படலம் 14

கணித ஏரணத்துவம்

14.1 அறிமுகம்

சாரசு பூல் (1815-1864)

உலகில் வாழும் பல்லாயிரமாயிரக்கணக் கான உயிரினங்களுள் மனிதவினமே தலை யாய சிறப்புடையது என்பதை நாம் அறி வோம். மற்ற இனங்களி லிருந்து மனிதரை பிரித்துக்காட்டும் சிறப் பியல்பு என்ன? அது மனிதரின் சிந்தனைத்திறனே! மனிதர் **அறியியன்மை**யும் சிந்திக்கும் இயன்மையும் உடையவர்கள்.. அந்த அறியியன்மையால் பெறும் **அறிவி**ன் அடிப்படையில் சிந்திப்பதாலே மனிதர் பண்பட்டிருக்கிறோம்; அறிவியலும் தொழினுட்பமும் வளராகின்றன. ஒரு தனிமனிதரின் சிந்தனைத்திறனை எவ்வாறு மேம்படுத்துவது? காரண ஏரணங்களுடன் சிந்திக்கும் வழிமுறைகளையும் அந்த சிந்தனையிலிருந்து எழுந்த விளைவுகளையும் கருத்துகளையும் மற்றவர்களுடன் பிழையின்றி திட்டவட்டமாக பகிர்ந்துகொள்ளும் சொற்களும் சொற்கட்டமைப்புகளும் அடங்கிய மொழியையும் இந்தப்படலத்தில் காண்போம். இவ்வாறான சிந்தனையும் மொழியும் வாழ்வின் எல்லாப்பகுதிகளிலும் பயன்படுகின்றன எனினும் அவை கணிதத்துக்கு இன்றியமை யாதவை. ஆகவே இவற்றை **கணிதச்சிந்தனை** என்றும் **கணிதமொழி** என்றும் அழைக்கிறோம்.

கணிதமொழியில் இருவிதமான சிந்தனை வழிகள் உள்ளன. ஒன்று **தூண்டல்**; மற்றொன்று **தருவித்தல்**. கணித்ததூண்டலைப்பற்றி நான்காம் படலத்தில் கற்றோம். இந்தப் படலத்தில் தருவித்தலின் சில அடிப்படைகளை உரையாடுவோம். தூண்டல்வழியான அறிவை **தொகுத்தறிவு** என்றும் தருவித்தல்வழியான அறிவை **பகுத்தறிவு** என்றும் சொல்வதுண்டு.

14.2 கூற்றுகள்

கணிதச்சிந்தனையின் அடிப்படை அலகு **கணிதக்கூற்று** எனப்படுகிறது. கீழ்க்காணும் இரண்டு கூற்றுகளை கருதுக.

2003ஆம் ஆண்டில் இந்தியாவின் அதிபர் ஒரு பெண்.

மதுரை தமிழ்நாட்டில் இருக்கிறது.

இந்த கூற்றுகளை நாம் வாசிக்கும்போது முதற்கூற்று பொய் (மெய்யன்று) என்பதையும் இரண்டாங்கூற்று மெய் (உண்மையானது) என்பதையும் நாம் உடனே உணர்ந்து கொள்கிறோம். இதில் ஏதும் குழப்பமில்லை. கணிதத்தில் இந்த சொற்றொடர்களை **கூற்று**கள் என்கிறோம். கணிதத்தில் பொய் என்ற சொல்லை மெய்யன்று என்ற பொருளிலே பயன்படுத்து கிறோம். ஒரு கூற்று மெய்யாக இல்லாவிட்டால் அது பொய் என்கிறோம், அவ்வளவே!

இதன் மறுபக்கமாக, கீழ்க்காணும் சொற்றொடரை கருதுக.

பெண்கள் ஆண்களைவிட அதிக அறிவாற்றலுள்ளவர்கள்.

சிலர் இதை மெய்யானதாக நம்பலாம்; வேறு சிலர் மறுக்கலாம். இந்த சொற்றொடர் எப்போதும் மெய்யா பொய்யா என்று நிச்சயமாக நாம் சொல்லவியலாது. அதாவது, இந்த சொற்றொடர் பொருண்மயக்கமானது. இதுபோன்ற சொற்றொடர்களை கணித்ததில் கூற்றுகளாக ஏற்பதில்லை.

ஒரு சொற்றொடர் மெய்யாகவோ பொய்யாகவோ இருக்கலாம், ஆனால் இரண்டாகவும் இருக்கவியலாது எனில் அதை ஏற்கத்தகு கணிதக்கூற்று என்கிறோம். கணிதத்தில் கூற்று எனும்போதெல்லாம் ஏற்கத்தக்க கணிதக்கூற்றையே குறிக்கிறோம்.

கணிதத்தில் இதுபோன்ற பல கூற்றுகளை எதிர்கொள்கிறோம். சான்றாக,

இரண்டும் இரண்டும் நான்கு**.**

இரண்டு நேர்மவெண்களின் கூட்டல் நேர்மம்.

எல்லா பகாவெண்களும் ஒற்றைப்படை யெண்கள்.

ஆகியவை கூற்றுகள். இவற்றுள் முதலிரண்டும் மெய்; மூன்றாவது பொய் (2 பகாவெண் என்பதை நினைவுகொள்க). இவற்றில் பொருண்மயக்க மில்லை. ஆகவே, இவை கூற்றுகள்.

பொருண்மயக்கமுள்ளதோ குழப்பமுள்ள தோவான ஒரு சொற்றொடரை சொல்ல

முயலுங்கள். கீழ்க்காணும் சொற்றொடரை கருதுக.

x, y ஆகியவற்றின் கூட்டுத்தொகை சுழியத்தைவிட பெரிது.

இந்த சொற்றொடர் மெய்யா பொய்யா என்பதை அறியும் நிலையில் நாம் இல்லை; அதற்கு x, y ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் தெரியவேண்டும். சான்றாக, $x = 1, y = -3$ எனில் அது பொய்; $x = 1, y = 0$ எனில் அது மெய். ஆகவே இந்த சொற்றொடர் ஒரு கூற்றன்று. ஆனால்

x, y ஆகிய எந்த இரு இயலெண்களுக்கும், x, y ஆகியவற்றின் கூட்டுத்தொகை சுழியத்தைவிட பெரிது

என்ற சொற்றொடர் ஒரு கூற்று.

கீழ்க்கண்டவற்றை கருதுக.

என்ன அழகு!

கதவை திற.

எங்கே போகிறாய்?

இவை கூற்றுகளா? அல்ல! ஏனெனில் முதலாவது வியப்புத்தொடர்; இரண்டாவது ஏவல்; மூன்றாவது கேள்வி. கணிதமொழியில் இவற்றை கூற்றுகளாக கருதுவதில்லை.

நேற்று, இன்று, நாளை போன்ற ஒப்புமநேரங்கள் வரும் சொற்றொடர்களும் கூற்றுகளல்ல; ஏனெனில் இவற்றில் குறிப்பிட்ட நேரம் சரியாக விளங்குவதில்லை. சான்றாக

நாளை வெள்ளிக்கிழமை.

என்ற சொற்றொடர் கூற்றன்று. இது ஒவ்வொரு வியாழக்கிழமையிலும் மெய்யாகும்; மற்ற நாட்களில் பொய்யாகும். இதுவே சுட்டுப்பெயர்ச் சொற்கள் வரும் சொற்றொடர்களுக்கும் அங்கு, இங்கு போன்ற மாறக்கூடிய இடப்பெயர்கள் வரும் சொற்றொடர்களுக்கும் பொருந்தும். சான்றாக,

அவள் ஒரு கணிதப்பட்டதாரி.

இங்கிருந்து காசுமீரம் வெகுதொலைவு.

ஆகியவை கூற்றுகளல்ல.

இப்போது இவற்றைப்போன்றே தோன்றும் மற்றொரு சொற்றொடரை கருதுக.

ஒரு ஆங்கில மாதத்தில் 40 நாட்கள் உள்ளன.

இது கூற்றா? இங்கு ஒரு ஆங்கில மாதம் என்பது எந்த ஆங்கிலமாதத்தையும் குறிப்பிட்டுச்சொல்லவில்லை; 12 மாதங்களுள் எதுவாகவும் இருக்கலாம். எனினும், எந்த மாதத்துக்கும் 31க்கு மேற்பட்ட நாட்கள் இல்லை என்பதால், மாதம் எதுவாயினும் இந்த சொற்றொடர் பொய்யே என்பதை நாம் அறிகிறோம். ஆகவே, இந்த சொற்றொடர் ஒரு கூற்று. எனவே, ஒரு சொற்றொடர் கூற்றா என்பதை அது இருவிதமாகவும் இல்லாமல் மெய்யாகவோ பொய்யாகவோ உள்ளதா என்பதே முடிவுசெய் கிறது.

கூற்றுகளை உரோமானிய எழுத்துகளான $p, q, r, \ldots$ என்பனவற்றால் குறிப்பது வழக்கம். சான்றாக, தீ வெம்மையானது என்பதை p என்ற எழுத்தால் குறித்தால், அதை

p: தீ வெம்மையானது.

என்று எழுதுகிறோம்.

சான்று 1 கீழ்க்காணும் சொற்றொடர்கள் கூற்றுகளா என்று சரிபார்க்க. விடைகளின் காரணங்களை கூறுக.

(அ) 8 6ஐவிட சிறியது.

(ஆ) ஒவ்வொரு கணமும் முடிவுறு கணம்.

(இ) கதிரவன் ஒரு உடு.

(ஈ) கணிதம் இனிமையானது.

(உ) முகிலின்றி மழையில்லை.

(ஊ) இங்கிருந்து சென்னை எவ்வளவு தொலைவு?

தீர்வு (அ) இந்த சொற்றொடர் பொய்; ஏனெனில் 8 6ஐவிட பெரியது. ஆகவே இது ஒரு கூற்று.

(ஆ) இந்த சொற்றொடரும் பொய்; ஏனெனில் முடிவுறாக்கணங்களும் உள்ளன. ஆகவே இது ஒரு கூற்று.

(இ) கதிரவன் ஒரு உடு என்பது அறிவியல் நன்கு நிறுவிய மெய். ஆகையால் இந்த சொற்றொடர் எப்போதும் மெய். ஆகவே இது ஒரு கூற்று.

(ஈ) இந்த சொற்றொடர் அவரவர் விருப்பத்தை சார்ந்தது. சிலருக்கு கணிதம் இனிமையாயிருக்கலாம். ஆனால் வேறு சிலருக்கு கணிதம் வேப்பங்காய்! ஆகவே இது ஒரு கூற்றன்று.

(உ) முகில் உருவாகி அதிலிருந்தே மழை பொழிவது அறிவியல் மெய். ஆகவே சொற்றொடர் மெய்யாவதால், இது ஒரு கூற்று.

(ஊ) இது கேள்வி. மேலும், 'இங்கு' என்ற இடம் எதுவென்று தெரியவில்லை. ஆகவே இது கூற்றன்று.

மேற்கண்ட சான்றுகள் காட்டுவதுபோல், ஒரு சொற்றொடர் கூற்றா இல்லையா என்றுரைக்கும் போது அதன் காரணத்தையும் உரைக்கவேண் டும்; காரணமே விடையைவிட முக்கியமானது.

பயிற்சி 14.1

1. கீழ்க்காணும் சொற்றொடர்களில் எவை கூற்றுகள்? விடைக்கான காரணத்தை தருக.

(அ) ஒரு ஆங்கில மாதத்தில் 35 நாட்கள் உள்ளன.

(ஆ) கணிதம் கடினம்.

(இ) 5ஐயும் 7ஐயும் கூட்டிய தொகை 10ஐவிட பெரியது.

(ஈ) ஒரு எண்ணின் வர்க்கம் இரட்டைப்படையெண்.

(உ) நாற்கரத்தின் பக்கங்கள் சமநீளமானவை.

(ஊ) இந்த கேள்விக்கு விடையளிக்க.

(எ) $-1,8$ ஆகியவற்றின் பெருக்கல் 8.

(ஏ) ஒரு முக்கோணத்தின் உட்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $180°$.

(ஐ) இன்று காற்று அதிகம் வீசுகிறது.

(ஒ) எல்லா மெய்யெண்களும் கலப்பெண்கள்.

2. கூற்றுகளல்லாத சொற்றொடருக்கு மூன்று சான்றுகளை தருக. விடைக்கு காரணங்கூறுக.

14.3 பழைய கூற்றுகளிலிருந்து புதியவை

இப்போது, நம்மிடம் **ஏற்கெனவே** உள்ள கூற்றுகளிலிருந்து புதிய கூற்றுகளை உருவாக்கும் வழிகளை காண்போம். இந்த முறைகளை சார்சு பூல் என்ற ஆங்கிலேயக்கணிதவியலர் 1854இல் ‘எண்ணங்களின் விதிகள்’ என்ற தம் நூலில் உரையாற்றியிருக்கிறார். அவரது செய்நுட்பங் களை இங்கு விவரிக்கிறோம்.

கூற்றுகளைப்பற்றி படிப்பதில் நம் முதற்படியாக, கணிதக்கூற்றை ஆழமாக புரிந்துகொள்ள உதவும் ஒரு முக்கியமான செய்நுட்பத்தை காண்போம். இந்த செய்நுட்பம் ஒரு கூற்று மெய்யாயிருப்பதன் பொருளை கருதுவதுடன், அது பொய்யாகும்போது என்னாகும் என்றும் கேட்கிறது.

14.3.1 கூற்றின் மறுக்கை

ஒரு கூற்றின் மெய்மையை மாற்றும் கூற்றை அதன் மறுக்கை என்று அழைக்கிறோம். சான்றாக p: *புதுதில்லி ஒரு நகரம்* என்ற கூற்றின் மறுக்கை *புதுதில்லி ஒரு நகரமன்று.*

வரையறை 1 p ஒரு கூற்று எனில் அதன் மறுக்கையும் ஒரு கூற்று; அதை $\sim p$ என்று குறித்து சொற்களால் ‘p அன்று’ என்கிறோம்.

குறிப்பு p என்ற ஒரு கூற்றை மறுதலிக்கும்போது ‘p மெய்யன்று’ என்ற சொற்றொடரையோ ‘p பொய்’ என்ற தொடரையோ பயன்படுத்தலாம்.

ஒரு கூற்றின் மறுக்கையை காண்பதன் மூலம் அதைப்பற்றி நாம் மேலும் புரிந்துகொள்ள லாம் என்பதற்கு ஒரு சான்றாக,

p: தமிழ்நாட்டிலுள்ள அனைவருக்கும் தமிழ் தெரியும்.

என்ற கூற்றை கருதுவோம். இதன் மறுக்கை ‘தமிழ்நாட்டிலுள்ள அனைவருக்கும் தமிழ் தெரியாது’ என்கிறது. இது தமிழ்நாட்டில் யாருக்கும் தமிழ் தெரியாது என்று சொல்லவில்லை; தமிழ் தெரியாத ஒருவராவது தமிழ்நாட்டில் இருக்கிறார் என்றே இது சொல்கிறது. மேலும் பல சான்றுகளை காண்போம்.

சான்று 2 கீழ்க்காணும் கூற்றுகளின் மறுக்கைகளை எழுதுக

(அ) ஒரு செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டங்கள் சமம்.

(ஆ) $\sqrt{7}$ ஒரு விகிதமுறு எண்.

தீர்வு

(அ) இந்த கூற்று ஒரு செவ்வகத்தின் இரண்டு மூலைவிட்டங்களும் சமநீளமுடையன என்கிறது. அதாவது எந்தவொரு செவ்வகத்தை எடுத்துக்கொண்டாலும் அதன் மூலைவிட்டங்கள் சமம் என்கிறது. இதன் மறுக்கை

ஒரு செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டங்கள் சமம் என்பது மெய்யன்று.

இதன் பொருள் மூலைவிட்டங்கள் சமமல்லாத ஒரு செவ்வகமாவது இருக்கிறது.

(ஆ) இந்தக்கூற்றின் மறுக்கை

$\sqrt{7}$ ஒரு விகிதமுறு எண் அன்று.

என்றாகிறது. இதையே

$\sqrt{7}$ ஒரு விகிதமுறா எண்.

என்றும் எழுதலாம்

சான்று 3 கீழ்க்காணும் கூற்றுகளை மறுதலித்து அந்த மறுக்கைகள் மெய்யா என்பதை காண்க.

(அ) ஆசுத்திரேலியா ஒரு கண்டம்.

(ஆ) நான்கு பக்கங்களும் சமமான ஒரு நாற்கரம் இல்லை.

(இ) ஒவ்வொரு இயலெண்ணும் சுழியத்தைவிட பெரிது.

(ஈ) 3ஐயும் 4ஐயும் கூட்டிய தொகை 9க்கு சமம்.

தீர்வு

(அ) கூற்றின் மறுக்கை *ஆசுத்திரேலியா ஒரு கண்டம் அன்று.* ஆசுத்திரேலியா ஒரு கண்டமே என்பதால் இந்தக்கூற்று பொய்.

(ஆ) கூற்றின் மறுக்கை *நான்கு பக்கங்களும் சமமான ஒரு நாற்கரம் இல்லை என்பது பொய்.* இதன் பொருள் நான்கு பக்கங்களும சமமான ஒரு நாற்கரமாவது இருக்கிறது. சதுரம் ஒரு நாற்கரம் என்பதையும் சதுரத்தின் பக்கங்கள் சமம்

என்பதையும் நாம் அறிவோம். ஆகவே இந்த கூற்று மெய்.

(இ) கூற்றின் மறுக்கை *ஒவ்வொரு இயலெண்ணும் சுழியத்தைவிட பெரிது என்பது பொய்.* இதை சுழியத்தைவிட பெரிதல்லாத ஒரு இயலெண் இருக்கிறது என்று எழுதலாம். இது பொய்.

(ஈ) கூற்றின் மறுக்கை *3ஐயும் 4ஐயும் கூட்டிய தொகை 9க்கு சமமன்று.* இது மெய்.

14.3.2 கூட்டுக்கூற்றுகள்

கூற்றுகளை இணைப்பதால் பல கணிதக்கூற்றுகளை பெறலாம். உம்மையும் ஓகாரமும் இணைப்புருபுகள். ஓகாரத்துடன் அல்லது என்ற சொல்லை சேர்த்தும் கூற்றுகளை இணைக்கலாம். சிலநேரங்களில் காற்புள்ளியும் அரைப்புள்ளியும் இணைப்பிகளாக பயன்படு கின்றன. இவற்றைப்பற்றி விரிவாக கீழ் காண்போம். சான்றாக

p: விளக்கிலோ மின்சுற்றிலோ பழுது இருக்கிறது.

என்ற கூற்று கீழ்க்காணும் இரண்டு கூற்றுகளின் கூட்டு

q: விளக்கில் பழுது இருக்கிறது.

r: மின்சுற்றில் பழுது இருக்கிறது.

இந்த இரண்டு கூற்றுகளையும் ஓகாரத்தால் இணைத்து கூட்டுக்கூற்றாக எழுதினோம். மற்றொரு சான்றாக,

p: 7 ஒரு ஒற்றைப்படையெண்.

q: 7 ஒரு பகாவெண்.

ஆகிய கூற்றுகளை உம்மையால் இணைத்து

r: 7 ஒரு ஒற்றைப்படையெண்ணும் ஒரு பகாவெண்ணும்.

என்று எழுதலாம். இதுவும் ஒரு கூட்டுக்கூற்று. இதனால் கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கிறோம்.

வரையறை 2: இரண்டு கூற்றுகளோ இரண்டுக்கும் மேற்பட்ட கூற்றுகளோ இணைந்து ஒரு **கூட்டுக்கூற்றை** உருவாக்குகின்றன. ஒவ்வொரு கூற்றையும் ஒரு **கூற்றகை** என்கிறோம்.

சான்று 4 கீழ்க்காணும் கூட்டுக்கூற்றுகளின் கூற்றகைகளை காண்க

(அ) வானம் நீலநிறமும் புல் பச்சைநிறமும் உள்ளவை.

(ஆ) மழையும் குளிருமாக இருக்கிறது.

(இ) எல்லா விகிதமுறு எண்களும் மெய்யெண்கள்; எல்லா மெய்யெண்களும் கலப்பெண்கள்.

(ஈ) 0 ஒரு நேர்ம எண்ணோ ஒரு எதிர்ம எண்ணோ.

தீர்வு கூற்றகைகளும் இணைப்பிகளும் பின்வறுமாறு

(அ)

p: வானம் நீலநிறமுள்ளது.

q: புல் பச்சைநிறமுள்ளது.

இணைப்பி: உம்மை.

(ஆ)

p: மழையாயிருக்கிறது.

q: குளிராயிருக்கிறது.

இணைப்பி: உம்மை.

(இ)

p: எல்லா விகிதமுறு எண்களும் மெய்யெண்கள்.

q: எல்லா மெய்யெண்களும் கலப்பெண்கள்.

இணைப்பி: அரைப்புள்ளி.

(ஈ]

p: 0 ஒரு நேர்ம எண்.

q: 0 ஒரு எதிர்ம எண்.

இணைப்பி: ஓகாரம்.

சான்று 5 கீழ்க்கண்டவற்றின் கூற்றகைகளை காண்க. அவை மெய்யா பொய்யா என்பதையும் காண்க.

(அ) சதுரம் ஒரு நாற்கரம்; அதன் நான்கு பக்கங்களும் சமம்.

(ஆ) எல்லாப்பகாவெண்களும் இரட்டைப் படையெண்களோ
ஒற்றைப்படையெண்களோ.

(இ) கணிதமோ கணினியறிவியலோ எடுத்தவர்
கணிதப்பயன்பாட்டுமுதுப்பட்டத்தை (கபமுவை) படிக்கலாம்.

(ஈ) சண்டிகார் அரியானாவின் தலைநகரமும் உபியின் தலைநகரமும்.

(உ) $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறு எண்ணோ விகிதமுறா எண்ணோ.

(ஊ) 24 $2, 4, 8$ ஆகியவற்றின் மடங்கு.

தீர்வு அகைகளும் அவற்றின் மெய்பொய்களும் பின்வருமாறு.

(அ)

p: சதுரம் ஒரு நாற்கரம்.

q: அதன் நான்கு பக்கங்களும் சமம்.

இரண்டும் மெய். இணைப்பி அரைப்புள்ளி.

(ஆ)

p: எல்லா பகாவெண்களும் இரட்டைப்படை யெண்கள்.

q: எல்லா பகாவெண்களும் ஒற்றைப்படை யெண்கள்.

இரண்டும் பொய். இணைப்பி ஓகாரம்.

(இ)

p: கணிதம் எடுத்தவர் கபமு படிக்கலாம்.

q: கணினியறிவியல் எடுத்தவர் கபமு படிக்கலாம்.

இரண்டும் மெய். இணைப்பி ஓகாரம்.

(ஈ)

p: சண்டிகார் அரியானாவின் தலைநகரம்.

q:சண்டிகார் உபியின் தலைநகரம்.

முதலாவது மெய்; இரண்டாவது பொய். இணைப்பி உம்மை.

(உ)

p: $\sqrt{2}$ ஒரு பகுவெண்.

q: $\sqrt{2}$ ஒரு பகாவெண்.

முதலாவது பொய்; இரண்டாவது மெய். இணைப்பி ஒகாரம்.

(ஊ)

p: 24 2இன் மடங்கு.

q: 24 4இன் மடங்கு.

r: 24 8இன் மடங்கு.

மூன்றும் மெய். இங்கு, காற்புள்ளிகளிட்ட பட்டியலைத்தொடர்ந்து ஆகிய என்ற சொல் வரும் கட்டமைப்பு இணைப்பியாக செயலாற்றுகிறது. பல அகைகளை இணைக்கும் சான்றுகளை பின்பும் காண்போம்.

பயிற்சி 14.2

1. கீழ்க்காணும் கூற்றுகளின் மறுக்கைகளை எழுதுக.

   (அ) தமிழ்நாட்டின் தலைநகரம் சென்னை.

   (ஆ) $\sqrt{2}$ ஒரு கலப்பெண் அன்று.

   (இ) எல்லா முக்கோணங்களும் சமப்பக்க முக்கோணங்கள் அல்ல.

   (ஈ) 2 7ஐவிட பெரியது.

   (உ) ஒவ்வொரு இயலெண்ணும் ஒரு முழுவெண்.

2. கீழ்க்காணும் கூற்றுச்சோடிகளில் ஒன்றுக்கொன்று மறுக்கையா?

   (அ) x விகிதமுறு எண் அன்று. x விகிதமுறா எண்.

   (ஆ) x விகிதமுறு எண். x விகிதமுறா எண்.

3. கீழ்க்காணும் கூட்டுக்கூற்றுகளின் கூற்றகைகளை காண்க. அவை மெய்யா பொய்யா என்றுகாண்க.

   (அ) 3 பகாவெண்ணோ ஒற்றைப்படை எண்ணோ.

   (ஆ) எல்லா முழுவெண்களும் நேர்ம எண்களோ எதிர்ம எண்களோ.

   (இ) 100 3, 11, 5 ஆகியவற்றால் வகுபடுகிறது.

14.4 தனித்துவச்சொற்களும் சொற்கட்டமைப்புகளும்

கூட்டுக்கூற்றுகளில் இடம்பெறும் உம்மை, ஒகாரம் போன்ற சொற்களும் அவற்றுடன் தொடர்பான சில நிறுத்தக்குறிகளும் கணிதத்திலும் அறிவியல் போன்ற கலைத்துறைகளிலும் துல்லியமான பொருள்களுடன் மிகவும் பயன்படுகின்றன. இவற்றை இணைப்பிகள் என்கிறோம். கூட்டுக்கூற்றுகளை நாம் பயன்படுத்தும்போது இந்த இணைப்புச்சொற்களும் நிறுத்தக்குறிகளும் ஆற்றும் பங்கை தெளிவாக புரிந்துகொள்வது அவசியம். அவற்றை கீழே விளக்குவோம்.

14.4.1 உம்மை

உம்மை இடம்பெறும் ஒரு கூட்டுக்கூற்றை சான்றாக எடுப்போம்.

p: ஒரு புள்ளி ஒரு இடநிலையில் இருக்கிறது; அதன் இருப்பிடத்தை நாம் தீர்மானிக்கலாம்.

இங்கு அரைப்புள்ளி உம்மையின் பங்கை வகிக்கிறது. இந்த கூற்றை இரண்டு அகைகளாக பிரிக்கலாம்.

q: ஒரு புள்ளி ஒரு இடநிலையில் இருக்கிறது.

r: அதன் இருப்பிடத்தை நாம் தீர்மானிக்கலாம்.

இங்கு இரண்டு கூற்றுகளும் மெய் என்பதை காண்கிறோம். மற்றொரு சான்றாக

p: 42 5ஆலும் 6ஆலும் 7ஆலும் வகுபடுகிறது.

இதில் கீழ்க்காணும் மூன்று அகைகள் உள்ளன.

q: 42 5ஆல் வகுபடுகிறது.

r: 42 6ஆல் வகுபடுகிறது.

s: 42 7ஆல் வகுபடுகிறது.

இங்கு, முதற்கூற்று பொய்; மற்ற இரண்டும் மெய். மேற்கண்ட கூட்டுக்கூற்றை

p: 42 5, 6, 7 ஆகியவற்றால் வகுபடுகிறது

என்றும் எழுதலாம். உம்மைக்குப்பதிலாக காற்புள்ளிகளிட்டு பட்டியலாக எழுதினோம். பட்டியலை ஆகிய என்ற சொல்லால் முடித்தோம்.

இரண்டு விதமாக எழுதுவதும் ஒரே பொருளுள் ளவை. அதனால் இரண்டையும் உம்மைக்கூட்டுக் கூற்று என்றே நாம் குறிப்பிடுகிறோம்.

உம்மையால் கூற்றுகளை இணைப்பதில் கீழ்க்காணும் விதிகள் உள்ளன.

- உம்மையால் இணைந்த கூட்டுக்கூற்றின் எல்லா அகைகளும் மெய் எனில் கூட்டுக்கூற்று மெய்.
- உம்மையால் இணைந்த கூட்டுக்கூற்றின் ஏதாவது ஒரு அகை பொய் எனில் கூட்டுக்கூற்று பொய். சில அகைகள் பொய் எனும்போதும் எல்லா அகைகளும் பொய் எனும்போதும் 'ஏதாவது ஒரு அகை பொய்' என்பது நிறைவேறுவதை நோக்குக.

சான்று 6 கீழ்க்காணும் கூட்டுக்கூற்றுகளின் கூற்றகைகளை எழுதி கூட்டுக்கூற்று மெய்யா பொய்யா என்று காண்க.

(அ) ஒரு கோடு நேரானதும் இருபக்கங்களிலும் முடிவிலிக்கு நீள்வதும்.

(ஆ) சுழியம் ஒவ்வொரு நேர்ம முழுவெண்ணைவிடவும் ஒவ்வொரு எதிர்ம முழுவெண்ணைவிடவும் சிறியது.

(இ) எல்லா வாழுயிரிகளுக்கும் இரண்டு கால்களும் இரண்டு கண்களும் உள்ளன.

தீர்வு

(அ) கூற்றகைகள் பின்வருமாறு.

p: கோடு நேரானது.

q: கோடு இருபக்கங்களிலும் முடிவிலிக்கு நீள்வது.

இரண்டு கூற்றுகளும் மெய். ஆகவே, கூட்டுக்கூற்று மெய்.

(ஆ) கூற்றகைகள்

p: சுழியம் ஒவ்வொரு நேர்ம முழுவெண்ணையும்விட சிறியது.

q: சுழியம் ஒவ்வொரு எதிர்ம முழுவெண்ணையும்விட சிறியது.

இரண்டாம் கூற்று பொய். ஆகவே கூட்டுக்கூற்று பொய்.

(இ) கூற்றகைகள்

p: எல்லா வாழுயிரிகளுக்கும் இரண்டு கால்கள் உள்ளன.

q: எல்லா வாழுயிரிகளுக்கும் இரண்டு கண்கள் உள்ளன.

இரண்டு கூற்றுகளும் பொய். அதனால், கூட்டுக்கூற்று பொய்.

இப்போது, கீழ்க்காணும் கூற்றை கருதுக.

p: ஆல்ககாலும் நீரும் அடங்கிய கலவையை வேதிமுறைகளால் பிரிக்கலாம்.

இதில் உம்மை இருப்பினும், இந்தக்கூற்றை கூற்றகைகளாக பிரிக்கவியலாது. ஆகையால் இது கூட்டுக்கூற்றன்று. இங்கு உம்மை இரண்டு சொற்களை இணைக்கிறது; கூற்றுகளை இணைக்கவில்லை.

குறிப்பு: உம்மை எப்போதும் கூட்டுக்கூற்றை காட்டுவதாக எண்ணாதீர்கள். மேற்காட்டிய சான்றில் உம்மை கூற்றுகளின் இணைப்பியாக பயன்படவில்லை.

14.4.2 ஓகாரம்

இந்த கூற்றை கருதுக.

p: உயிரியலையோ வேதியியலையோ எடுத்த மாணவர் நுண்ணியிரியலில் மேற்படிப்புக்கு விண்ணப்பிக்கலாம்.

இந்தக்கூற்று மெய் என்பதை அறிவோம். இதன் பொருள் என்ன?

p: உயிரியலை எடுத்த மாணவர் நுண்ணுயி ரியலில் மேற்படிப்புக்கு விண்ணப்பிக்கலாம்.

q: வேதியியலை எடுத்த மாணவர் நுண்ணுயி ரியலில் மேற்படிப்புக்கு விண்ணப்பிக்கலாம்.

r: உயிரியலையும் வேதியியலையும் எடுத்த மாணவர் நுண்ணுயிரியலில் மேற்படிப்புக்கு விண்ணப்பிக்கலாம்.

ஓகாரத்தை இவ்வகையில் பயன்படுத்து வதை **சேர்ப்போகாரம்** என்கிறோம். சேர்ப்போ காரத்தால் இணைந்த கூட்டுக்கூற்றுக்கான விதிகள் பின்வருமாறு.

- ஓகாரத்தால் இணைந்த கூட்டுக்கூற்றின் அகைகளுள் ஏதாவது ஒன்று மெய் எனில் கூட்டுக்கூற்று மெய். சில அகைகள் மெய் எனும்போதும் எல்லா அகைகளும் மெய் எனும்போதும் 'ஏதாவது ஒரு அகை மெய்' என்பது நிறைவேறுவதை நோக்குக.
- ஓகாரத்தால் இணைந்த கூட்டுக்கூற்றின் எல்லா அகைகளும் பொய் எனில் கூட்டுக்கூற்று பொய்.

தமிழில் மற்றொரு நிலைமையிலும் ஓகாரத்தை பயன்படுத்துகிறோம். கீழ்க்காணும் கூட்டுக்கூற்றை கருதுக.

p: ஒரு தளத்திலுள்ள இரண்டு கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் இடைவெட்டுவனவோ இணையான வையோ.

இந்தக்கூற்று மெய் என்பதை அறிவோம். இதன் பொருள் என்ன? ஒரு தளத்திலுள்ள இரண்டு கோடுகள் இடைவெட்டினால் அவை இணையானவை அல்ல. மறுவழியாக, இரண்டு கோடுகளும் இணையானவை அல்ல எனில் அவை ஒரு புள்ளியில் இடைவெட்டுகின்றன. இரண்டு நிலைமைகளிலும் கூட்டுக்கூற்று மெய். ஆனால் இரண்டு கூற்றகைகளும் மெய்யாக இருப்பது இயலாது. ஆகவே இந்தக்கூற்றின் அகைகள் பின்வருமாறு.

q: ஒரு தளத்திலுள்ள இரண்டு கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் இடைவெட்டுவன.

r: ஒரு தளத்திலுள்ள இரண்டு கோடுகள் இணையானவை.

இவ்வகையான இணைப்பை **தவிர்ப்போகாரம்** என்கிறோம். சிலநேரங்களில் தவிர்ப்போகாரத்தை வெளிப்படையாக குறிக்க அல்லது என்ற சொல்லை சேர்த்து எழுதுவர்.

p: ஒரு தளத்திலுள்ள இரண்டு கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் இடைவெட்டுவனவோ அல்லது இணையானவையோ.

இங்கு அல்லது என்ற சொல் ஒன்றில்லா விட்டால் மற்றது என்ற பொருளை தருகிறது.

சான்று 7 கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு கூற்றுக்கும், ஓகாரம் சேர்ப்பா தவிர்ப்பா என காரணத்துடன் கூறுக.

(அ) ஒரு நாட்டுக்குள் நுழைய கடவுச் சீட்டோ வாக்காளரட்டையோ வேண்டும்

(ஆ) விடுமுறைநாளாகவோ ஞாயிற்றுக் கிழமையாகவோ இருந்தால் பள்ளி மூடியிருக்கும்

(இ) இரண்டு தளங்கள் ஒரு கோட்டில் இடைவெட்டுவனவோ இணையானவையோ

(ஈ) மாணவர்கள் மலையாளத்தையோ தெலுங்கையோ மூன்றாம் மொழியாக எடுக்கலாம்

தீர்வு

(அ) ஒருவருக்கு கடவுச்சீட்டும் வாக்காளரட்டையும் இருக்கலாம் என்பதால் இந்த ஓகாரம் சேர்ப்போகாரம்.

(ஆ) விடுமுறைநாளான ஞாயிற்றுக் கிழமைகளிலும் பள்ளி மூடியிருப்பதால் இது சேர்ப்போகாரம்.

(இ) இரண்டு தளங்கள் இடைவெட்டுவதும் இணையாயிருப்பதும் சாத்தியமன்றாததால் இது தவிர்ப்போகாரம்.

(ஈ) மூன்றாம் மொழியாக ஏதாவது ஒன்றைமட்டுமே எடுக்கலாம் என்பதால் இது தவிர்ப்போகாரம்.

சான்று 8 கீழ்க்காணும் கூற்றுகளில் பயன்படும் ஓகாரம் சேர்ப்பா தவிர்ப்பா என்று கண்டு கூற்று மெய்யா பொய்யா என்றும் காண்க.

(அ) $\sqrt{2}$ விகிதமுறு எண்ணோ விகிதமுறா எண்ணோ.

(ஆ) ஒரு பொது நூலகத்துள் நுழைய ஒரு மாணவருக்கு பள்ளியின் அடையாள அட்டையோ பள்ளி அலுவலர்களிடமிருந்து ஒரு கடிதமோ வேண்டும்.

(இ) செவ்வகம் ஒரு நாற்கரமோ ஐந்து பக்கங்ககளுள்ள பலகோணமோ.

தீர்வு

(அ)

p: $\sqrt{2}$ விகிதமுறு எண்.

q: $\sqrt{2}$ விகிதமுறா எண்.

ஒரே எண் விகிதமுறுவெண்ணும் விகிதமுறாவெண்ணுமாக இருக்கவியலாது என்பதால், இது தவிர்ப்போகாரம். முதலகை மெய்; இரண்டாமகை பொய். கூற்று மெய்.

(ஆ)

p: ஒரு பொது நூலகத்துள் நுழைய ஒரு மாணவருக்கு பள்ளியின் அடையாள அட்டை வேண்டும்.

q: ஒரு பொது நூலகத்துள் நுழைய ஒரு மாணவருக்கு பள்ளி அலுவலர்களிடமிருந்து ஒரு கடிதம் வேண்டும்.

ஒரு மாணவரிடம் பள்ளியின் அடையாள அட்டையும் பள்ளி அலுவலர்களிடமிருந்து ஒரு கடிதமும் இருக்கலாம் என்பதால் இது சேர்ப்போகாரம். இரண்டகைகளும் மெய். கூற்று மெய்.

(இ)

p: செவ்வகம் ஒரு நாற்கரம்.

q: செவ்வகம் ஐந்து பக்கங்களுள்ள பலகோணம்.

எந்த வடிவமும் நாற்கரமாகவும் ஐந்து பக்கங்களுள்ள பலகோணமாகவும் இருக்க வியலாது என்பதால் இது தவிர்ப்போகாரம். முதலகை மெய்: இரண்டாவது பொய். கூற்று மெய்.

14.4.3 அளவுரைப்பிகள்

ஒரு கணத்தில் எந்தெந்த உறுப்புகளுக்கு ஒரு கூற்று மெய் என்பதை குறிக்க ஒவ்வொரு, சில, எல்லா போன்ற சொற்களை பயன்படுத்து கிறோம். இவை அளவுகளை உரைப்பதால் அவற்றை அளவுரைப்பிகள் என்கிறோம். சான்றாக,

p: r என்ற ஒவ்வொரு பகாவெண்ணுக்கும், $\sqrt{r}$ ஒரு விகிதமுறாவெண்.

என்ற சொற்றொடரை கருதுக. இதன் பொருள் என்ன? S பகாவெண்களின் கணம் எனில் S இன் ஒவ்வொரு r என்ற உறுப்புக்கும் $\sqrt{r}$ விகிதமுறா வெண். இங்கு $\sqrt{r}$ *ஒரு விகிதமுறாவெண்* என்பது ஒரு கணிதக்கூற்று. ஒவ்வொரு பகாவெண்ணுக் கும் என்பது அளவுரைப்பி. ஆகவே r *என்ற ஒவ்வொரு பகாவெண்ணுக்கும்,* $\sqrt{r}$ *ஒரு விகிதமுறாவெண்* என்பது ஒரு அளவுரைத்த கணிதக்கூற்று. பொதுவாக, ஒரு கணத்துக்கு ஒரு பண்பு இருந்தால் அந்தக்கணத்தின் எல்லாவுறுப்புகளும் அந்த பண்பை நிறைவேற்றுகின்றன என்பதை *ஒவ்வொரு* என்ற அளவுரைப்பி சொல்கிறது. மற்ற சான்றுகள்:

(அ) எல்லா பகாவெண்களும் முழுவெண்கள்.

(ஆ) சில இயலெண்கள் ஒற்றைப்படை யெண்கள்.

மற்றொருவிதமான அளவுரைப்பி *இருக்கிறது* என்ற சொல். சான்றாக,

p: பக்கங்கள் சமம் என்றவாறு ஒரு செவ்வகம் இருக்கிறது.

என்ற கூற்றை கருதுக. இதன் பொருள் என்ன? செவ்வகக்கணத்தில் பக்கங்கள் சமம் என்ற பண்பை நிறைவேற்றும் ஒரு உறுப்பு இருக்கிறது. எல்லா உறுப்புகளும் பண்பை நிறைவேற்றுவது தேவையில்லை என்பது தெளிவு. மற்றொரு சான்றாக,

p: x என்ற ஒவ்வொரு நேர்ம எண்ணுக்கும், $y < x$ என்றவாறு y என்ற ஒரு நேர்ம எண் இருக்கிறது

என்ற கூற்று எல்லா xகளுக்கும் பண்பு நிறைவேறுகிறது என்று சொல்கிறது. ஆனால்

q: x என்ற ஒவ்வொரு நேர்ம எண்ணுக்கும் $y < x$ என்றவாறு y என்ற ஒரு நேர்ம எண் இருக்கிறது

என்ற கூற்று முந்தையதைப்போலவே தோன்றினாலும், இதன் பொருள் வேறு. உண்மையில், முந்தையது மெய்; பிந்தையது பொய். y என்ற ஒரு நேர்ம எண் இருப்பதாகவும் அது x என்ற ஒவ்வொரு நேர்ம எண்ணைவிடவும் சிறியது என்றும் q சொல்கிறது. ஆகவே, கணிதக்கூற்றுகளை சரியாக எழுத, எல்லா சொற்களும் அடையாளங்களும் நிறுத்தக்குறிகளும் சரியான இடங்களில் இருப்பது முக்கியம்.

உம்மையையும் ஒகாரத்தையும் *இணைப்பிகள்* என்றும் ஒவ்வொரு, இருக்கிறது ஆகிய சொற்களை *அளவுரைப்பிகள்* என்றும் அழைக்கிறோம்.

இவ்வாறு தனித்துவச்சொற்களுள்ள பல கணிதக்கூற்றுகளை கண்டோம். கணிதக் கூற்றுகளின் மெய்மையை சரிபார்க்க, இந்தச்சொற்களின் தனித்துவப்பொருளை நாம் அறிந்திருக்கவேண்டும்.

பயிற்சி 14.3

1. கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு கூட்டுக்கூற்றுக்கும், முதலில் இணைப்பியை அடையாளங்கண்டு பின்பு அகைகளாக பிரிக்க.

   (அ) எல்லா விகிதமுறு எண்களும் மெய்யெண்கள்; எல்லா மெய்யெண்களும் கலப்பெண்கள் அல்ல.

   (ஆ) ஒரு முழுவெண்ணின் வர்க்கம் நேர்மமோ எதிர்மமோ.

   (இ) கதிரவவெப்பத்தால் மண் விரைவில் சூடாகிறது; இரவில் விரைவாக குளிரவில்லை.

   (ஈ) $x = 2$உம் $x = 3$உம் $3x^2 - x - 10 = 0$இன் மூலங்கள்.

2. கீழ்க்காணும் கூற்றுகளில் அளவுரைப்பியை இனங்கண்டு, கூற்றின் மறுக்கையை எழுதுக.

   (அ) தன் வர்க்கத்துக்கு சமம் என்றவாறான ஒரு எண் இருக்கிறது.

   (ஆ) x என்ற ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணுக்கும், x $x + 1$ஐவிட குறைவு.

   (இ) இந்தியாவின் ஒவ்வொரு மாநிலத்துக்கும் ஒரு தலைநகரம் இருக்கிறது.

3. கீழ்க்காணும் கூற்றுச்சோடிகள் ஒன்றுக்கொன்று மறுக்கையா என்று சரிபார்க்க. விடையின் காரணத்தை தருக.

   (அ) x, y என்ற ஒவ்வொரு மெய்யெண்சோடிக்கும், $x + y = y + x$ மெய்.

   (ஆ) $x + y = y + x$ என்றவாறான x, y என்ற மெய்யெண்கள் இருக்கின்றன.

4. கீழ்க்காணும் கூற்றுகளிலுள்ள ஒகாரம் சேர்ப்பா தவிர்ப்பா என்று காரணத்துடன் கூறுக.

   (அ) கதிரவன் எழுகிறதோ நிலா மறைகிறதோ.

   (ஆ) ஒட்டுநருரிமத்துக்கு விண்ணப்பிக்க பங்கட்டையோ கடவுச்சீட்டோ இருக்கவேண்டும்.

   (இ) எல்லா முழுவெண்களும் நேர்மமோ எதிர்மமோ.

14.5 உள்ளுரைகள்

இந்தப்பகுதியில் ‘எனில்’, ‘எனில் மட்டும்’, ‘எனிலும் எனில் மட்டுமேயும்’ ஆகியவை பங்குபெறும் கூற்றுகளை உரையாடுவோம்.

முதலாவதாக, ‘p எனில் q’ என்ற கூற்றை கருதுவோம். ‘எனில்’ என்ற சொல் கணிதத்தில் மிகவும் அதிகமாக பயன்படுகிறது. சான்றாக, கீழ்க்காணும் கூற்றை கருதுக.

r: நீங்கள் ஒரு நாட்டில் பிறக்கிறீர்கள் *எனில்* நீங்கள் அந்த நாட்டின் குடிமகர்.

இந்த கூற்று கீழ்க்காணும் p, q என்ற கூற்றுகளால் ஆனது என்பதை காணலாம்.

p: நீங்கள் ஒரு நாட்டில் பிறக்கிறீர்கள்.

q: நீங்கள் அந்த நாட்டின் குடிமகர்.

‘p எனில் q’ என்ற கூற்று p மெய் எனில் q மெய்யாகவே இருக்கவேண்டும் என்று சொல்கிறது. இதை கணிதக்குறியீட்டால் $p \Rightarrow q$ என்று எழுதுகிறோம். $\Rightarrow$ என்ற அடையாளம் உள்ளுரைக்கிறது என்ற சொல்லை குறிக்கிறது.

‘p எனில் q’ என்ற கூற்றைப்பற்றிய ஒரு முக்கியமான உண்மை என்னவென்றால், p பொய்யாகும்போது qவைப்பற்றி அது ஒன்றும் சொல்லவில்லை; மேலும், qவின்மீது எந்த வேட்கோளையும் வைக்கவில்லை. சான்றாக, நீங்கள் ஒரு நாட்டில் பிறக்கவில்லை எனில் நீங்கள் அந்த நாட்டின் குடிமகர் என்பதைப்பற்றி ஒன்றும் சொல்லவியலாது. வேறுவிதமாகச்

சொன்னால், p நிகழாதது q நிகழ்வதன்மீது எந்த விளைவையும் ஏற்படுத்தவில்லை. இவ்வாறான நிலைமையை p qவுக்கு ***போதுமானது*** என்று சொல்கிறோம்.

' p எனில் q ' என்ற கூற்றைப்பற்றிய மற்றொரு உண்மை என்னவென்றால், இது p நிகழ்வதை உள்ளுரைக்கவில்லை.

எனிற்கூற்றை வேறொருவிதமாகவும் எழுதலாம். எனில் என்ற சொல்லுக்குப்பதிலாக ஆல் என்ற விகுதியை பயன்படுத்தலாம். மேற்கண்ட கூற்றை

நீங்கள் ஒரு நாட்டில் பிறந்தால் அந்த நாட்டின் குடிமகர்

என்றும் எழுதலாம்.

இரண்டாவதாக, 'p எனில் மட்டும் q' என்ற கூற்றை கருதுவோம். இதற்கு சான்றாக,

r: x என்ற ஒரு எண் இரட்டைப்படை எனில் மட்டுமே அது 4ஆல் வகுபடுகிறது

என்ற கூற்றை சொல்லலாம். இதை

p: x இரட்டைப்படை

q: x 4ஆல் வகுபடுகிறது

என்று பிரித்துக்கொள்வோம். இங்கு, p பொய் எனில் q மெய்யாக இயலாது. ஆகவே q வுக்கு p ***தேவையானது*** என்கிறோம். இதை கணிதக்குறியீட்டால், $p \Leftarrow q$ என்று எழுதுகிறோம்.

உங்கள் சிந்தனைக்கு

$\boldsymbol{p}$ *எனில்* $\boldsymbol{q}$ என்பதை $\boldsymbol{q}$ *எனில் மட்டும்* $\boldsymbol{p}$ என்றும் எழுதலாம்.

அதாவது, $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$ என்பதை $\boldsymbol{q \Leftarrow p}$ என்றும் எழுதலாம்.

இறுதியாக, 'p எனிலும் எனில் மட்டுமேயும் q' என்ற கூற்றுக்கு ஒரு சான்று:

r: x என்ற ஒரு எண்ணிலுள்ள இலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 3ஆல் வகுபடுகிறது எனிலும் எனில் மட்டுமேயும் எண்3ஆல் வகுபடுகிறது.

இதன் கூற்றகைகள் பின்வருமாறு.

p: x இலுள்ள இலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 3ஆல் வகுபடுகிறது.

q: x மூன்றால் வகுபடுகிறது.

இது $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ ஆகிய இரண்டு கூற்றுகளும் சேர்ந்தது. இங்கு, p மெய்யாவதற்கு q **தேவையானதும் போதுமானதும்.** இதை சுருக்கமாக கணிதக்குறியீட்டால் $p \Leftrightarrow q$ என்று குறிக்கிறோம்.

உங்கள் சிந்தனைக்கு

$\boldsymbol{p}$ எனிலும் எனில் மட்டுமேயும் $\boldsymbol{q}$ என்பதை $\boldsymbol{q}$ எனிலும் எனில் மட்டுமேயும் $\boldsymbol{p}$ என்றும் எழுதலாம்.

அதாவது, $p \Leftrightarrow q$ என்பதை $q \Leftrightarrow p$ என்றும் எழுதலாம்.

சான்று 9 கீழ் கொடுத்துள்ள இரண்டு கூற்றுகளையும் 'எனிலும் எனில் மட்டுமேயும்' என்ற தொடரை பயன்படுத்தி இணைக்க.

(அ) p: செவ்வகம் ஒரு சதுரம் எனில் அதன் எல்லாப்பக்கங்களும் சமம். q: ஒரு செவ்வகத்தின் எல்லாப்பக்கங்களும் சமம் எனில் அது ஒரு சதுரம்.

(ஆ) p: ஒரு எண்ணின் எண்ணிமங்களின் (இலக்கங்களின்) கூட்டுத்தொகை 3ஆல் வகுபடுகிறது எனில் அந்த எண் 3ஆல் வகுபடுகிறது. q: ஒரு எண் 3ஆல் வகுபடுகிறது எனில் அந்த எண்ணின் எண்ணிமங்களின் கூட்டுத்தொகை 3ஆல் வகுபடுகிறது.

தீர்வு (அ) செவ்வகத்தின் எல்லாப்பக்கங்களும் சமம் எனிலும் எனில் மட்டுமேயும், அது சதுரம்.

(ஆ) ஒரு எண்ணின் இலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 3ஆல் வகுபடுகிறது எனிலும் எனில் மட்டுமேயும் அந்த எண் 3ஆல் வகுபடுகிறது.

14.5.1 மாற்றுக்கூற்றும் திருப்புக்கூற்றும் புரட்டுக்கூற்றும்

'எனில்' என்ற கட்டமைப்புள்ள கூற்றிலிருந்து அதன் மாற்றுக்கூற்று, திருப்புக்கூற்று, புரட்டுக்கூற்று ஆகியவற்றை பெறலாம். சான்றாக, கீழ்க்காணும் எனிற்கூற்றை கருதுக.

r: இயற்சூழல் மாறுகிறது எனில் உயிரியற்சூழல் மாறுகிறது.

இதன் **மாற்றுக்கூற்று** *உயிரியற்சூழல் மாறவில்லை எனில் இயற்சூழல் மாறவில்லை.* கூற்று மெய்யெனில் மாற்றுக்கூற்றும் மெய் என்பதை நோக்குக. மாற்றுக்கூற்று கூற்றையே வேறுவிதமாக சொல்கிறது. இதை புரிந்து கொள்ள மேலும் சில சான்றுகளை காண்போம்.

சான்று 10 கீழ்க்காணும் கூற்றுகளின் மாற்றுகளை எழுதுக.

(அ) ஒரு எண் 9ஆல் வகுபடுகிறது எனில் அது 3ஆல் வகுபடுகிறது.

(ஆ) நீர் இந்தியாவில் பிறந்தீர் எனில் நீர் இந்தியக்குடிமகர்.

(இ) ஒரு முக்கோணம் சமபக்கமானது எனில் அது இருசமபக்கமானது.

தீர்வு மாற்றுக்கூற்றுகள் பின்வருமாறு.

(அ) ஒரு எண் 3ஆல் வகுபடவில்லை எனில் அது 9ஆல் வகுபடவில்லை.

(ஆ) நீர் இந்தியகுடிமகர் அல்லீர் எனில் நீர் இந்தியாவில் பிறக்கவில்லை.

(இ) ஒரு முக்கோணம் இருசமபக்க மானது அன்று **எனில்** அது சமபக்கமானது அன்று.

கணித அடையாளத்தில், p *எனில்* q என்ற கூற்றின் மாற்றுக்கூற்று $\sim q$ *எனில்* $\sim p$ **.** இது மேற்கண்ட சான்றுகளிலிருந்தும் தெளிவாகிறது.

அடுத்ததாக, **திருப்புக்கூற்று** என்பதை காண்போம். p *எனில்* q என்ற கூற்றின் திருப்புக்கூற்று q *எனில்* p. சான்றாக,

p: ஒரு எண் 10ஆல் வகுபடுவது எனில் அது 5ஆல் வகுபடுவது

என்ற கூற்றின் திருப்புக்கூற்று

q: ஒரு எண் 5ஆல் வகுபடுவது எனில் அது 10ஆல் வகுபடுவது.

ஒரு கூற்றின் மெய்மை அதன் திருப்புக்கூற்றின் மெய்மையைப்பற்றி ஒன்றும் சொல்லவில்லை என்பதை நோக்குக.

இப்போது, **புரட்டுக்கூற்று** என்பதை காண்போம். p *எனில்* q என்ற கூற்றின் புரட்டுக்கூற்று $\sim p$ எனில் $\sim q$. சான்றாக மேற்கண்ட கூற்றின் புரட்டு

r: ஒரு எண் 10ஆல் வகுபடவில்லை எனில் அது 5ஆல் வகுபடவில்லை.

உங்கள் சிந்தனைக்கு

ஒரு கூற்றின் புரட்டும் திருப்பும் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றுகள்.

சான்று 11 கீழ்க்காணும் கூற்றுகளின் திருப்புக்கூற்றுகளை எழுதுக.

(அ) n இரட்டைப்படை எனில் n^2 இரட்டைப்படை.

(ஆ) புத்தகத்திலுள்ள எல்லா பயிற்சிகளையும் செய்திருக்கிறாய் எனில் வகுப்பில் A தரவகையை வாங்குகிறாய்.

(இ) a, b என்ற இரண்டு முழுவெண்களுக்கு, $a > b$ எனில் $a - b$ நேர்மவெண்.

தீர்வு இவற்றின் திருப்புக்கூற்றுகள்:

(அ) n^2 இரட்டைப்படை எனில் n இரட்டைப்படை.

(ஆ) வகுப்பில் A தரவகையை வாங்குகிறாய் எனில் புத்தகத்திலுள்ள எல்லா பயிற்சிகளையும் செய்திருக்கிறாய்.

(இ) a, b என்ற இரண்டு முழுவெண்களுக்கு, $a - b$ நேர்மவெண் எனில் $a > b$.

சான்று 12 கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு கூட்டுக்கூற்றுக்கும், முதலில் கூற்றகைகளை அடையாளங்காண்க. பிறகு கூற்று மெய்யா பொய்யா என்று சரிபார்க்க.

(அ) முக்கோணம் ABC சமப்பக்கமானது எனில் அது இருசமப்பக்கமானது.

(ஆ) aயும் bயும் முழுவெண்கள் எனில் ab ஒரு விகிதமுறுவெண்.

தீர்வு (அ) கூற்றகைகள்

p: முக்கோணம் ABC சமப்பக்கமானது.

q: முக்கோணம் ABC இருசமப்பக்கமானது

ஒரு சமப்பக்க முக்கோணம் இருசமப்பக்க முக்கோணமும் ஆவதால், கூட்டுக்கூற்று மெய் என்று உய்த்துணர்கிறோம்.

(ஆ) கூற்றகைகள்

p: aயும் bயும் முழுவெண்கள்

q: ab ஒரு விகிதமுறுவெண்

இரண்டு முழுவெண்களின் பெருக்குத்தொகை முழுவெண் என்பதாலும் முழுவெண் விகிதமுறுவெண் என்பதாலும் கூற்று மெய் என்று அறிகிறோம்.

பயிற்சி 14.4

1. கீழ்க்காணும் எனிற்கூற்றை அதே பொருள்படும்படி ஐந்து வழிகளில் எழுதுக.
   ஒரு இயலெண் ஒற்றைப்படை எனில் அதன் வர்க்கமும் ஒற்றைப்படை.
2. கீழ்க்காணும் கூற்றுகளின் மாற்றுக்கூற்றையும் திருப்புக்கூற்றையும் எழுதுக.
   (அ) x பகாவெண் எனில் x ஒற்றைப்படை.

   (ஆ) ஒரு தளத்திலுள்ள இரண்டு கோடுகள் இணை எனில் அவை இடைவெட்டாதவை.

   (இ) ஒரு பொருள் குளிர்கிறது என்பது அது குறைந்த வெப்பநிலையுள்ளது என்பதை உள்ளுரைக்கிறது.

   (ஈ) பகுத்தறிவால் ஏரணிக்கத்தெரியாவிட்டால் வடிவியலை புரிந்துகொள்ளவியலாது.

   (உ) x இரட்டைப்படை என்பது x 4ஆல் வகுபடுவதை உள்ளுரைக்கிறது.
3. கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு கூற்றையும் 'எனில்' வடிவில் எழுதுக.
   (அ) உனக்கு வேலை கிடைக்கிறது என்பது உன் தகுதிகள் நல்லவை என்பதை உள்ளுரைக்கிறது.

   (ஆ) வாழைமரம் ஒரு மாதத்துக்கு வெதுவெதுப்பாக இருந்தால், அது பூக்கிறது.

(இ) ஒரு நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று சமவெட்டினால், அது இணைகரம்.

(ஈ) வகுப்பில் A பெற, புத்தகத்திலுள்ள எல்லா பயிற்சிகளையும் செய்வது தேவையானது.

4. கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு கூற்றுக்கும், அதன்கீழ் கொடுத்துள்ள கூற்றுகளிலிருந்து மாற்றுக்கூற்றையும் திருப்புக்கூற்றையும் சுட்டுக.

(அ) நீ தில்லியில் வசித்தால், உன்னிடம் குளிராடைகள் இருக்கின்றன.

(1) உன்னிடம் குளிராடைகள் இல்லை எனில் நீ தில்லியில் வசிக்கவில்லை.

(2) உன்னிடம் குளிராடைகள் இருந்தால், நீ தில்லியில் வசிக்கிறாய்.

(ஆ) ஒரு நாற்கரம் இணைகரம் எனில் அதன் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று சமவெட்டுகின்றன.

(1) ஒரு நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று சமவெட்டாவிட்டால், நாற்கரம் இணைகரம் அன்று.

(2) ஒரு நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்ற சமவெட்டினால், அது ஒரு இணைகரம்.

14.6 கூற்றுகளை ஏற்புடையதாக்கல்

இந்த பகுதியில், ஒரு கூற்று எப்போது மெய்யாகிறது என்று கருதுவோம். இந்தக்கேள்விக்கு விடைகாண, கீழ்க்காணும் எல்லாக்கேள்விகளுக்கும் விடைகாணவேண்டும்.

கூற்றின் பொருள் என்ன? இந்த கூற்று மெய்யாவதன் பொருள் என்ன? அது பொய்யாவதன் பொருள் என்ன?

இந்த கேள்வியின் விடை உம்மை, ஓகாரம் போன்ற எந்த இணைப்புச்சொற்கள் வருகின்றன என்பதையும் எனில் ஒவ்வொரு, இருக்கிறது போன்ற என்னென்ன உள்ளுரைப்பிகள் வருகின்றன என்பதையம் சார்ந்திருக்கிறது.

ஒரு கூற்று ஏற்புடையதா (மெய்யா) என்பதை தீர்மானிக்க சில பொதுவிதிகளை இங்கு பட்டியலிடுவோம்.

விதி 1 உம்மைக்கூற்றுகள் p, q என்பவை கூற்றுகள் என்க. 'pயும் qவும்' என்ற கூட்டுக்கூற்று மெய் என்றுகாட்டுவதற்கு

படி 1 p என்ற கூற்று மெய் என்று காட்டுக.

படி 2 q என்ற கூற்று மெய் என்று காட்டுக.

விதி 2 ஓகாரக்கூற்றுகள் p, q என்பவை கூற்றுகள் என்க. 'pயோ qவோ' என்ற கூட்டுக்கூற்று மெய்யா என்றுகாண கீழ்க்காணும் வேற்றுவங்களை கருதுக.

வேற்றுவம் 1 p பொய் என்றுகருதி, q மெய் என்றுகாண்க.

வேற்றுவம் 2 q பொய் என்றுகருதி, p மெய் என்றுகாண்க.

இவற்றுள் ஒன்று மெய்யாகவேண்டும்.

விதி 3 எனிற்கூற்றுகள் 'p எனில் q' என்று காட்ட, கீழ்க்காணும் இரண்டில் ஒன்றை நிறுவவேண்டும்.

வேற்றுவம் 1 p மெய் என்ற எடுகோளுடன், q மெய் என நிறுவுக (நேரடிமுறை).

வேற்றுவம் 2 q பொய் என்ற எடுகோளுடன், p பொய் என நிறுவுக (மாற்றுமுறை).

விதி 4 எனிலும் எனில் மட்டுமேயும் கூற்றுகள் 'p எனிலும் எனில் மட்டுமேயும் q' என்று காட்ட,

(அ) p மெய் எனில் q மெய்

(ஆ) q மெய் எனில் p மெய்

ஆகிய *இரண்டையும்* காட்டவேண்டும்.

சில சான்றுகளை காண்போம்.

சான்று 13 கீழ்க்காணும் கூற்று மெய்யா பொய்யா என்று காண்க.

$Z \ni x, y$ ஆகிய எண்களுக்கு, x, y ஒற்றைப்படை எனில் xy ஒற்றைப்படை.

தீர்வு p: $Z \ni x, y$ ஆகிய எண்களுக்கு x, y ஒற்றைப்படை.

q: xy ஒற்றைப்படை.

கொடுக்கப்பட்ட கூட்டுக்கூற்றின் ஏற்புடைமையை சரிபார்க்க, 3ஆம் விதியின் முதல் வேற்றுவத்தை பயனாக்குவோம். அதாவது p மெய் என்றுகொண்டு q மெய் என காணவேண்டும். இங்கு p மெய் என்பதன் பொருள் x, y ஒற்றைப்படை முழுவெண்கள். அப்படியெனில் $x = 2m + 1,\ y = 2n + 1$; இங்கு m, n ஏதோவிரு முழுவெண்கள். இவ்வாறிருக்க,

$$xy = (2m + 1)(2n + 1)$$

$= 2(2mn + m + n) + 1$

இது xy ஒற்றைப்படை என்று காட்டுகிறது. ஆகவே கூற்று மெய்.

இதையே 3ஆம் விதியின் இரண்டாம் வேற்றுவத்தாலும் சரிபார்க்கலாம். அதன்படி, q பொய் என்று கொள்வோம். இதற்காக, qவின் மறுக்கையை கருதவேண்டும்.

$\sim q: xy$ இரட்டைப்படை.

இது சாத்தியமாவதற்கு x ஓ y யோ இரட்டைப்படையாயிருக்கவேண்டும்.
அதாவது, p பொய். இவ்வாறு $\sim q \Rightarrow \sim p$ என்று காட்டியிருப்பதால், கூட்டுக்கூற்று மெய்.

குறிப்பு: $p \Rightarrow q$ என்று நிறுவ $\sim q \Rightarrow \sim p$ என்று நிறுவுவது போதுமானது என்பதை மேற்கண்ட சான்று காட்டுகிறது.

சான்று 14 மாற்றுக்கூற்றை பயன்படுத்தி கீழ்க்காணும் கூற்று மெய்யா பொய்யா என்று காண்க.

$Z \ni x, y$ ஆகிய எண்களுக்கு, xy ஒற்றைப்படை எனில் x உம் y உம் ஒற்றைப்படைகள்.

தீர்வு கூற்றுகைகளை கீழ்க்காணுமாறு பெயரிடுவோம்.

$p: xy$ ஒற்றைப்படை.

$q: x$உம் yஉம் ஒற்றைப்படைகள்

$p \Rightarrow q$ மெய்யா பொய்யா என்று காண அதன் மாற்றுக்கூற்றான $\sim q \Rightarrow \sim p$ என்பதை சரிபார்க்கவேண்டும்.

$\sim q: x$உம் yஉம் ஒற்றைப்படைகள் என்பது பொய். இது xஓ yயோ இரட்டைப்படை என்பதை உள்ளுரைக்கிறது. x இரட்டைப்படை எனில் n என்ற ஏதோவொரு முழுவெண்ணுக்கு $x = 2n$. ஆகவே $xy = 2ny$ என்பது xy இரட்டைப்படை என்று காட்டுகிறது. அதாவது $\sim p$ மெய். இவ்வாறு, $\sim q \Rightarrow \sim p$ என்று நாம் காண்பதால், கொடுத்த கூற்று மெய்.

இனி, ஒரு கூற்றையும் அதன் திருப்புக்கூற்றையும் சேர்ப்பதை கருதுவோம். கீழ்க்காணும் கூற்றுகளை கருதுக.

p: ஒரு குவளை பாதி காலியாகவுள்ளது.

q: ஒரு குவளை பாதி நிரம்பியுள்ளது.

முதற்கூற்று மெய்யெனில், இரண்டாங்கூற்று மெய் என்பதை நாம் அறிவோம். அதைப்போல் இரண்டாங்கூற்று மெய்யெனில் முதற்கூற்று மெய். இந்த இரண்டு கூற்றுகளையும் சேர்த்து

r: ஒரு குவளை பாதி காலியாகவுள்ளது எனிலும் எனில் மட்டுமேயும் அது பாதி நிரம்பியுள்ளது

என்ற கூட்டுக்கூற்றாக எழுதலாம். இனி, வேறொரு முறையை உரையாடுவோம்.

14.6.1 முரண்பாட்டால்

இங்கு, p என்ற கூற்று மெய்யா என்று காண, $\sim p$ பொய் என்று எடுகொண்டு, பிறகு நம் எடுகோளிலிருந்து முரண்படும் ஒரு முடிபை பெறுகிறோம். அதனால் p மெய் என்று முடிவுசெய்கிறோம்.

சான்று 15 முரண்பாட்டு முறையால்

$p: \sqrt{7}$ விகிதமுறாதது

என்று காண்க.

தீர்வு இந்த முறையில், கொடுத்துள்ள கூற்று பொய் என்று எடுகொள்வோம். அதாவது $\sqrt{7}$ விகிதமுறுவது என்று கொள்வோம். விகிதமுறுவது என்பதன் பொருள் $\sqrt{7} = a/b$ என்றவாறும் பொதுக்காரணி இல்லாதவையுமான a, b என்று இரண்டு முழுவெண்கள் இருக்கின்றன என்பது. இந்த சமன்பாட்டை வர்க்கமாக்கி

$$7 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 7b^2 \Rightarrow 7\ a\text{வை வகுக்கிறது}$$

என்று பெறுகிறோம். ஆகவே, $a = 7c$ என்றவாறு c என்ற ஒரு முழுவெண் இருக்கிறது. அப்படியெனில், $a^2 = 49c^2 \Rightarrow b^2 = 7c^2 \Rightarrow 7\ b$ஐ வகுக்கிறது. ஆனால் $7\ a$வை வகுக்கிறது என்று நாம் முன்பே கண்டதால், $7\ a$ க்கும் b க்கும் பொதுக்காரணியாகிறது. இது a, b பொதுக்காரணி இல்லாதவை என்ற நம் எடுகோளுடன் முரண்படுகிறது. ஆகவே $\sqrt{7}$ விகிதமுறுவது என்ற நம் எடுகோள் தவறு. $\sqrt{7}$ விகிதமுறாதது என்பது மெய்.

அடுத்ததாக, ஒரு கூற்று பொய் என்பதைக் காட்டும் ஒரு முறையை காண்போம். இந்த முறை *கூற்று பொய்யாகும் ஒரு நிலைமைக்கு ஒரு சான்று தருவதன்* அடிப்படையிலானது. அவ்வாறான சான்றை *எதிர்ச்சான்று* என்கிறோம். இது கூற்றை பொய்ப்பிப்பதற்கான ஒரு சான்று என்பதை பெயரிலிருந்தே அறிகிறோம்.

சான்று 16 ஒரு எதிர்ச்சான்றை வழங்குவதன் மூலம் கீழ்க்காணும் கூற்று பொய் என்று காட்டுக.

n ஒரு ஒற்றைப்படை முழுவெண் எனில் n ஒரு பகாவெண்.

தீர்வு கூற்று " p எனில் q " என்ற வடிவில் இருக்கிறது. இது பொய் என்று காட்ட வேண்டும். இதற்காக p எனில் $\sim q$ என்பதற்கு ஒரு சான்று காணவேண்டும். அதாவது பகாவெண் அல்லாத ஒரு ஒற்றைப்படை முழுவெண்ணை காணவேண்டும். 9 அத்தகைய ஒரு எண். ஆகவே $n = 9$ என்பது ஒரு எதிர்ச்சான்று. இதனால் கொடுத்துள்ள கூற்று பொய் என்று நிறுவுகிறோம்.

குறிப்பு கணிதத்தில் எதிர்ச்சான்றுகள் ஒரு கூற்றை பொய் என்று நிறுவ பயன்படுகின்றன. ஆனால் கூற்று மெய் எனக்காட்டும் ஒரு சான்றை காண்பது கூற்றை நிறுவ போதாது.

ஒரு கூற்று மெய்யா பொய்யா என்பதைக்காணும் சில செய்நுட்பங்களை மேல் உரையாடினோம்.

பயிற்சி 14.5

1. p: '$x^3 + 4x = 0$ என்றவாறு x ஒரு மெய்யெண் எனில் x சுழியம்' என்ற கூற்றை கீழ்க்காணும் முறைகளால் நிறுவுக. (அ) நேரடி முறை, (ஆ) முரண்பாட்டு முறை, (இ) மாற்றுக்கூற்று முறை.
2. a, b என்ற எந்த மெய்யெண்களுக்கும் $a^2 = b^2$ என்பது $a = b$ஐ உள்ளுரைக்கிறது' என்ற கூற்று பொய் என்பதற்கு ஒரு எதிர்ச்சான்று தருக.
3. கீழ்க்காணும் கூற்று மெய் என்று மாற்றுக்கூற்றுமுறையால் காட்டுக.

   p: x ஒரு முழுவெண், x^2 இரட்டைப்படை எனில் x இரட்டைப்படை.
4. எதிர்ச்சான்றுகள் தருவதன்மூலம் கீழ்க்காணும் கூற்றுகள் பொய் என்று காண்க.
   a. p: ஒரு முக்கோணத்தின் எல்லாக்கோணங்களும் சமம் எனில் அந்த முக்கோணம் ஒரு விரிகோணமுள்ள முக்கோணம்.
   b. q: $x^2 - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு 0த்துக்கும் 2க்குமிடையில் கிடக்கும் மூலம் இல்லை.
5. கீழ்க்கண்டவற்றில் எவை மெய், எவை பொய்? ஒவ்வொன்றுக்கும் தகுந்த காரணங்கூறுக.
   a. p: ஒரு வட்டத்தின் ஒவ்வொரு ஆரமும் அந்த வட்டத்தின் ஒரு நாண்.
   b. q: வட்டத்தின் மையம் வட்டத்தின் ஒவ்வொரு நாணையும் சமவெட்டுகிறது.
   c. r: வட்டம் நீளவட்டத்தின் ஒரு தனித்துவ வேற்றுவம்.
   d. s: $x > y$ என்றவாறு x, y இரண்டு முழுவெண்கள் $-x < -y$.
   e. t: $\sqrt{11}$ ஒரு விகிதமுறுவெண்.

பலவகைச்சான்றுகள்

சான்று 17 கீழ்க்காணும் கூட்டுக்கூற்றிலுள்ள ஓகாரம் சேர்ப்போகாரமா தவிர்ப்போகாரமா என்று காண்க. கூட்டுக்கூற்றின் கூற்றகைகளை எழுதி அவற்றை பயன்படுத்தி கூட்டுக்கூற்று மெய்யா என்று காண்க. உங்கள் விடைக்கு காரணங்கூறுக.

t: மழைபெய்யும்போதோ நீங்கள் ஆற்றிலிருக்கும்போதோ நனைகிறீர்கள்.

தீர்வு இங்கு ஓகாரம் சேர்ப்போகாரம். ஏனெனில் மழைபெய்யும்போது நீங்கள் ஆற்றிலிருக்க லாம். கூற்றகைகள்

p: மழைபெய்யும்போது நனைகிறீர்கள்.

q: ஆற்றிலிருக்கும்போது நனைகிறீர்கள்.

இங்கு இரண்டு கூற்றகைகளும் மெய். ஆகவே கூட்டுக்கூற்றும் மெய்.

சான்று 18 கீழ்க்காணும் கூற்றுகளின் மறுக்கைகளை எழுதுக.

(அ) p: x என்ற ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணுக் கும், $x^2 > x$.

(ஆ) q: $x^2 = 2$ என்றவாறு x என்ற ஒரு விகிதமுறுவெண் இருக்கிறது.

(இ) r: எல்லாப்பறவைகளுக்கும் சிறகுகள் இருக்கின்றன.

(ஈ) s: எல்லா மாணவர்களும் தொடக்கநிலை யில் கணிதம் படிக்கின்றனர்.

தீர்வு (அ) pயின் மறுக்கை p அன்று; அதாவது $x^2 > x$ என்பது எல்லா மெய்யெண்களுக்கும் மெய்யன்று. இதை

$\sim p$: $x^2 \le x$ என்றவாறு x என்ற ஒரு மெய்யெண் உள்ளது

என்று எழுதலாம்.

(ஆ) q வின் மறுக்கையை q அன்று என்றோ $\sim q$ என்றோ எழுதலாம். அதாவது $x^2 = 2$ என்றவாறு x என்ற ஒரு விகிதமுறுவெண் இல்லை. இதை

$\sim q$: x என்ற எல்லா விகிதமுறுவெண்களுக் கும், $x^2 \neq 2$

என்றும் எழுதலாம்.

(இ) கூற்றின் மறுக்கை

$\sim r$: சிறகுகள் இல்லாத ஒரு பறவை இருக்கிறது.

(ஈ) கூற்றின் மறுக்கை

$\sim s$: தொடக்கநிலையில் கணிதம் படிக்காத மாணவர் ஒருவர் இருக்கிறார்.

சான்று 19 'n என்ற ஒரு முழுவெண் ஒற்றைப்படை எனிலும் எனில் மட்டுமேயும் n^2 ஒற்றைப்படை' என்ற கூற்றை 'தேவையானதும் போதுமானதும்' என்று சொற்களை பயன்படுத்தி எழுதுக. கூற்று மெய்யா எனவும் காண்க.

தீர்வு n என்ற ஒரு முழுவெண் ஒற்றைப்படை என்பதற்கு n^2 ஒற்றைப்படை என்பது தேவையனதும் போதுமானதும்.

சரிபார்க்க, கூற்றகைகளை எழுதுவோம்.

p: n என்ற முழுவெண் ஒற்றைப்படை

q: n^2 ஒற்றைப்படை.

'p எனிலும் எனில் மட்டுமேயும் q' என்பதைக்காண, 'p எனில் q' என்பதையும் 'q எனில் p' என்பதையும் காணவேண்டும்.

வேற்றுவம் 1 p எனில் q

n என்ற முழுவெண் ஒற்றைப்படை எனில் n^2 ஒற்றைப்படை என்ற கூற்று மெய்யா என்று காணவேண்டும். n ஒற்றைப்படை என்று கொள்வோம். அப்படியெனில், ஏதோவொரு k என்ற முழுவெண்ணுக்கு $n = 2k + 1$. ஆகவே,

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

என்பதால், n^2 ஒரு இரட்டைப்படை யெண்ணைவிட ஒன்று அதிகமாயிருப்பதால் அது ஒற்றைப்படை.

வேற்றுவம் 2 q எனில் p

n^2 ஒற்றைப்படை எனில் n ஒற்றைப்படை என்பதைக்காண, இதன் மாற்றுக்கூற்றை கருதுவோம்; அதாவது n இரட்டைப்படை எனில் n^2 இரட்டைப்படை. n இரட்டைப்படை என்பது ஏதோவொரு k க்கு $n = 2k$ என்பதை உள்ளுரைக்கிறது. அப்படியெனில், $n^2 = 4k^2$; ஆகவே n^2 இரட்டைப்படை.

சான்று 20 கீழே கொடுத்த கூற்றிலிருந்து தேவையான கூற்றையும் போதுமான கூற்றையும் இனங்காண்க.

t: 80 கிமீ வேகத்துக்குமேல் வண்டி யோட்டுகிறீர்கள் எனில் அபராதம் விதிக்கப்பெறுவீர்கள்.

தீர்வு கூற்று $p \Rightarrow q$ என்க. அப்படியெனில் அதன் அகைகள்

p: 80 கிமீ வேகத்துக்குமேல் வண்டி யோட்டுகிறீர்கள்.

q: அபராதம் விதிக்கப்பெறுவீர்கள்.

இங்கு, q வுக்கு p போதுமானது. அதாவது அபராதம் விதிக்கப்பெறுவதற்கு 80 கிமீ வேகத்துக்குமேல் வண்டியோட்டுகிறீர்கள் என்பது போதுமானது. மேலும், pக்கு q தேவையானது; ஏனெனில் அபராதம் விதிக்கப்பட்டால் மட்டுமே 80 கிமீ வேகத்துக்குமேல் வண்டியோட்டுகிறீர்கள் என்ற முடிபை பெறலாம். (p எனினும் பிடிபட்டாலும் q என்ற நடைமுறையை இந்த கணிதக்கூற்று சொல்லவில்லை என்பதை நோக்குக. p எனில் (நிச்சயமாக) q என்கிறது. அதனால் pக்கு q தேவை.)

14ஆம் அலகுக்கான பலவகைப்பயிற்சிகள்

1. கீழ்க்காணும் கூற்றுகளின் மறுக்கைகளை எழுதுக.
   a. p: x என்ற ஒவ்வொரு நேர்ம மெய்யெண்ணுக்கும் $x - 1$ நேர்மம்.
   b. q: எல்லாப்பூனைகளும் பிராண்டுகின்றன.
   c. r: x என்ற ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணுக்கும் $x > 1$ என்பதோ $x < 1$ என்பதோ மெய்.
   d. s: $0 < x < 1$ என்றவாறு x என்ற ஒரு எண் உள்ளது.
2. கீழ்க்காணும் கூற்றுகளுள் ஒவ்வொன்றுக்கும் திருப்புக்கூற்றையும் மாற்றுக்கூற்றையும் கூறுக.
   a. p: ஒரு நேர்ம முழுவெண்ணுக்கு அதையும் 1ஐயும் தவிர வேறு வகுவெண் இல்லை எனில் மட்டுமே அது ஒரு பகாவெண்.
   b. q: என்றெல்லாம் வானம் வெளுத்திருக்கிறதோ அன்றெல்லாம் நான் கடற்கரைக்கு செல்கிறேன்.
   c. வானிலை வெப்பமாயிருந்தால் உனக்கு தாகமாயிருக்கும்.
3. கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு கூற்றையும் எனிற்கூற்றாக எழுதுக.
   a. p: சேவையரில் பதிகைபுக ஒரு கடவுச்சொல் இருப்பது அவசியம்.
   b. q: மழைபெய்யும்போதெல்லாம் போவரவுநெரிசல் இருக்கிறது.
   c. r: பங்குசேர்கட்டணத்தை செலுத்தினால் மட்டுமே இணையத்தளத்தை அணுகலாம்
4. கீழ்க்காணும் கூற்றுகளை p எனிலும் எனில் மட்டுமேயும் q என்ற வடிவில் எழுதுக.
   a. p: தொலைக்காட்சிபார்த்தால் மனம் வெறுமையாயிருக்கிறது; மனம் வெறுமையாயிருந்தால் தொலைக்காட்சிபார்க்கிறாய்.
   b. q: A என்ற தரவகையை பெறுவதற்கு எல்லாப்பயிற்சிகளையும் ஒழுங்காக செய்வது தேவையானதும்போதுமானதும்.
   c. r: ஒரு நாற்கரம் சமக்கோணங்களுள்ளதாயிருந்தால் அது ஒரு செவ்வகம்; ஒரு நாற்கரம் செவ்வகமாயிருந்தால் அது சமக்கோணங்களுள்ளது.
5. கீழ் இரண்டு கூற்றுகள் உள்ளன.

   p: 25 5இன் மடங்கு.

   q: 25 8இன் மடங்கு

   இந்த இரண்டு கூற்றுகளையும் உம்மையாலும் ஓகாரத்தாலும் சேர்த்து கூட்டுக்கூற்றாக எழுதுக. கூட்டுக்கூற்றுகளின் மெய்மையை காண்க.
6. கீழ்க்காணும் கூற்றுகளை அவற்றுடன் குறிப்பிட்ட முறைகளால் சரிபார்க்க.
   a. p: ஒரு விகிதமுறு எண்ணையும் விகிதமுறா எண்ணையும் கூட்டிய தொகை விகிதமுறாவெண் (முரண்பாட்டு முறை).
   b. q: n $n > 3$ என்றவாறான ஒரு மெய்யெண் எனில் $n^2 > 9$ (முரண்பாட்டு முறை).
7. கீழ்க்காணும் கூற்றை அதே பொருள் வருமாறு ஐந்து வெவ்வேறு வழிகளில் எழுதுக.

   ஒரு நாற்கரம் சமக்கோணமுள்ளது எனில் அது ஒரு விரிகோண முக்கோணம்.

சுருக்கவுரை

- மெய்யோ பொய்யோவான ஒரு சொற்றொடர் கணிதத்தில் ஏற்கத்தக்க ஒரு கூற்று.
- p ஒரு கூற்றைக்குறித்தால், அதன் மறுதலிப்பை $\sim p$ என்று குறிக்கிறோம்.
- ஒரு கூட்டுக்கூற்றில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட கூற்றகைகள் உள்ளன.
- கூட்டுக்கூற்றில் உம்மை, ஒகாரம், இருக்கிறது, ஒவ்வொரு ஆகிய சொற்களின் தனித்துவப்பொருளை அறிந்தோம்.
- எனில், எனில் மட்டும், எனிலும் எனில் மட்டுமேயும் என்ற தொடர்களை அறிந்தோம்.
- p எனில் q என்ற கூற்றை கீழ்க்கண்ட வழிகளிலும் எழுதலாம்

$$p \Rightarrow q$$

p qவை உள்ளுரைக்கிறது

p qவுக்கு போதுமானது

q pக்கு தேவையானது

q எனில் மட்டும் p

$$\sim q \Rightarrow \sim p$$

- $p \Rightarrow q$ என்ற கூற்றின்

மாற்றுக்கூற்று $\sim q \Rightarrow \sim p$

திருப்புக்கூற்று $q \Rightarrow p$

புரட்டுக்கூற்று $\sim p \Rightarrow \sim q$

- $p \Rightarrow q$ என்ற கூற்றும் அதன் திருப்புக்கூற்றும் உம்மையால் சேர்ந்து p எனிலும் எனில் மட்டுமேயும் q என்ற கூற்றை தருகின்றன. அதை $p \Leftrightarrow q$ என்று குறிக்கிறோம்.
- கூற்றுகளின் மெய்மையை சரிபார்க்க கீழ்க்கண்ட முறைகளை பின்பற்றுகிறோம்.

நேரடி முறை

மாற்றுக்கூற்று முறை

முரண்பாட்டு முறை

எதிர்ச்சான்று முறை

வரலாற்றுக்குறிப்பு

ஏரணத்தின் முதல் விரிவுரையை அரிசுட்டாட்டில் (கிமு 384-322) எழுதினார். பகுத்தறியும் ஏரணத்துவத்துக்காக அவர் எழுதிய விதிகளின் தொகுப்பு அறிவின் எல்லாத்துறைகளிலும் ஆய்வறிதலின் அடிப்படையாக திகழ்கிறது. பின்பு, பதினேழாம் நூற்றாண்டில், கா. வி. இலைபினிசு (1645-1716) என்ற செருமானிய கணிதவியலருக்கு ஏரண வருவித்தல்களை எளிதாக்க அடையாளங்களை பயன்படுத்தும் எண்ணம் தோன்றியது. அந்த எண்ணம் சார்சு பூல் (1815-1864), ஆகத்தசு தி மார்கன் (1806-1871) ஆகிய ஆங்கில கணிதவிலர்களால் நிறைவேறியது. இவர்களே அடையாள ஏரணம் என்ற இக்காலத்துறைக்கு அடிக்கல்லிட்டவர்கள்.