்துக்கு சமம். ஆனால் $x = 0$த்தில் சார்பனின் எல்லை வரையறுக்கப்படவில்லை.

**எடுத்துக்காட்டு 10** இறுதிச்சான்றாக,

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

என்றிருக்கும்போது, $\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\, f(x)$ ஐ காண்போம். வழக்கம்போல், $f(x)$இன் மதிப்பை $x = 1$இன் அருகில் பட்டியலிடுவோம். $1$ஐவிட குறைந்த $x$ மதிப்புகளிலிருந்து $x = 1$இல் சார்பன் $3$ என்ற மதிப்பை அடைவதுபோல் தோன்றுகிறது. ஆகவே,

$$\underset{x\to 1^-}{\text{எல்லை}}\, f(x) = 3.$$

அதைப்போல், $1$ஐவிட அதிகமான $x$மதிப்புகளிலிந்து சார்பன் $3$ஐ அடைவதாக தோன்றுகிறது. ஆகவே,

$$\underset{x\to 1^+}{\text{எல்லை}}\, f(x) = 3.$$

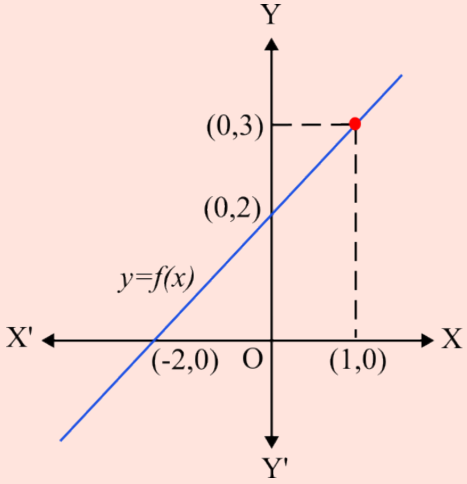
இடப்பக்க எல்லையும் வலப்பக்க எல்லையும் சமமாவதால்

$$\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\, f(x) = 3.$$

படம் 13.7 தரும் சார்பனின் வரைபடம் நம் தருவித்தல்களுக்கு வலுவூட்டுகின்றது. பொதுவாக, ஒரு புள்ளியில் சார்பனின் மதிப்பும் அதன் எல்லையும் வெவ்வேறாயிருக்கலாம் (இரண்டும் வரையறுக்கப்பட்ட போதிலும்) என்பது இங்கு குறிப்பிடத்தக்கது.

அட்டவணை 13.12

| $x$ | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 1.001 | 1.01 | 1.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2.9 | 2.99 | 2.999 | 3.001 | 3.01 | 3.1 |



படம் 13.7

### 13.3.1 எல்லைகளின் குறிக்கணிதம்

மேற்கண்ட சான்றுகளில், சார்பன்களின் எல்லைகளை நன்கு வரையறுக்கும்போது, எல்லையாக்க நிகழ்முறை கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் ஆகியவற்றை மதிக்கிறது என்று கண்டோம். உண்மையில், கீழ்க்காணும் தேற்றங்களை உரைக்கலாம். ஆனால் அவற்றின் நிறுவல்களை இங்கு தரவில்லை.

**தேற்றம் 1** $f$, $g$ ஆகியவை இரண்டு சார்பன்கள் என்றும் அவற்றின் $\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, f(x)$, $\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, g(x)$ ஆகிய எல்லைகள் இருக்கின்றன என்றும் கொள்வோம். அப்படியெனில்,

(அ) இரண்டு சார்பன்களின் கூட்டுத்தொகையின் எல்லை அவற்றின் எல்லைகளின் கூட்டுத்தொகை; அதாவது

$$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}[f(x)+g(x)]$$
$$= \underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, f(x) + \underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, g(x).$$

(ஆ) இரண்டு சார்பன்களின் வேறுபாட்டின் எல்லை அவற்றின் எல்லைகளின் வேறுபாடு; அதாவது

$$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}[f(x)-g(x)]$$
$$= \underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, f(x) - \underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, g(x)$$

(இ) இரண்டு சார்பன்களின் பெருக்குத்தொகையின் எல்லை அவற்றின் எல்லைகளின் பெருக்குத்தொகை; அதாவது

$$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}[f(x).\, g(x)]$$
$$= \underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, f(x)\,.\, \underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, g(x).$$

(ஈ) இரண்டு சார்பன்களின் வகுத்தலீவின் எல்லை அவற்றின் எல்லைகளின் வகுத்தலீவு; அதாவது

$$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, f(x)}{\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, g(x)}$$

குறிப்பாக, (இ)யின் ஒரு தனித்துவ வேற்றுவமாக, $g(x)=\lambda$ என்றவாறு $g$ ஒரு மாறிலிச்சார்பன் ஆகும்போது

$$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}[\lambda . f(x)]=\lambda . \underset{x-a}{\text{எல்லை}}\, f(x)$$

அடுத்த இரண்டு உட்பகுதிகளில் இந்த தேற்றத்தை பயன்படுத்தி சில தனித்துவ சார்பன்களின் எல்லைகளை மதிப்பறிவதை எடுத்துக்காட்டுவோம்.

### 13.3.2 பல்லுறுப்புகளின் எல்லைகளும் விகிதமுறு சார்பன்களின் எல்லைகளும்

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ என்ற சார்பனை $n$ அடுக்குடைய ஒரு பல்லுறுப்புச் சார்பன் என்று அழைக்கிறோம்; இங்கு $n$ ஒரு இயலெண், $a_i$களெல்லாம் மெய்யெண்கள், $a_n \neq 0$.

$$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, x = a$$

என்பது அற்பமான விளைவு. ஆகவே

$$\begin{aligned}\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, x^2 &= \underset{x\to a}{\text{எல்லை}}(x.x)\\ &= \underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, x \,.\, \underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, x = a.a\\ &= a^2\end{aligned}$$

இதிலிருந்து கணிதத்தூண்டலின் முறையால்

$$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, x^n = a^n$$

என்பதை எளிதில் பெறலாம்.

இப்போது, $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ ஒரு பல்லுறுப்புச்சார்பன் என்க. $a_0$ , $a_1x$ , $a_2x^2$, ..., $a_nx^n$ ஆகிய ஒவ்வொரு உருபையும் ஒரு சார்பனாக கருதி,

$$\begin{aligned}\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, f(x) &= \underset{x\to a}{\text{எல்லை}}[a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\\ &\qquad + a_nx^n]\\ &= \underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, a_0 + \underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, a_1x + \underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, a_2x^2 + \cdots\\ &\qquad + \lim_{x\to a} a_nx^n\\ &= a_0 + a_1 \underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, x + a_2 \underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, x^2 + \cdots\\ &\qquad + a_n \underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, x^n\\ &= a_0+a_1a+a_2a^2+\cdots+a_na^n\\ &= f(a)\end{aligned}$$

என்று பெறுகிறோம். (ஒவ்வொருபடிக்கும் அடிப்படையான காரணங்களை புரிந்துகொள்க).

$f$ என்ற ஒரு சார்பன் $f(x)={g(x)}\big/{h(x)}$ என்ற வடிவிலிருந்தால், அதை ஒரு விகிதமுறு சார்பன் என்கிறோம்; இங்கு, $g(x)$, $h(x)$ ஆகியவை பல்லுறுப்புகள், $h(x)\neq 0.$ அப்படியெனில்,

$$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, f(x) = \underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\frac{g(x)}{h(x)}$$

$$=\frac{\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, g(x)}{\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, h(x)}=\frac{g(a)}{h(a)}$$

ஆனால், $h(a)=0$ எனில் இரண்டு நிலைமைகளை நாம் தனித்தனியே கருதவேண்டும். (1) $g(a)\neq 0$ எனில் எல்லை இல்லை; அதாவது, எல்லையை வரையறுக்க வியலாது. (2) $g(a)=0$ என்றிருக்கும்போது, அதாவது விகிதமுறு சார்பனின் மேற்காரணியும் கீழ்க்காரணியும் $a$இல் சுழியமாகும்போது,

$$g(x)=(x-a)^k g_1(x)$$

என்றும்

$$h(x)=(x-a)^l h_1(x)$$

என்றும் சுழியமாக்கும் காரணிகளை தனியாகப் பிரித்து எழுதலாம்; இங்கு, $k$, $l$ ஆகியவை சுழியமாக்கக்காரணிகள் எத்தனைமுறை வருகின்றன என்பதை குறிக்கின்றன. இப்போது, $k>l$ எனில் மேற்காரணியின் சுழியமாக்கி கீழ்க்காரணியினதைவிட வலுவானது என்பதால்,

$$\begin{aligned}\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, f(x) &= \frac{\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, g(x)}{\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, h(x)}\\ &= \frac{\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}(x-a)^k g_1(x)}{\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}(x-a)^l h_1(x)}\\ &= \frac{\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}(x-a)^{k-l} g_1(x)}{\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, h_1(x)} = \frac{0. g_1(a)}{h_1(a)} = 0\end{aligned}$$

என்றாகிறது. $k=l$ எனில் சுழியமாக்கக்காரணிகளை நீக்கிவிட்டு எஞ்சிய காரணியிலிருந்து எல்லையை மதிப்பறியலாம். அதாவது,

$$\begin{aligned}\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, f(x) &= \frac{\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, g(x)}{\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, h(x)}\\ &= \frac{\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}(x-a)^k g_1(x)}{\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}(x-a)^k h_1(x)} = \frac{\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, g_1(x)}{\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\, h_1(x)}\end{aligned}$$

$k<l$ எனில் எல்லையை வரையறுக்கவில்லை.

**சான்று 1** எல்லைகளை காண்க:

(அ) $\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}(x^3-x^2+1)$

(ஆ) $\underset{x\to 3}{\text{எல்லை}}[x(x+1)]$

(இ) $\underset{x\to -1}{\text{எல்லை}}(1+x+x^2 \ldots + x^{10})$

தீர்வு இவையெல்லாம் பல்லுறுப்புச்சார்பன்களின் எல்லைகள். ஆகவே, குறிப்பிட்ட புள்ளிகளில் சார்பன்களின் மதிப்புகளே எல்லைகள்.

(அ) $\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}(x^3-x^2+1)=1^3-1^2+1=1$

(ஆ) $\underset{x\to 3}{\text{எல்லை}}[x(x+1)]=3(3+1)=12$

(இ) $\underset{x\to -1}{\text{எல்லை}}(1+x+x^2 \ldots + x^{10})$

$$\begin{aligned}&= 1+(-1)+(-1)^2+\cdots+(-1)^{10}\\ &= 1-1+1-\cdots+1=1\end{aligned}$$

**சான்று 2** எல்லைகளை காண்க:

(அ) $\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\left[\frac{x^2+1}{x+100}\right]$

(ஆ) $\underset{x\to 2}{\text{எல்லை}}\left[\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}\right]$

(இ) $\underset{x\to 2}{\text{எல்லை}}\left[\frac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x}\right]$

(ஈ) $\underset{x\to 2}{\text{எல்லை}}\left[\frac{x^3-2x^2}{x^2-5x+6}\right]$

(உ) $\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\left[\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right]$

**தீர்வு** இங்குள்ள எல்லாச்சார்பன்களும் விகிதமுறு சார்பன்கள். ஆகவே, முதலில் இந்த சார்பன்களை வேண்டிய இடங்களில் மதிப்பறிவோம். அது $^0/_0$ என்ற வடிவில் வந்தால், அவ்வாறு வரக்காரணமாகும் காரணிகளை நீக்கும்வகையில் சார்பன்களை மாற்றியெழுத முயல்வோம்.

(அ) சார்பனை 1இல் மதிப்பறியும்போது,

$$\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\left[\frac{x^2+1}{x+100}\right]=\frac{1^2+1}{1+100}=\frac{2}{101}$$

(ஆ) சார்பனை 2இல் மதிப்பிடும்போது $^0/_0$ என்ற வடிவாவதை காண்கிறோம். ஆகவே

$$\underset{x\to 2}{\text{எல்லை}}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}$$

$$=\underset{x\to 2}{\text{எல்லை}}\frac{x(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\underset{x\to 2}{\text{எல்லை}}\frac{x(x-2)}{(x+2)},\qquad x\neq 2\text{ என்பதால்}$$

$$=\frac{2(2-2)}{2+2}=\frac{0}{4}=0$$

$x=2$இன் எல்லையை காண்பதற்காக 2இன் அண்மையத்திலே சார்பனை மதிப்பறிகிறோம்; $x=2$இல் மதிப்பறியவில்லை. அதனால் சுழியமாகாத $x-2$ஐ நீக்கலாம்.

(இ) சார்பனை 2இல் மதிப்பிடும்போது $^0/_0$ ஐ பெறுகிறோம். ஆகவே

$$\underset{x\to 2}{\text{எல்லை}}\frac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x}$$

$$=\underset{x\to 2}{\text{எல்லை}}\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)^2}$$

$$=\underset{x\to 2}{\text{எல்லை}}\frac{(x+2)}{x(x-2)}=\frac{2+2}{2(2-2)}=\frac{4}{0}$$

இது வரையறுக்கப்படவில்லை.

(ஈ) சார்பனை 2இல் மதிப்பிட்டு $^0/_0$ஆவதை காண்கிறோம். ஆகவே

$$\underset{x\to 2}{\text{எல்லை}}\frac{x^3-2x^2}{x^2-5x+6}=\underset{x\to 2}{\text{எல்லை}}\frac{x^2(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$=\underset{x\to 2}{\text{எல்லை}}\frac{x^2}{x-3}=\frac{2^2}{2-3}=\frac{4}{-1}=-4.$$

(உ) முதலில் சார்பனை விகிதமுறுவடிவில் எழுதிக்கொள்வோம்.

$$\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}$$

$$=\frac{x-2}{x(x-1)}-\frac{1}{x(x^2-3x+2)}$$

$$=\frac{x-2}{x(x-1)}-\frac{1}{x(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{x^2-4x+4-1}{x(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{x^2-4x+3}{x(x-1)(x-2)}.$$

இப்போது, சார்பனை 1இல் மதிப்பறிந்து $^0/_0$ஆவதை காண்கிறோம். ஆகவே

$$\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}$$

$$=\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\frac{x^2-4x+3}{x(x-1)(x-2)}$$

$$=\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\frac{(x-3)(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$=\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\frac{(x-3)}{x(x-2)}$$

$$=\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}}\frac{1-3}{1(1-2)}=2$$

$x\neq 1$ என்பதால் $(x-1)$ஐ நீக்கினோம்.

பின்பு நாம் பயன்படுத்தப்போகும் ஒரு முக்கியமான எல்லையை கீழ்க்காணும் தேற்றத்தில் தருகிறோம்.

**தேற்றம் 2** $n$ என்ற எந்தவொரு நேர்ம முழுவெண்ணுக்கும்

$$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

**குறிப்பு** மேற்கண்ட தேற்றத்தில், $n$ ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகவும் $a$ நேர்ம எண்ணாகவும் இருக்கும்போதும் எல்லைக்கான கோவை சரியானதே.

**நிறுவல்** $(x^n-a^n)$ஐ $(x-a)$ஆல் வகுத்து

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1}).$$

என்று பெறுகிறோம். இவ்வாறு,

$$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})$$

$$=a^{n-1}+a^{n-2}a+\cdots+aa^{n-2}+a^{n-1}$$

$$=a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1}+a^{n-1}\quad(n\text{ உருபுகள்})$$

$$=na^{n-1}$$

**சான்று 3** மதிப்பறிக

(அ) $\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}} \dfrac{x^{15}-1}{x^{10}-1}$

(ஆ) $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

**தீர்வு** (அ)

$$\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}} \frac{x^{15}-1}{x^{10}-1} = \underset{x\to 1}{\text{எல்லை}} \left[\frac{x^{15}-1}{x-1} \div \frac{x^{10}-1}{x-1}\right]$$

$$= \underset{x\to 1}{\text{எல்லை}} \left[\frac{x^{15}-1}{x-1}\right] \div \underset{x\to 1}{\text{எல்லை}} \left[\frac{x^{10}-1}{x-1}\right]$$

$$= 15(1)^{14} \div 10(1)^{9}$$

(மேற்கண்ட தேற்றத்தின்படி)

$$= 15 \div 10 = \frac{3}{2}$$

(ஆ) $y = 1 + x$ என்று மாற்றிடுக. அப்படியெனில், $x \to 0$ எனும்போது $y \to 1$. ஆகவே

$$\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \underset{x\to 1}{\text{எல்லை}} \frac{\sqrt{y}-1}{y-1}$$

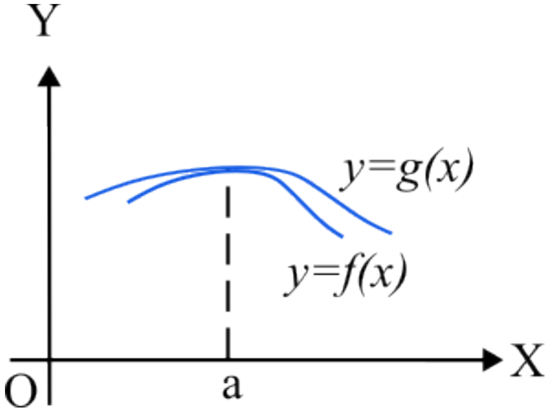
$$= \underset{x\to 1}{\text{எல்லை}} \frac{y^{\frac{1}{2}}-1^{\frac{1}{2}}}{y-1}$$

$$= \frac{1}{2}(1)^{\frac{1}{2}-1} \quad \text{(மேற்கண்ட குறிப்பின்படி)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

## 13.4 முக்கோணவியச் சார்பன்களின் எல்லைகள்

தேற்றங்களாக உரைக்கப்படும் கீழ்க்காணும் சில உண்மைகள் முக்கோணவியச் சார்பன்களின் எல்லைகளை மதிப்பறிவதில் மிகவும் பயன்படுகின்றன.



படம் 13.8

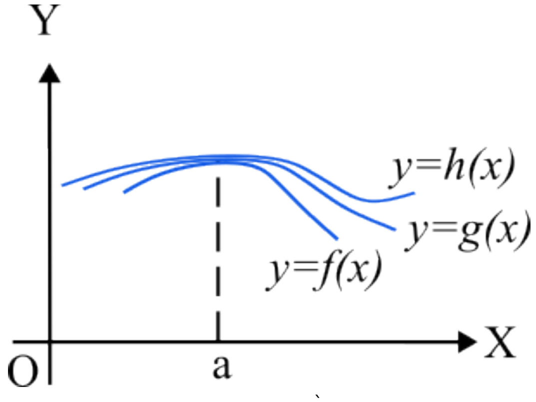
**தேற்றம் 3** $f, g$ ஆகியவை ஒரே களத்திலுள்ள இரண்டு சார்பன்கள் என்றும், களத்திலுள்ள எல்லா $x$களுக்கும் $f(x) \le g(x)$ என்றும் கொள்க. ஏதோவொரு $a$வுக்கு $\underset{x\to a}{\text{எல்லை}} f(x)$, $\underset{x\to a}{\text{எல்லை}} g(x)$ ஆகிய இரண்டு எல்லைகளும் இருந்தால், $\underset{x\to a}{\text{எல்லை}} f(x) \le \underset{x\to a}{\text{எல்லை}} g(x)$. இதை படம் 13.8 எடுத்துக்காட்டுகிறது.

**தேற்றம் 4 (அடைப்புத்தேற்றம்)** $f, g, h$ ஆகியவை தம் பொதுக்களத்திலுள்ள எல்லா $x$களிலும் $f(x) \le g(x) \le h(x)$ என்றவாறிருக்கும் மெய்ச்சார்பன்கள் என்க. $a$ என்ற ஏதோவொரு மெய்யெண்ணுக்கு

$$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}} f(x) = l = \underset{x\to a}{\text{எல்லை}} h(x) \text{ எனில்}$$

$$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}} g(x) = l$$

இதை படம் 13.9 எடுத்துக்காட்டுட்கிறது.



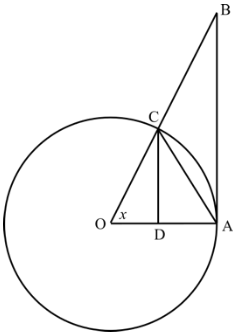
படம் 13.9

இதன் ஒரு சான்றான

$$\text{உவவி}\, x < \frac{\text{வவி}\, x}{x} < 1 \qquad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}\text{இல்}$$

என்ற முக்கியமான முக்கோணவிய சமமின்மைக்கு ஒரு அழகான வடிவிய நிறுவலை கீழ் தருகிறோம்.

**நிறுவல்** வவி$(-x) = -$வவி $x$ என்பதையும் உவவி$(-x) =$ உவவி $x$ என்பதையும் நாம் அறிவோம். ஆகவே, இந்த சமமின்மையை $0 < x < {}^{\pi}/_{2}$இல் நிறுவினால் போதும்.



படம் 13.10

படம் 13.10இல் அலகுவட்டத்தின் மையம் $O$; $AOC$ என்ற கோணம் $x$ ஆரையன்; $0 < x < {}^{\pi}/_{2}$. $BA$ , $CD$ ஆகிய கோட்டுத்துண்டுகள் $OA$வுக்கு செங்கோணமானவை. மேலும், $AC$யை இணைக்

கிறோம். அப்படியெனில், $\Delta OAC$யின் பரப்பு < $OAC$ கீற்றின் பரப்பு < $\Delta OAB$யின் பரப்பு.

அதாவது,

$$\frac{1}{2}OA.CD < \frac{x}{2\pi}.\pi.(OA)^2 < \frac{1}{2}OA.AB$$

அதாவது,

$$CD < x.OA < AB$$

$\Delta OCD$யிலிருந்து,

$$\text{வவி}\, x = \frac{CD}{OA} = (OC = OA \text{ என்பதால்})$$

$$\text{ஆகவே } CD = OA \text{ வவி}\, x$$

மேலும்,

$$\text{தொவி}\, x = \frac{AB}{OA}; \quad \text{ஆகவே}, AB = OA \text{ தொவி}\, x$$

இவ்வாறு,

$$OA \text{ வவி}\, x < OA\, x < OA \text{ தொவி}\, x$$

$OA$ என்ற நீளம் நேர்மமானது என்பதால்

$$\text{வவி}\, x < x < \text{தொவி}\, x$$

$0 < x < {}^{\pi}/_{2}$ என்பதால், வவி $x$ நேர்மமானது; எல்லாவற்றையும் வவி $x$ஆல் வகுக்கலாம்.

$$1 < \frac{x}{\text{வவி}\, x} < \frac{1}{\text{உவவி}\, x}.$$

எல்லாவற்றையும் புரட்டும்போது

$$\text{உவவி}\, x < \frac{\text{வவி}\, x}{x} < 1$$

இவ்வாறு நிறுவல் முற்றுகிறது.

**தேற்றம் 5** கீழ்க்காணும் இரண்டும் முக்கியமான எல்லைகள்.

(அ) $\underset{x\to0}{\text{எல்லை}} \frac{\text{வவி}\, x}{x} = 1$

(ஆ) $\underset{x\to0}{\text{எல்லை}} \frac{1 - \text{உவவி}\, x}{x} = 0$

நிறுவல் (அ) நான்காம் தேற்றத்தின் சமமின்மையின்படி,

$$\frac{\text{வவி}\, x}{x}$$

என்ற சார்பன் உவவி $x$ க்கும் 1 எனும் மதிப்புடைய மாறிலிச்சார்பனுக்குமிடையில் அடைப்புண்டிருக் கிறது.

மேலும், $\underset{x\to0}{\text{எல்லை}}\, \text{உவவி}\, x = 1$ என்பதால், தேற்றத்தின் (அ)பகுதியின் நிறுவல் அடைப்புத்தேற்றத்தால் முற்றுப்பெறுகிறது.

(ஆ)பகுதியை நிறுவ,

$$1 - \text{உவவி}\, x = 2\, \text{வவி}^2 \left(\frac{x}{2}\right)$$

என்ற முக்கோணவிய முற்றொருமையை நினைவுகொள்வோம். இதிலிருந்து,

$$\underset{x\to0}{\text{எல்லை}} \frac{1 - \text{உவவி}\, x}{x} = \underset{x\to0}{\text{எல்லை}} \frac{2\, \text{வவி}^2 \left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

$$= \underset{x\to0}{\text{எல்லை}} \frac{\text{வவி}\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ வவி}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \underset{x\to0}{\text{எல்லை}} \frac{\text{வவி}\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\, \underset{x\to0}{\text{எல்லை}}\, \text{வவி}\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \times 0 = 0$$

இங்கு, $x \to 0$ என்பது ${}^{x}/_{2} \to 0$ என்பதற்கு சமானம் என்ற உண்மையை சொல்லாமலே பயன்படுத்தினோம். இதை $y = {}^{x}/_{2}$ என்று வைப்பதன்மூலம் நீங்கள் விளங்கிக்கொள்ள லாம்.

**சான்று 4** மதிப்பறிக:

$$(\text{அ})\ \underset{x\to0}{\text{எல்லை}} \frac{\text{வவி}\, 4x}{\text{வவி}\, 2x}$$

$$(\text{ஆ})\ \underset{x\to0}{\text{எல்லை}} \frac{\text{தொவி}\, x}{x}$$

தீர்வு (அ)

$$\underset{x\to0}{\text{எல்லை}} \frac{\text{வவி}\, 4x}{\text{வவி}\, 2x} = \underset{x\to0}{\text{எல்லை}} \left[\frac{\text{வவி}\, 4x}{4x} \cdot 2 \frac{2x}{\text{வவி}\, 2x}\right]$$

$$= 2\, \underset{x\to0}{\text{எல்லை}} \left[\frac{\text{வவி}\, 4x}{4x} \div \frac{\text{வவி}\, 2x}{2x}\right]$$

$$= 2\, \underset{4x\to0}{\text{எல்லை}} \left[\frac{\text{வவி}\, 4x}{4x}\right] \div \underset{2x\to0}{\text{எல்லை}} \left[\frac{\text{வவி}\, 2x}{2x}\right]$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

(ஆ)

$$\underset{x\to0}{\text{எல்லை}} \frac{\text{தொவி}\, x}{x} = \underset{x\to0}{\text{எல்லை}} \frac{\text{வவி}\, x}{x\ \text{உவவி}\, x}$$

$$= \underset{x\to0}{\text{எல்லை}} \frac{\text{வவி}\, x}{x} \cdot \underset{x\to0}{\text{எல்லை}} \frac{1}{\text{உவவி}\, x} = 1 \cdot 1 = 1$$

எல்லைகளை மதிப்பறியும்போது கீழ்க்காணும் ஒரு பொதுவிதியை மனத்தில் கொள்க. நாம் $\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}(f(x)/g(x))$ என்ற எல்லையை மதிப்பறிய விரும்புகிறோம் என்க. முதலில் $f(a)$, $g(a)$ ஆகிய மதிப்புகள் சுழியமாகின்றனவா என்று பார்க்கிறோம். இரண்டும் சுழியமானால், சுழியமாக்கும் காரணியை பிரித்தெடுக்க, $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ என்று, $f_1(a) = 0$ என்றும் $f_2(a) \neq 0$ என்றும் இருக்குமாறு, பிரிக்க முயல்கிறோம். இதைப்போல், $g(x)$ஐயும் $g(x) = g_1(x)g_2(x)$, $g_1(a) = 0$, $g_2(a) \neq 0$ என்று பிரிக்கிறோம். இதில் வெற்றிகண்டால், பொதுக்காரணிகளை நீக்கிவிட்டு

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}, \qquad q(x) \neq 0$$

என்ற வடிவில் எழுதிக்கொள்ளலாம். பிறகு எல்லையை

$$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}} \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x\to a}{\text{எல்லை}} \frac{p(x)}{q(x)}$$

என்று கண்டுகொள்ளலாம்.

## பயிற்சி 13.1

1முதல் 22வரையான பயிற்சிகளுக்கு எல்லைகளை மதிப்பறிக.

1. $\underset{x\to 3}{\text{எல்லை}}\, x+3$  2. $\underset{x\to \pi}{\text{எல்லை}} \left(x-\frac{22}{7}\right)$  3. $\underset{r\to 1}{\text{எல்லை}}\, \pi r^2$

4. $\underset{x\to 4}{\text{எல்லை}} \frac{4x+3}{x-2}$  5. $\underset{x\to -1}{\text{எல்லை}} \frac{x^{10}+x^5+1}{x-1}$  6. $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{(x+1)^5-1}{x}$

7. $\underset{x\to 2}{\text{எல்லை}} \frac{3x^2-x-10}{x^2-4}$  8. $\underset{x\to 3}{\text{எல்லை}} \frac{x^4-81}{2x^2-5x-3}$  9. $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{ax+b}{cx+1}$

10. $\underset{z\to 1}{\text{எல்லை}} \frac{z^{\frac{1}{3}}-1}{z^{\frac{1}{6}}-1}$  11. $\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}} \frac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}, a+b+c\neq 0$

12. $\underset{x\to -2}{\text{எல்லை}} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x+2}$  13. $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\text{வவி}\, ax}{bx}$  14. $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\text{வவி}\, ax}{\text{வவி}\, bx},\quad a,b\neq 0$

15. $\underset{x\to \pi}{\text{எல்லை}} \frac{\text{வவி}(\pi-x)}{\pi(\pi-x)}$  16. $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\text{உவவி}\, x}{\pi-x}$  17. $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\text{உவவி}\, 2x-1}{\text{உவவி}\, x-1}$

18. $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{ax+x\, \text{உவவி}\, x}{b\, \text{வவி}\, x}$  19. $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}\, x\, \text{வெவி}\, x$

20. $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\text{வவி}\, ax+bx}{ax+\text{வவி}\, bx}, a,b,a+b\neq 0$  21. $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}}(\text{உவெவி}\, x-\text{உதொவி}\, x)$

22. $\underset{x\to \frac{\pi}{2}}{\text{எல்லை}} \frac{\text{தொவி}\, 2x}{x-\frac{\pi}{2}}$

23. $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} f(x)$ , $\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}} f(x)$ ஆகியவற்றை காண்க; இங்கு, $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\leq 0\\ 3(x+1), & x>0\end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\leq 1\\ -x^2-1, & x>1\end{cases}$; காண்க $\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}} f(x)$

25. $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} f(x)$ ஐ மதிப்பறிக; இங்கு, $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

26. $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} f(x)$ ஐ காண்க; இங்கு, $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

27. $\underset{x\to 5}{\text{எல்லை}} f(x)$ ஐ காண்க; இங்கு, $f(x)=|x|-5$

28. $f(x)=\begin{cases}a+bx, & x<1\\ 4, & x=1\\ b-ax, & x>1\end{cases}$ என்க.

$\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}} f(x)=f(1)$ எனில் $a,b$ ஆகியவற்றின் சாத்தியமான மதிப்புகள் யாவை?

29. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ஆகியவை குறிப்பிட்ட மெய்யெண்கள் என்க;

$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ என்று வரையறுப்போம்.

$\underset{x\to a_1}{\text{எல்லை}} f(x)$ என்ன?

$a\neq a_1, a_2, \ldots, a_n$ என்ற ஏதோவொரு $a$யின் மதிப்புக்கு, $\underset{x\to a}{\text{எல்லை}} f(x)$ ஐ கணக்கிடுக.

30. $f(x)=\begin{cases}|x|+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ |x|-1, & x>0\end{cases}$ எனில்

$a$யின் எந்தெந்த மதிப்புகளுக்கு $\underset{x\to a}{\text{எல்லை}} f(x)$ இருக்கின்றது?

31. $f(x)$என்ற சார்பன் $\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}} \dfrac{f(x)-2}{x^2-1} = \pi$ என்பதை நிறைவேற்றினால்,

$\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}} f(x)$ ஐ மதிப்பறிக.

32. $f(x) = \begin{cases} mx^2+n, & x<0 \\ nx+m, & 0\le x\le 1 \\ nx^3+m, & x>1 \end{cases}$ எனில்

$m, n$ ஆகியவற்றின் எந்தெந்த முழுவெண் மதிப்புகளுக்கு $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} f(x)$ , $\underset{x\to 1}{\text{எல்லை}} f(x)$ ஆகிய இரண்டும் இருக்கின்றன?

## 13.5 வகைக்கெழுக்கள்

வெவ்வேறு நேர இடைவெளிகளில் ஒரு பொருளின் இடநிலையை நாம் அறிந்தால் பொருளின் இடநிலை எந்த வேகத்தில் மாறுகிறது என்பதை நாம் காணலாம் என்று 13.2ஆம் பகுதியில் பார்த்தோம். பொதுவாக வெவ்வேறு நேரங்களில் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுருவை அறிவதும் அது மாறும் வேகத்தை காண்பதும் பொதுவாக பலவிடங்களில் பயனாகிறது. நம் அன்றாட வாழ்வில் பல சூழமைவுகளில் இந்த வழிமுறையை செயலாற்ற வேண்டியதிருக்கிறது. சான்றாக, நீர்த்தேக்கத்தை பேணுவோருக்கு வெவ்வேறு நேரங்களில் அளந்த நீரின் ஆழங்களிலிருந்து தேக்கம் எப்போது நிரம்பி வழியும் என்பதை காணவேண்டும். ஏவூர்தியறிவிய லர்கள் வெவ்வேறு நேரங்களில் ஏவூர்தியின் உயரங்களை அறிவதன்மூலம் ஏவூர்தியிலிருந்து துணைக்கோளை துல்லியமாக என்ன திசைவேகத்தில் எறியவேண்டும் என்று அறிய விரும்புகிறார்கள். நிதிநிறுவனங்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட பங்கின் இப்போதைய மதிப்பிலிருந்து அதன் மதிப்பில் ஏற்படும் மாற்றங்களை முன்னறியவேண்டும். இவற்றிலும் மற்றப்பல சூழமைவுகளிலும் ஒரு அளவுரு மற்றொரு அளவுருவைப்பொறுத்து எவ்வாறு மாறுகிறது என்பதை அறிவது விரும்பத்தக்கது. இங்கெல்லாம் ஒரு சார்பனின் களத்திலுள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் சார்பனின் வகைக்கெழு மையப்பங்கை வகிக்கிறது.

**வரையறை 1** $f$ மெய்யெண்மதிப்புடைய சார்பன் எனவும் $a$ அதன் களத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி எனவும் கொள்க.

$$\underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

என்ற எல்லை இருக்கிறது என்ற வரம்புரையுடன், இது $a$யில் $f$இன் வகைக்கெழு என்று வரையறுக்கிறோம். $a$யில் $f$இன் வகைக்கெழுவை $f'(x)$ என்று குறிக்கிறோம். ($f'$ஐ $f$வெட்டு என்று வாசிக்கிறோம்.)

$a$யில் $x$ஐப்பொறுத்து $f(x)$ மாறுவதை $f'(x)$ குறிக்கிறது என்பது நோக்கவேண்டியது.

**சான்று 5** $f(x) = 3x$ என்ற சார்பனின் வகைக்கெழுவை $x = 2$இல் காண்க.

**தீர்வு** வரையறையிலிருந்து

$$f'(2) = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{3(2+h)-3(2)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{6+3h-6}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{3h}{h} = 3$$

என்று பெறுகிறோம். ஆகவே, $x = 2$இல் $3x$இன் வகைக்கெழு 3.

**சான்று 6** $x = -1$இல் $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ என்ற சார்பனின் வகைக்கெழுவை காண்க. மேலும் $f'(0) + 3f'(-1) = 0$ என்று நிறுவுக.

**தீர்வு** முதலில் $f(x)$ இன் வகைக்கெழுக்களை $x = -1$இலும் $x = 0$இலும் காண்போம்.

$$f'(-1) = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{2(-1+h)^2 - 3 + 3h - 5 - 2 + 3 + 5}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{2h^2-h}{h} = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}(2h-1)$$

$$= 2(0) - 1 = -1$$

$$f'(0) = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{[2h^2+3h-5]-[-5]}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{2h^2+3h}{h} = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}(2h+3)$$

$$= 2(0) + 3 = 3$$

$$f'(0) + 3f'(-1) = 0$$

**குறிப்பு** இந்நேரத்தில் ஒரு புள்ளியில் வகைக்கெழுவை மதிப்பறிய எல்லைகள் பின்பற்றும் பல விதிகளை நாம் பயன்படுத்துகிறோம் என்பதை நோக்குக. இதை கீழ்க்காணும் சான்று எடுத்துக்காட்டுகிறது.

**சான்று 7** வவி $x$ இன் வகைக்கெழுவை $x = 0$இல் காண்க.

**தீர்வு** $f(x) =$ வவி $x$ என்க.

$$f'(0) = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{\text{வவி}(0+h)-\text{வவி}(0)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{\text{வவி}\, h}{h} = 1$$

**சான்று 8** $f(x) = 3$இன் வகைக்கெழுவை $x = 0$இலும் $x = 3$இலும் காண்க.

**தீர்வு** வகைக்கெழு சார்பனின் மாற்றங்களை அளப்பதால், ஒரு மாறிலிச்சார்பனின் வகைக் கெழு எல்லாப்புள்ளிகளிலும் சுழியமாகவேண்டும் என்பது உள்ளுணர்வாக தெளிவாகிறது. இதை கீழ்க்காணும் கணக்கீடும் காட்டுகின்றது.

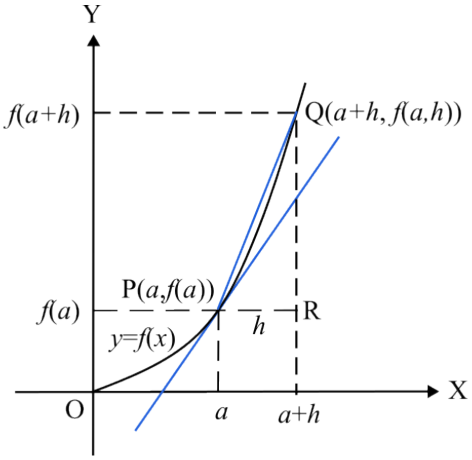
$$f'(0) = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{3-3}{h} = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{0}{h} = 0$$

$$f'(3) = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{3-3}{h} = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{0}{h} = 0$$

ஒரு புள்ளியில் ஒரு சார்பனின் வகைக்கெழுவுக்கு ஒரு வடிவியற்பொருளுணர்வை வழங்குகிறோம். $y = f(x)$ என்ற சார்பனை கருதி, $P = \big(a, f(a)\big)$, $Q = (a+h, f(a+h))$ ஆகிய இரண்டு புள்ளிகள் சார்பனின் வரைபடத்தில் அருகருகே இருப்பதாக கொள்வோம். படம் 13.11ஐ காண்க.



படம் 13.11

$$f(a) = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

என்பதை நாம் அறிவோம்.

$PQR$ என்ற முக்கோணத்திலிருந்து நாம் விரும்பும் எல்லையில் இடம்பெறும் விகிதம் சரியாக தொவி$(\angle QPR)$ என்பது தெளிவாகிறது. இது $PQ$ என்ற நாணின் சாய்மை. எல்லையை எடுக்கும்போது $h$ சுழியத்தை அணுக, $P$ என்ற புள்ளி $Q$வை அணுகுகிறது. இதனால்

$$\underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \underset{Q\to P}{\text{எல்லை}}\frac{QR}{PR}$$

இது $PQ$ என்ற நாண் $P$யிலுள்ள $y = f(x)$ என்ற வளைவரையின் தொடுகோட்டை அணுகுகிறது என்பதற்கு சமானம். இவ்வாறு எல்லை தொடுகோட்டின் சாய்மைக்கு சமம் என்றாகிறது. ஆகவே

$$f'(a) = \text{தொவி}\,\Psi$$

ஒரு குறிப்பிட்ட $f$ என்ற சார்பனுக்கு ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் அதன் வகைக்கெழுவை காணலாம். ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வகைக்கெழு இருந்தால், அது ஒரு புதிய சார்பனை வரையறுக்கிறது; இதை நாம் $f$இன் வகைக்கெழு என்கிறோம். கணிதமுறையில் ஒரு சார்பனின் வகைக்கெழுவை கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கிறோம்.

**வரையறை 2** $f$ ஒரு மெய்மதிப்புச்சார்பன் என்க. கீழ்வரும் எல்லை இருக்கும்போது,

$$\underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

என்ற சார்பன் $x$இல் $f$இன் வகைக்கெழு என்று வரையறுக்கிறோம்; அதை $f'(x)$ என்று குறிக்கிறோம். வகைக்கெழுவின் இந்த வரையறை வகைக்கெழுவின் அடிப்படைக் கொள்கை என்றும் வழங்குகிறது.

இவ்வாறு, $f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

மேற்கண்ட எல்லை இருக்குமிடமெல்லாம் $f'(x)$இன் களம் என்பது தெளிவு. ஒரு சார்பனின் வகைக்கெழுவுக்கு பல குறியீடுகள் உள்ளன. சிலநேரங்களில் $f'(x)$ஐ $\dfrac{d}{dx}(f(x))$ என்று குறிப்பதுண்டு; $y = f(x)$ எனில் $\dfrac{dy}{dx}$ என்றும் குறிப்பதுண்டு; இதை $x$ஐப்பொறுத்து $f(x)$இன் வகைக்கெழு என்றோ $y$இன் வகைக்கெழு என்றோ சொல்கிறோம். இதை $D(f(x))$ என்றும் குறிப்பதுண்டு. மேலும், $x = a$இல் $f(x)$இன் வகைக்கெழுவை $\dfrac{d}{dx}f(x)\Big|_a$ என்றோ $\dfrac{df}{dx}\Big|_a$ என்றோ $\left(\dfrac{df}{dx}\right)_{x=a}$ என்றோ குறிப்பதுமுண்டு.

**சான்று 9** $f(x) = 10x$இன் வகைக்கெழுவை காண்க.

**தீர்வு**

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{10(x+h)-10x}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{10h}{h} = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\,10$$

$$= 10$$

**சான்று 10** $f(x) = x^2$இன் வகைக்கெழுவை காண்க.

**தீர்வு**

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{(x+h)^2-(x)^2}{h}$$
$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}(h+2x)$$
$$= 2x$$

**சான்று 11** $f(x) = a$ என்ற மாறிலிச்சார்பனின் வகைக்கெழுவை காண்க; இங்கு, $a$ ஒரு மெய்யெண் மாறிலி.

தீர்வு [

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{a-a}{h}$$
$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{0}{h}$$
$$= 0,\quad h \neq 0 \text{ என்பதால்}$$

**சான்று 12** $f(x) = {}^{1}\!/_{x}$ இன் வகைக்கெழுவை காண்க.

தீர்வு

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{\frac{1}{(x+h)}-\frac{1}{x}}{h}$$
$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{1}{h}\left[\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right]$$
$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{1}{h}\left[\frac{-h}{x(x+h)}\right]$$
$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\left[\frac{-1}{x(x+h)}\right]$$
$$= -\frac{1}{x^2}$$

### 13.5.1 சார்பன்களின் வகைக்கெழுக்களின் குறிக்கணிதம்

வகைக்கெழுவின் வரையறையில் எல்லை நேரடியாக இடம்பெறுவதால், வகைக்கெழுக்களுக்கான விதிகள் எல்லைகளின் விதிகளையொட்டி இருப்பதை நாம் எதிர்பார்க்கலாம். அவற்றை கீழ்க்காணும் தேற்றத்தில் சேகரித்து எழுதுவோம்.

**தேற்றம் 5** $f$ , $g$ ஆகியவை ஒரு பொதுக் களத்தில் வகைக்கெழுக்கள் வரையறையான சார்பன்கள் என்க. அப்படியெனில்,

(அ) இரண்டு சார்பன்களின் கூட்டுத்தொகையின் வகைக்கெழு சார்பன்களின் வகைக்கெழுக்களின் கூட்டுத்தொகை. அதாவது

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

(ஆ) இரண்டு சார்பன்களின் வேறுபாட்டின் வகைக்கெழு சார்பன்களின் வகைக்கெழுக்களின் வேறுபாடு;

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$$

(இ) இரண்டு சார்பன்களின் பெருக்குத்தொகையின் வகைக்கெழுவை கீழ்க்காணும் **பெருக்கல் விதி** தருகிறது;

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

(ஈ) இரண்டு சார்பன்களின் வகுத்தலீவின் வகைக்கெழுவை கீழ்க்காணும் ஈவுவிதி தருகிறது.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x).g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

இவற்றின் நிறுவல்கள் நிகரான எல்லைத் தேற்றங்களிலிருந்து கிடைக்கின்றன. இவற்றை நாம் இங்கு நிறுவவில்லை. எல்லைகளில் போலவே, இந்தத்தேற்றம் தனித்துவ வகையான சார்பன்களின் வகைக்கெழுக்களை மதிப்பறிய உதவுகிறது. தேற்றத்தின் கடைசி இரண்டு கூற்றுகளையும் கீழ்க்காணுமாறு மீளுரைப்பது அவற்றை எளிதில் நினைவில்கொள்ள வசதியாகும்.

$u = f(x)$ , $v = g(x)$ என்க. அப்படியெனில், பெருக்கல்விதியை

$$(uv)' = u'v+uv'$$

என்று எழுதலாம். இது இலைபினிட்டின் விதி என்றும் வழங்குகிறது. இதைப்போல், ஈவுவிதியை

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

என்று எழுதலாம்.

இனி, சில வழக்கமான சார்பன்களின் வகைக்கெழுக்களை காண்போம்.

$f(x) = x$ என்ற சார்பின் வகைக்கெழு 1 என்ற மாறிலிச்சார்பன் என்பது தெளிவு. எவ்வாறெனின்,

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{x+h-x}{h} = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\,1 = 1$$

இதையும் மேற்கண்ட தேற்றத்தையும் பயன்படுத்தி $f(x) = 10x = x+x+\cdots+x$ (10 முறை) என்ற சார்பனின் வகைக்கெழுவை கணக்கிடுவோம். மேற்கண்ட தேற்றத்தின் (அ) பகுதியிலிருந்து

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(x+x+\cdots+x)(10\text{ முறை})$$
$$= \frac{d}{dx}x+\frac{d}{dx}x+\cdots+\frac{d}{dx}x\ (10\text{ முறை})$$
$$= 1+1+\cdots+1\ (10\text{ முறை}) = 10.$$

இந்த எல்லையை நாம் பெருக்கல்விதியை பயன்படுத்தியும் மதிப்பறியலாம். $f(x) = 10x = uv$ என்று எழுதுவோம்; இங்கு, $u$ எல்லாவிடங்களிலும் 10மதிப்புடைய

மாறிலிச்சார்பன், $v(x) = x$. இப்போது, $f(x) = 10x = uv$ என்பதில் $u$வின் வகைக்கெழு சுழியம் என்பதை அறிவோம்; $v(x) = x$இன் வகைக்கெழு 1 என்பதையும் அறிவோம். பெருக்கல்விதியால்

$$f'(x) = (10x)' = (uv)' = u'v + uv'$$
$$= 0 \cdot x + 10 \cdot 1 = 10$$

இதே வழியில் $f(x) = x^2$ இன் வகைக்கெழுவை மதிப்பறியலாம். $f(x) = x^2 = x \cdot x$ என்பதால்,

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x \cdot x) = \frac{d}{dx}(x) \cdot x + x \cdot \frac{d}{dx}(x)$$
$$= 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2$$

பொதுவாக, கீழ்க்காணும் தேற்றத்தை நிறுவலாம்.

**தேற்றம் 6** $f(x) = x^n$இன் வகைக்கெழு $nx^{n-1}$

நிறுவல் வகைக்கெழுச்சார்பனின் வரையறையின்படி,

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

ஈருறுப்புத்தேற்றம் $(x+h)^n = {}^nC_0\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1}h + \cdots + {}^nC_n\, h^n$ என்று உரைப்பதால்,

$$(x+h)^n - x^n = h(nx^{n-1} + \cdots + h^{n-1}).$$

ஆகவே,

$$\frac{df(x)}{dx} = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$
$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{h(nx^{n-1} + \cdots + h^{n-1})}{h}$$
$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} (nx^{n-1} + \cdots + h^{n-1}) = nx^{n-1}$$

மறுவழியாக, பெருக்கல்விதியை பயன்படுத்தி $n$இல் தூண்டலாலும் இதை நிறுவலாம். விளைவு $n = 1$க்கு சரியாகிறது; மேலே நிறுவியிருக்கிறோம். அடுத்து,

$$\frac{d}{dx}(x^n) = \frac{d}{dx}(xx^{n-1})$$
$$= \frac{d}{dx}(x) \cdot (x^{n-1}) + x \cdot \frac{d}{dx}(x^{n-1})$$

(பெருக்கல்விதி)

$$= x^{n-1} + x(n-1)x^{n-2}$$

(தூண்டலெடுகோளின்படி)

$$= x^{n-1} + (n-1)x^{n-1} = nx^{n-1}$$

**குறிப்பு** மேற்கண்ட தேற்றம் $x$இன் எல்லா அடுக்குகளுக்கும் சரியானது; அதாவது, $n$ எந்தவொரு மெய்யெண்ணாகவும் இருக்கலாம் (ஆனால் இதை இங்கு நிறுவவில்லை).

### 13.5.2 பல்லுறுப்புகள், முக்கோணவியச்சார்பன்கள் ஆகியவற்றின் வகைக்கெழுக்கள்

பல்லுறுப்புச்சார்பனின் வகைக்கெழுவைப் பற்றிய கீழ்க்காணும் தேற்றத்துடன் தொடங்குவோம்.

**தேற்றம் 7** $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ஒரு பல்லுறுப்புச்சார்பன் என்க; இங்கு, $a_i$கள் மெய்யெண்கள், $a_n \neq 0$. அப்படியெனில், சார்பனின் வகைக்கெழு

$$\frac{df(x)}{dx} = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots$$
$$+ 2a_2 x + a_1$$

இதன் நிறுவல் 5ஆம் தேற்றத்தின் (அ)பகுதியையும் 6ஆம் தேற்றத்தையும் சேர்ப்பதே.

**சான்று 13** $6x^{100} - x^{55} + x$இன் வகைக்கெழுவை கணக்கிடுக.

தீர்வு மேற்கண்ட தேற்றத்தை நேரடியாக பயனாக்கி, சார்பனின் வகைக்கெழு $600x^{99} - 55x^{54} + 1$ என்று காண்கிறோம்.

**சான்று 14** $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots + x^{50}$இன் வகைக்கெழுவை $x = 1$இல் காண்க.

தீர்வு மேற்கண்ட தேற்றத்தை நேரடியாக பயனாக்கி, சார்பனின் வகைக்கெழு

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + 50x^{49}$$

என்று காண்கிறோம். $x = 1$இன் இதன் மதிப்பு

$$1 + 2(1) + 3(1)^2 + \cdots + 50(1)^{49}$$
$$= 1 + 2 + 3 + \cdots + 50$$
$$= \frac{(50)(51)}{2} = 1275$$

**சான்று 15**

$$f(x) = \frac{x+1}{x}$$

இன் வகைக்கெழுவை காண்க.

தீர்வு இந்த சார்பன் $x = 0$த்தைத்தவிர மற்றெல்லாவிடங்களிலும் வரையறையாவது தெளிவு. ஈவுவிதியை $u = x + 1, v = x$ என்று வைத்து பயன்படுத்துவோம். அப்போது, $u' = 1, v' = 1$. ஆகவே,

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$$
$$= \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1(x) - (x+1)1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

**சான்று 16** வவி $x$ இன் வகைக்கெழுவை கணக்கிடுக.

தீர்வு $f(x) =$ வவி $x$ என்க.

$$\frac{df(x)}{dx} = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\text{வவி}(x+h) - \text{வவி}(x)}{h}$$
$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{2\ \text{உவவி}\left(\frac{x+h}{2}\right)\ \text{வவி}\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$(\text{வவி}\,A - \text{வவி}\,B\ \ \text{வாயப்பாடு})$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\,\text{உவவி}\left(x+\frac{h}{2}\right)\ \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{\text{வவி}\,\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \text{உவவி}\,x\cdot 1 = \text{உவவி}\,x$$

**சான்று 17** தொவி $x$இன் வகையீட்டை கணக்கிடுக.

**தீர்வு** $f(x) =$ தொவி $x$ என்க.

$$\frac{df(x)}{dx} = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{\text{தொவி}(x+h) - \text{தொவி}\,x}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{1}{h}\left(\frac{\text{வவி}(x+h)}{\text{உவவி}(x+h)} - \frac{\text{வவி}\,x}{\text{உவவி}\,x}\right)$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\left(\frac{\text{வவி}(x+h-x)}{h\ \text{உவவி}(x+h)\,\text{உவவி}\,x}\right)$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\left(\frac{\text{வவி}\,h}{h}\right)$$

$$\times \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\left(\frac{1}{\text{உவவி}(x+h)\,\text{உவவி}\,x}\right)$$

$$= 1.\frac{1}{\text{உவவி}^2\,x} = \text{வெவி}^2\,x$$

**சான்று 18** $f(x) = \text{வவி}^2\,x$ இன் வகையீட்டை கணக்கிடுக.

**தீர்வு** இதை மதிப்பறிய இலைபினிட்டின் பெருக்கல்விதியை பயன்படுத்துகிறோம்.

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\text{வவி}\,x\,\text{வவி}\,x)$$

$$= (\text{வவி}\,x)'(\text{வவி}\,x) + \text{வவி}\,x\ \ (\text{வவி}\,x)'$$

$$= (\text{உவவி}\,x)\,\text{வவி}\,x + \text{வவி}\,x\ \ (\text{உவவி}\,x)$$

$$= 2\,\text{வவி}\,x\,\text{உவவி}\,x = \text{வவி}\,2x$$

## பயிற்சி 13.2

1. $x^2 - 2$இன் வகைக்கெழுவை $x = 10$இல் காண்க.
2. $x$இன் வகைக்கெழுவை $x = 1$இல் காண்க.
3. $99x$இன் வகைக்கெழுவை $x = 100$இல் காண்க.
4. கீழ்க்காணும் சார்பன்களின் வகைக்கெழுக்களை அடிப்படைக்கொள்கைகளிலிருந்து காண்க.
   - a. $x^3 - 27$
   - b. $(x-1)(x-2)$
   - c. $\frac{1}{x^2}$
   - d. $\frac{x+1}{x-1}$
5. $$f(x) = \frac{x^{100}}{100} + \frac{x^{99}}{99} + + \cdots + \frac{x^2}{2} + x + 1$$
   என்ற சார்பனுக்கு $f'(1) = 100f'(0)$ என்று காட்டுக.
6. $x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \cdots + a^{n-1}x + a^n$ இன் வகைக்கெழுவை காண்க; இங்கு $a$ ஒரு மெய்யெண் மாறிலி.
7. $a, b$ மாறிலிகள் என்றபோது, கீழ்க்காணும் வகைக்கெழுக்களை காண்க.
   - a. $(x-a)(x-b)$
   - b. $(ax^2+b)^2$
   - c. $\frac{x-a}{x-b}$
8. $$\frac{x^n - a^n}{x-a}\text{இன்}$$
   வகைக்கெழுவை காண்க; இங்கு $a$ ஏதோவொரு மாறிலி.
9. கீழ்க்கண்டவற்றின் வகைக்கெழுக்களை காண்க
   - a. $2x - {}^{3}/_{4}$
   - b. $(5x^3 + 3x - 1)(x-1)$
   - c. $x^{-3}(5+3x)$
   - d. $x^5(3 - 6x^{-9})$
   - e. $x^{-4}(3 - 4x^{-5})$
   - f. $\frac{2}{x+1} - \frac{x^2}{3x-1}$
10. உவவி $x$இன் வகைக்கெழுவை அடிப்படைக்கொள்கைகளிலிருந்து காண்க.
11. கீழ்க்காணும் சார்பன்களின் வகைக்கெழுக்களை காண்க.
   - a. வவி $x$ உவவி $x$
   - b. வெவி $x$
   - c. 5 வெவி $x$ + 4 உவவி $x$
   - d. உவெவி $x$
   - e. 3 உதொவி $x$ + 5 உவெவி $x$
   - f. 5 வவி $x$ − 6 உவவி $x$ + 7
   - g. 2 தொவி $x$ − 7 வெவி $x$

# பலவகைச்சான்றுகள்

**சான்று 19** கீழ்க்காணும் சார்பன்களின் வகைக்கெழுக்களை அடிப்படைக்கொள்கைகளிலிருந்து காண்க.

(அ) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$ (ஆ) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

**தீர்வு** (அ) சார்பன் $x = 2$இல் வரையறுக்கப்படாததை நோக்குக.

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\dfrac{2(x+h)+3}{x+h-2} - \dfrac{2x+3}{x-2}}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{(2x+2h+3)(x-2) - (2x+3)(x+h-2)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{(2x+3)(x-2) + 2h(x-2) - (2x+3)(x-2) - h(2x+3)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{-7}{(x-2)(x+h-2)} = -\frac{7}{(x-2)^2}$$

வகைக்கெழு $x = 2$இல் வரையறுக்கப்படாததையும் நோக்குக.

(ஆ) சார்பன் $x = 0$இல் வரையறுக்கப்படவில்லை.

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\left(x + h + \dfrac{1}{x+h}\right) - \left(x + \dfrac{1}{x}\right)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{1}{h}\left[h + \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right] = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{1}{h}\left[h + \frac{x - x + h}{x(x+h)}\right]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{1}{h}\left[h\left(1 - \frac{1}{x(x+h)}\right)\right] = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \left[1 - \frac{1}{x(x+h)}\right] = 1 - \frac{1}{x^2}$$

வகைக்கெழுவும் $x = 0$இல் வரையறுக்கப்படவில்லை.

**சான்று 20** கீழ்க்காணும் சார்பன்களின் வகைக்கெழுக்களை அடிப்படைக்கொள்கைகளிலிருந்து காண்க.

(அ) $f(x) = \text{வவி}\, x + \text{உவவி}\, x$ (ஆ) $x\, \text{வவி}\, x$

**தீர்வு** (அ)

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\text{வவி}(x+h) + \text{உவவி}(x+h) - \text{வவி}\, x - \text{உவவி}\, x}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\text{வவி}\, x\, \text{உவவி}\, h + \text{உவவி}\, x\, \text{வவி}\, h + \text{உவவி}\, x\, \text{உவவி}\, h - \text{வவி}\, x\, \text{வவி}\, h - \text{வவி}\, x - \text{உவவி}\, x}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\text{வவி}\, h\, (\text{உவவி}\, x - \text{வவி}\, x) + \text{வவி}\, x\, (\text{உவவி}\, h - 1) + \text{உவவி}\, x\, (\text{உவவி}\, h - 1)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\text{வவி}\, h}{h}(\text{உவவி}\, x - \text{வவி}\, x) + \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\, \text{வவி}\, x \frac{(\text{உவவி}\, h - 1)}{h} + \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\, \text{உவவி}\, x \frac{(\text{உவவி}\, h - 1)}{h}$$

$$= \text{உவவி}\, x - \text{வவி}\, x$$

(ஆ)

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{(x+h)\, \text{வவி}(x+h) - x\, \text{வவி}\, x}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{(x+h)\, \text{வவி}\, x\, \text{உவவி}\, h + (x+h)\, \text{உவவி}\, x\, \text{வவி}\, h - x\, \text{வவி}\, x}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{x \text{ வவி } x\,(\text{உவவி } h - 1) + x \text{ உவவி } x \text{ வவி } h + h(\text{வவி } x \text{ உவவி } h + \text{உவவி } x \text{ வவி } h)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{x \text{ வவி } x\,(\text{உவவி } h - 1)}{h} + \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\, x \text{ உவவி } x \frac{\text{வவி } h}{h}$$

$$+ \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} (\text{வவி } x \text{ உவவி } h + \text{வவி } h \text{ உவவி } x)$$

$$= x \text{ உவவி } x + \text{வவி } x$$

**சான்று 21** வகைக்கெழுக்களை கணக்கிடுக.

(அ) $f(x) = \text{வவி } 2x$ (ஆ) $g(x) = \text{உதொவி } x$

**தீர்வு** (அ) வவி $2x = 2$ வவி $x$ உவவி $x$ என்ற முக்கோணவிய வாய்ப்பாட்டை நினைவுகொள்க.

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(2 \text{ வவி } x \text{ உவவி } x) = 2\frac{d}{dx}(\text{வவி } x \text{ உவவி } x) = 2[(\text{வவி } x)' \text{ உவவி } x + \text{வவி } x\,(\text{உவவி } x)']$$

$$= 2[(\text{உவவி } x) \text{ உவவி } x + \text{வவி } x\,(-\text{ வவி } x)] = 2\left(\text{உவவி}^2\, x - \text{வவி}^2\, x\right)$$

(ஆ) வரையறையின்படி,

$$g(x) = \text{உதொவி } x = \frac{\text{உவவி } x}{\text{வவி } x}$$

இந்த சார்பன் வரையறுக்கப்பட்ட இடங்களிலெல்லாம் ஈவுவிதியை பயன்படுத்துவோம்.

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(\text{உதொவி } x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{உவவி } x}{\text{வவி } x}\right) = \frac{(\text{உவவி } x)'(\text{வவி } x) - (\text{உவவி } x)(\text{வவி } x)'}{(\text{வவி } x)^2}$$

$$= \frac{(-\text{ வவி } x)(\text{வவி } x) - (\text{உவவி } x)(\text{உவவி } x)}{(\text{வவி } x)^2} = -\frac{\text{வவி}^2\, x + \text{உவவி}^2\, x}{\text{வவி}^2\, x} = -\text{ உவெவி}^2\, x$$

மறுவழியாக,

$$\text{உதொவி } x = \frac{1}{\text{தொவி } x}$$

என்பதிலிருந்து கணக்கிடலாம். இங்கு தொவி $x$இன் வகைக்கெழு வெவி$^2\, x$ என்று நாம் 17ஆம் சான்றில் கண்டதை பயன்படுத்துகிறோம்; மாறிலிச்சார்பனின் வகைக்கெழு $0$ என்பதையும் நினைவுகொள்க.

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(\text{உதொவி } x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\text{தொவி } x}\right) = \frac{(1)'(\text{தொவி } x) - (1)(\text{தொவி } x)'}{(\text{தொவி } x)^2}$$

$$= \frac{(0)(\text{தொவி } x) - (\text{வெவி } x)^2}{(\text{தொவி } x)^2} = \frac{-\text{ வெவி}^2\, x}{\text{தொவி}^2\, x} = -\text{உவெவி}^2\, x$$

**சான்று 22** வகைக்கெழுக்களை காண்க.

(அ) $\dfrac{x^5 - \text{உவவி } x}{\text{வவி } x}$ (ஆ) $\dfrac{x + \text{உவவி } x}{\text{தொவி } x}$

**தீர்வு** (அ)

$$h(x) = \frac{x^5 - \text{உவவி } x}{\text{வவி } x}$$

என்க. சார்பன் வரையறையுற்ற இடங்களில் ஈவுவிதியை பயன்படுத்துவோம்.

$$h'(x) = \frac{(x^5 - \text{உவவி } x)' \text{ வவி } x - (x^5 - \text{உவவி } x)(\text{வவி } x)'}{(\text{வவி } x)^2}$$

$$= \frac{(5x^4 + \text{வவி } x) \text{ வவி } x - (x^5 - \text{உவவி } x) \text{ உவவி } x}{\text{வவி}^2\, x}$$

$$= \frac{-x^5 \text{ உவவி } x + 5x^4 \text{ வவி } x + 1}{\text{வவி}^2\, x}$$

(ஆ) சார்பன் வரையறையுற்ற இடங்களில் ஈவுவிதியை பயன்படுத்துவோம்.

$$h'(x) = \frac{(x + \text{உவவி } x)' \text{ தொவி } x - (x + \text{உவவி } x)(\text{தொவி } x)'}{(\text{தொவி } x)^2}$$

$$= \frac{(1 - \text{வவி } x) \text{ தொவி } x - (x + \text{உவவி } x) \text{ வெவி}^2\, x}{\text{தொவி}^2\, x}$$

## பலவகைப்பயிற்சிகள்

1. கீழ்க்காணும் சார்பன்களின் வகைக்கெழுக்களை அடிப்படைக்கொள்கைகளிலிருந்து காண்க.

(அ) $-x$ (ஆ) $(-x)^{-1}$ (இ) $\text{வவி}(x+1)$ (ஈ) $\text{உவவி}\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$

கீழ்க்காணும் சார்பன்களின் வகைக்கெழுக்களை காண்க; இங்கு, $a, b, c, d, p, q, r, s$ ஆகியவை சுழியமற்ற மாறிலிகள்; $m, n$ ஆகியவை முழுவெண்கள்.

2. $(x+a)$

3. $(px+q)\left(\frac{r}{x}+s\right)$

4. $(ax+b)(cx+d)^2$

5. $\frac{ax+b}{cx+d}$

6. $\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

7. $\frac{1}{ax^2+bx+c}$

8. $\frac{ax+b}{px^2+qx+r}$

9. $\frac{px^2+qx+r}{ax+b}$

10. $\frac{a}{x^4}-\frac{b}{x^2}+\text{உவவி}\,x$

11. $4\sqrt{x}-2$

12. $(ax+b)^n$

13. $(ax+b)^n(cx+d)^m$

14. $\text{வவி}(x+a)$

15. $\text{உவெவி}\,x\;\text{உதொவி}\,x$

16. $\frac{\text{உவவி}\,x}{1+\text{வவி}\,x}$

17. $\frac{\text{வவி}\,x+\text{உவவி}\,x}{\text{வவி}\,x-\text{உவவி}\,x}$

18. $\frac{\text{வெவி}\,x-1}{\text{வெவி}\,x+1}$

19. $\text{வவி}^n\,x$

20. $\frac{a+b\,\text{வவி}\,x}{c+d\,\text{உவவி}\,x}$

21. $\frac{\text{வவி}(x+a)}{\text{உவவி}\,x}$

22. $x^4(5\,\text{வவி}\,x-3\,\text{உவவி}\,x)$

23. $(x^2+1)\,\text{உவவி}\,x$

24. $(ax^2+\text{வவி}\,x)(p+q\,\text{உவவி}\,x)$

25. $(x+\text{உவவி}\,x)(x-\text{தொவி}\,x)$

26. $\frac{4x+5\,\text{வவி}\,x}{3x+7\,\text{உவவி}\,x}$

27. $\frac{x^2\,\text{உவவி}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\text{வவி}\,x}$

28. $\frac{x}{1+\text{தொவி}\,x}$

29. $(x+\text{வெவி}\,x)(x-\text{தொவி}\,x)$

30. $\frac{x}{\text{வவி}^n\,x}$

### சுருக்கவுரை

- ஒரு புள்ளியின் இடப்பக்கத்தில் சார்பனின் மதிப்புகளிலிருந்து அந்தப்புள்ளியில் எதிர்பார்க்கக்கூடிய மதிப்பை அந்தப்புள்ளியின் சார்பனின் இடப்பக்க எல்லை என்கிறோம். இதைப்போல் வலப்பக்க எல்லையும்.
- ஒரு புள்ளியில் ஒரு சார்பனின் இடப்பக்க எல்லையும் வலப்பக்க எல்லையும் இருந்து அவை சமமானால் அதை அந்தப்புள்ளியில் அந்தச்சார்பனின் எல்லை என்கிறோம்.
- $f$ ஒரு சார்பனும் $a$ ஒரு மெய்யெண்ணும் எனில் $\lim_{x\to 0} f(x)$ உம் $f(a)$உம் சமமாயிருப்பது தேவையில்லை. உண்மையில் ஒன்று இருக்க, மற்றது இல்லாமற்போகலாம்.
- $f, g$ ஆகிய சார்பன்களுக்கு கீழ்க்கண்டவை உண்மை.

$$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}[f(x)\pm g(x)]=\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\,f(x)\pm\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\,g(x)$$

$$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}[f(x)\cdot g(x)]=\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\,f(x)\cdot\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\,g(x)$$

$$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\,f(x)}{\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\,g(x)}$$

- சில வழக்கமான எல்லைகள் கீழ்வருமாறு

$$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

$$\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\text{வவி}\, x}{x} = 1$$

$$\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{1 - \text{உவவி}\, x}{x} = 0$$

- ஒரு சார்பனின் வகைக்கெழுவை பின்வறுமாறு வரையறுக்கிறோம்.

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- $u, v$ என்ற சார்பன்களுக்கு,

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

ஆகியவை உண்மை, இவையெல்லாம் இருக்கும்போது.

- கீழ்க்கண்டவை சில வழக்கமான வகைக்கெழுக்கள்.

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{வவி}\, x) = \text{உவவி}\, x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{உவவி}\, x) = -\,\text{வவி}\, x$$

## வரலாற்றுக் குறிப்பு

நுண்கணித்ததை நிறுவிய பெருமையுடைய இரண்டு பெயர்கள் கணித வரலாற்றில் முன்னிற்கின்றன. அவை ஐசக்கு நியூட்டன் $(1642 - 1727)$, கா. வி. இலைபினிசு $(1646 - 1717)$. இருவரும் தனித்தனியே பதினேழாம் நூற்றாண்டில் நுண்கணிதத்தை கண்டாக்கினர். இவ்வாறு நுண்கணிதம் தொடங்கியபின் பல கணிதவியலர்கள் அதை மேலும் வளராக்குவதில் பங்களித்துள்ளனர். இறுக்கமான கருத்துருகளை முன்வைத்தவர்கள் ஆ. இலூ. கோசி, இயோ. இலூ. இலகிராஞ்சு, காரல் வயசுட்டிராசு ஆகிய பெரும் கணிதவியலர்கள். இப்போது பாடநூல்களில் ஏற்கப்படும் நுண்கணிதத்தின் அடிப்படையை கோசி வழங்கினார். ஒரு சார்பனின் வகைக்கெழுவை வறையறுக்க எல்லைபற்றிய துலன்பேரின் கருத்துருனை கோசி பயன்படுத்தினார். எல்லையின் வரையறையில் தொடங்கி, கோசி $a = 0$இல் $\frac{\text{வவி}\, a}{a}$இன் எல்லை போன்ற சான்றுகளை வழங்கினார் அவர் $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ என்று எழுதி, $i \to 0$ என்ற எல்லையை வகையீட்டுச்சார்பன் என்று அழைத்தார்.

$1900$க்கு முன்பு நுண்கணிதம் கற்பிப்பதற்கு மிகவும் கடினமானது என்று கருதினர். அதனால் நுண்கணிதம் இளைஞர்களுக்கு எட்டாக்கனியாயிருந்தது. ஆனால் $1900$த்தில் யோவான் பெரியும் மற்றவர்களும் நுண்கணிதத்தின் அடிப்படைக்கருத்துகளும் முறைகளும் பள்ளியில் கற்பிக்குமளவுக்கு எளிமையானவை என்ற கருத்தை இங்கிலாந்தில் பரப்புரைக்கத்தொடங்கினர். கிரிப்பின் முதலாமாண்டு மாணவர்களுக்கு நுண்கணிதத்தை கற்பிப்பதில் முன்னோடியாக விளங்கினார். அந்த காலகட்டத்தில் இதை மிகவும் துணிச்சலான செயலாக கருதினார்கள். இன்று கணிதம் மட்டுமல்லாமல் இயற்பியல், வேதியியல், பொருளியல், உயிரிய அறிவியல்கள் போன்ற பல துறைகளும் நுண்கணிதத்தால் பயனடைகின்றன.