படலம் 15

புள்ளியியல்

15.1 அறிமுகம்

காரல் பியர்சன்
(1857-1936)

குறிப்பிட்ட நோக்கங்களுக்காக சேகரிக்கப்பட்ட தரவுகளை புள்ளியியல் கையாள்கிறது என்பதை நாமறிவோம். தரவுகளை பகுப்பாய்ந்தும் பொருளுணர்ந்தும் நாம் அவற்றின்மீது முடிவுகளை எடுக்கவியலும். முந்தைய வகுப்புகளில், தரவுகளை வரைபடமாகவும் அட்டவணைவடிவத்திலும் குறிப்பிடும் முறைகளை படித்தோம். இந்த குறிப்பீடு தரவுகளின் சில முக்கிய பண்புக்கூறுகளை (சிறப்பியல்புகளை) வெளிப்படுத்துகிறது. குறிப்பிட்ட தரவுகளுக்கான நிற்புமதிப்பை கண்டறியும் முறைகளைப்பற்றியும் படித்துள்ளோம். இம்மதிப்பை மையப்போக்கின் அளவம் என்று அழைக்கிறோம். இடைமம் (கூட்டிடைமம்), நடுமம், நிலமம் ஆகியவை மையப்போக்கின் மூன்று அளவங்கள். மையப்போக்கின் ஓரளவம் தரவுப்புள்ளிகள் எங்கு மையங்கொண்டுள்ளன என்பதைப்பற்றிய ஒரு தோராயமான கருத்தை நமக்கு வழங்குகிறது. ஆனால் தரவுகளிலிருந்து மேலும் பொருளுணர அவை எவ்வாறு சிதறியிருக்கின்றன என்பது தெரியவேண்டும். அதாவது, மையப்போக்கின் அளவத்தைச்சுற்றி எந்த அளவுக்கு குவிந்திருக்கின்றன என்பது தெரியவேண்டும்.

A, B என்ற இரண்டு மட்டையாளர்கள் பத்து போட்டிகளில் எடுத்த ஓட்டங்களை கருதலாம்:

$$A: 30, 91, 0, 64, 42, 80, 30, 5, 117, 71$$

$$B: 53, 46, 48, 50, 53, 58, 60, 57, 52$$

தரவுகளின் இடைமமும் நடுமமும் பின்வருமாறு இருப்பது தெளிவு.

	A	B
இடைமம்	53	53
நடுமம்	53	53

கண்டறிதல்களின் கூட்டுத்தொகையை அவற்றின் எண்ணிக்கையால் வகுப்பதன்மூலம் ஒரு தரவின் இடைமத்தை நாம் கணக்கிடுகிறோம் என்பதை நினைவில் கொள்க. (இடைமத்தை, $\bar{x}$ என்று குறிக்கிறோம்.) அதாவது,

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

மேலும், தரவுகளை முதலில் ஏறுவரிசையிலோ இறங்குவரிசையிலோ எழுதியபின் கீழ்க்காணும் விதியை பயன்படுத்தி அவற்றின் நடுமத்தை பெறுகிறோம்.

தரவுகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப்படை எனில் $(n+1)/2$ஆம் கண்டறிதலே நடுமம்.

தரவுகளின் எண்ணிக்கை இரட்டைப்படை எனில் $n/2$ஆம் கண்டறிதலுக்கும் $(n+1)/2$ஆம் கண்டறிதலுக்கும் நடுவிலுள்ள மதிப்பு நடுமம்.

மட்டையாளர்கள் Aயும் Bயும் பெற்ற ஓட்டங்களின் இடைமமும் நடுமமும் 53. இதிலிருந்து இந்த மட்டையாளர்களின் பந்தடிக்குந்திறன் சமம் என்று கூறவியலுமா? இல்லை என்பது தெளிவு; ஏனெனில், Aயின் ஓட்ட எண்ணிக்கைகளின் மாறுமை 0முதல் (மீச்சிறுமம்) 117வரை (மீப்பெருமம்) உள்ளது. ஆனால் B பெற்ற ஓட்டங்களின் வீச்சு 46முதல் 60வரையுள்ளது.

மேற்கண்ட ஓட்ட எண்ணிக்கைகளை நாம் ஒரு எண்கோட்டின்மீது புள்ளிகளாக வரையலாம். (படம் 15.1, படம் 15.2).

மட்டையாளர் A

படம் 15.1

மட்டையாளர் B

படம் 15.2

B பெற்ற ஓட்ட எண்ணிக்கைகளுக்கு நிகரான புள்ளிகள் ஒன்றுக்கொன்று அருகிலும், மையப்போக்கைச்சுற்றியே (இடைமமும் நடுமமும்) திரண்டுமுள்ளன. அதே நேரத்தில் Aக்கான மேற்கண்ட புள்ளிகள் சிதறுண்டும் அதிகமாக விரிந்தும் காணப்படுகின்றன.

இப்படியாக, கொடுத்துள்ள தரவுகளைப் பற்றிய முழுமையான தகவல்களைத்தர அவற்றின் மையப்போக்குகளின் அளவீடுகள் போதவில்லை.

புள்ளியியலின்கீழ் படிக்கவேண்டிய மற்றொரு காரணி மாறுமை. மையப்போக்கின் அளவீடுகளைப்போலவே மாறுமையை விவரிக்கவும் ஒரு ஒற்றை எண் வேண்டும். இந்த ஒற்றையெண் விரிகையின் அளவீடு. இந்த படலத்தில், விரிகையின் சில முக்கிய அளவீடுகளைப்பற்றியும் தொகுதரவுகளுக்கும் விரிதரவுகளுக்கும் அவற்றின் மதிப்புகளை கணக்கிடும் முறைகளையும் கற்போம்.

15.2 விரிகையின் அளவீடுகள்

தரவுகளின் சிதறலை, அதாவது விரிகையை, கண்டறிதல்களின் அடிப்படையிலும் அவற்றின் மையப்போக்கை அளக்க பயன்படுத்திய அளவீட்டின் அடிப்படையிலும் அளக்கிறோம். கீழ்க்கண்டவை விரிகையளவீடுகள்:

(i) வீச்சு (ii) கான்மானவிலகல் (iii) இடைமவிலகல் (iv) செந்தரவிலகல்.

இந்த அலகில், கான்மானவிலகலைத்தவிர மேற்கண்ட எல்லா விரிகையளவீடுகளைப் பற்றியும் கற்போம்.

15.3 வீச்சு

A , B என்ற இரு மட்டையாளர்கள் எடுத்த ஓட்டங்களைப்பற்றிய எடுத்துக்காட்டை நினைவு கூர்வோம். ஒவ்வொரு தொடரிலும் மீச்சிறுமம், மீப்பெருமம் ஆகியவற்றின் அடிப்படையில் ஓட்டங்களில் காணப்பட்ட மாறுமைபற்றிய சில கருத்துக்களை அறிந்தோம். இதற்கான ஒற்றை எண்ணை பெற, ஒவ்வொரு தொடரிலும் மீப்பெருமத்துக்கும் மீச்சிறுமத்துக்குமான வேறுபாட்டை காண்கிறோம். இதை தரவின் வீச்சுஎன்கிறோம்.

A யின் வேற்றுவத்தில், வீச்சு $= 117 - 0 = 117$.

Bக்கான வீச்சு$= 60 - 46 = 14$.

இவற்றிலிருந்து Aயின் வீச்சு Bயின் வீச்சைவிட அதிகம் என்பது தெளிவாகிறது. Aயின் வீச்சு $>$ Bயின் வீச்சு. எனவே, Aயைப் பொறுத்தவரை ஓட்ட எண்ணிக்கைகள் சிதறி, அதாவது விரிந்து, காணப்படுகிறன; Bயின் தரவுகள் ஒன்றுக்கொன்று அருகில் உள்ளன. இவ்வாறாக,

ஒரு தொடரின் வீச்சு = மீப்பெரும மதிப்பு – மீச்சிறும மதிப்பு.

ஒரு தரவின் வீச்சு சிதறலைப்பற்றிய, அதாவது மாறுமையைப்பற்றிய, ஒரு தோராயமான கருத்தை தருகிறது; ஆனால், மையப்போக்கின் அளவீட்டிலிருந்து தரவின் விலகலைப்பற்றி அது எதுவும் சொல்லவில்லை. இதற்காக மற்றொரு மாறுமையளவீடு தேவை. இந்த அளவீடு நிச்சயமாக மையப்போக்கின் அளவீட்டிலிருந்து மதிப்புகள் வேறுபடுவதை அதாவது விலகுவதை சார்ந்திருக்கவேண்டும். அவ்வாறான முக்கியமான விரிகையின் அளவீடுகள் இடைமவிலகலும் செந்தரவிலகலும்.

15.4 இடைமவிலகல்

a என்ற ஒரு நிலையான மதிப்பிலிருந்து x என்ற கண்டறிதலின் விலகல், $(x - a)$ எனும் வேறுபாடு என்பதை நினைவுகொள்க. மைய மதிப்பான aஇலிருந்து xமதிப்புகளின் விரிகையை கண்டறிய, aயிலிருந்து xமதிப்புகளின் விலகல்களை காண்கிறோம். இந்த விலகல்களின் இடைமம் சிதறலின் ஒரு ஒப்பிலா அளவீடு. இடைமத்தை காண விலகல்களின் கூட்டுத்தொகையை பெறவேண்டும். ஆனால், மையப்போக்கின் அளவீடு ஒரு கண்டறிதற் கணத்தின் மீப்பெருமத்துக்கும் மீச்சிறுமத்துக்கு மிடையில் இருப்பதை அறிவோம். எனவே, சில விலகல்கள் எதிர்மமாகவும், சில நேர்மமாகவும் இருக்கின்றன. இடைமத்தைப்பற்றிய ($\bar{x}$ஐப்பற்றிய) விலகல்களின் கூட்டுத்தொகை சுழியமாவதை நீங்கள் சரிபார்க்கலாம். இதனால் விலகல்களின் இடைமமும் சுழியமாகிறது.

$$\text{விலகல்களின் இடைமம்} = \frac{\text{விலகல்களின் கூட்டுத்தொகை}}{\text{கண்டறிதல்களின் எண்ணிக்கை}} = {}^{0}/_{n} = 0$$

இவ்வாறு, சிதறலின் அளவீட்டைப்பொறுத்த மட்டில், கண்டறிதல்களின் இடைமத்தைப் பற்றிய விலகல்களின் இடைமம் நமக்கு பயனளிக்கவில்லை.

மையப்போக்கின் பொருத்தமான அளவீட்டைப்பெற, மையப்போக்கிலிருந்தோ a என்ற வேறொரு நிலையான எண்ணிலிருந்தோ ஒவ்வொரு கண்டறிதலின் மதிப்பின் தொலைவும் நமக்கு தேவை. ஒரு எண்கோட்டில் குறியிடும்போது, இரு எண்களுக்கிடையான வேறுபாட்டின் மட்டுமதிப்பு அவற்றுக்கிடையான தொலைவை தருகிறது. எனவே, a என்ற ஒரு நிலையான எண்ணிலிருந்து சிதறலின் அளவீட்டை காண, மையமதிப்பிலிருந்து விலகல்களின் மட்டுமதிப்புகளின் இடைமத்தை எடுத்துக்கொள்ளலாம். இந்த இடைமத்தை *இடைமவிலகல்* என்று அழைக்கின்றோம். இப்படியாக, a என்ற மையமதிப்பைப்பற்றிய இடைமவிலகல் a யிலிருந்து கண்டறிதல்களின் விலகல்களின் மட்டுமதிப்புகளின் இடைமம். aஇலிருந்து விலகல்களின் இடைமத்தை இவி(a) என்று குறிக்கிறோம். எனவே,

இவி(a)

$= \dfrac{a\text{யிலிருந்து மட்டுமதிப்பு விலகல்களின் கூட்டல்}}{\text{கண்டறிதல்களின் எண்ணிக்கை}}$

குறிப்பு மையப்போக்கின் எந்த ஒரு அளவீட்டிலிருந்தும் இடைமவிலகலை பெறலாம். எனினும், இடைமத்திலிருந்தும், நடுமத்திலிருந்தும் முறையே பெறப்படும் இடைமவிலகல்களான இவி$(\bar{x})$, இவி(M) ஆகியவற்றை புள்ளியியப்படிப்பிலும் ஆய்வுகளிலும் பொதுவாக பயன்படுத்துகிறோம்.

பல்வேறுவகையான தரவுகளிலிருந்து இடைமத்தைப்பற்றியும் நடுமத்தைப்பற்றியுமான இடைமவிலகல்களை எவ்வாறு கணக்கிடுவது என்பதைப்பற்றி இப்போது நாம் கற்கலாம்.

15.4.1 விரிதரவுகளுக்கான இடைமவிலகல்கள்

n கண்டறிதல்களின் மதிப்புகள் $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ என்க. இடைமத்தைப்பற்றியும் நடுமத்தைப் பற்றியுமான இடைமவிலகல்களின் கணக்கீடுகளில் கீழ்க்காணும் 4 படிகள் உள்ளன.

படி 1 எந்த மையப்போக்கின் அளவீட்டைப் பற்றிய இடைமவிலகலை கண்டுபிடிக்கிறோமோ அந்த அளவீட்டை முதலில் கணக்கிடுக. அதை a என்போம்.

படி 2 a யிலிருந்து ஒவ்வொரு x_i யின் விலகலையும், அதாவது, $x_1 - a, x_2 - a, x_3 - a, \ldots, x_n - a$ ஆகியவற்றை, கணக்கிடுக

படி 3 விலகல்களின் மட்டுமதிப்புகளான

$$|x_1 - a|, |x_2 - a|, |x_3 - a|, \ldots, |x_n - a|$$

ஆகியவற்றை கணக்கிடுக. அதாவது, எதிர்மக்குறி ஏதேனும் இருந்தால் அதை நீக்குக.

படி 4 விலகல்களின் மட்டுமதிப்புகளின் இடைமத்தை காண்க. இந்த இடைமமே a யைப்பற்றிய இடைமவிலகல். அதை இடைமவிலகல் (a) என்று குறிக்கிறோம்.

$$\text{இவி}(a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - a|$$

குறிப்பாக

$$\text{இவி}(\bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|, \quad \text{இங்கு } \bar{x} \text{ இடைமம்}$$

$$\text{இவி}(M) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - M|, \quad \text{இங்கு } M \text{ நடுமம்}$$

குறிப்பு இந்த படலத்தில், மாற்றிக்கூறாவிட்டால், M எனும் குறியீடு நடுமத்தை குறிக்கும். கீழ்க்காணும் சான்றுகளில், மேற்சொன்ன படிகளை எடுத்துக்காட்டுவோம்.

சான்று 1 கீழ்க்காணும் தரவுகளுக்கு இடைமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகலை காண்க.

6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

தீர்வு: மேற்சொன்ன படிகளை கீழ்க்காணுமாறு செயலாக்கி விடையை பெறுகிறோம்.

படி 1: தரவுகளின் இடைமம்

$$\bar{x} = \frac{(6+7+10+12+13+4+8+12)}{8}$$
$$= 9$$

படி 2: கண்டறிதல்களின் இடைமத்தைப் பற்றிய விலகல்கள் $x_i - \bar{x}$

$= \{6\text{-}9, 7\text{-}9, 10\text{-}9, 12\text{-}9, 13\text{-}9, 4\text{-}9, 8\text{-}9, 12\text{-}9\}$

படி 3: விலகல்களின் மட்டுமதிப்புகள், $|x_i - \bar{x}| = \{3, 2, 1, 3, 4, 5, 1, 3\}$

படி 4: இடைமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகல்

$$\text{இவி}(\bar{x}) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}|x_i - \bar{x}|$$
$$= \frac{3+2+1+3+4+5+1+3}{8} = \frac{22}{8} = 2.75$$

குறிப்பு ஒவ்வொரு முறையும் படியெண்களை குறிப்பிடாமல் கணக்கீடுகளை செய்யலாம்.

சான்று 2 கீழ்க்காணும் தரவுக்கு இடைமத்தைப் பற்றிய இடைமவிலகலை காண்க: 12, 3, 18, 17, 4, 9, 17, 19, 20, 15, 8, 17, 2, 3, 16, 11, 3, 1, 0, 5

தீர்வு முதலில் தரவுகளின் இடைமத்தை $(\bar{x})$ காணவேண்டும்.

$$\bar{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{n}x_i = \frac{200}{20} = 10$$

விலகல்களின் மட்டுமதிப்புகள், அதாவது $|x_i - \bar{x}|$, முறையே 2, 7, 8, 7, 6, 1, 7, 9, 10, 5, 2, 7, 8, 7, 6, 1, 7, 9, 10, 5. எனவே,

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}| = 124$$

$$\text{இவி}(\bar{x}) = \frac{124}{20} = 6.2$$

சான்று 3 கீழ்க்காணும் தரவுகளுக்கு நடுமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகலை காண்க: 3, 9, 5, 3, 12, 10, 18, 4, 7, 19, 21.

தீர்வு இங்கு கண்டறிதல்களின் எண்ணிக்கை 11. இது ஒரு ஒற்றைப்படை எண். தரவுகள் ஏறுவரிசையில் 3, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 18, 19, 21.

எனவே, நடுமம் $(M) = (11+1)/2$ ஆம், அதாவது, 6ஆம் கண்டறிதல். அதாவது, நடுமம்=9.

நடுமத்திலிருந்து விலகல்களின் மட்டுமதிப்புகளான $|x_i - M|$ முறையே 6, 6, 5, 4, 2, 0, 1, 3, 9, 10, 12. எனவே,

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i - M| = 58$$

$$\text{இவி}(M) = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{n}|x_i - M| = \frac{58}{11} = 5.27$$

15.4.2 தொகுதரவுகளில் இடைமவிலகல்கள்

தரவுகளை இரு வழிகளில் தொகுக்கலாம் என்று அறிவோம். அவை (அ) உதிரிநிகழ்வெண் பரவல். (ஆ) தொடர்நிகழ்வெண்பரவல்.

இந்த இருவகையான தரவுகளுக்கும் இடைமவிலகல்களைக்காணும் முறைகளை உரையளிப்போம்.

(அ) உதிரிநிகழ்வெண்பரவல்

நாம் கருதும் தரவுகளில் n தனிப்பட்ட மதிப்புகள் முறையே, f_1 , f_2 , … , f_n ஆகிய நிகழ்வெண்களுடன் இருப்பதாக கொள்வோம். இத்தரவுகளை கீழ்க்காணுமாறு அட்டவணை வடிவத்தில் குறிப்பிட்டு, இதை *உதிரிநிகழ்வெண்பரவல்* என்கிறோம்.

x : x_1 x_2 x_3 … x_n

f : f_1, f_2 f_3 … f_n

இடைமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகல்

முதலில், தரவுகளின் இடைமத்தை கீழ்க்காணும் வாய்ப்பாட்டால் காண்கிறோம்.

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

இங்கு $\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ ஒவ்வொரு கண்டறிதலாகிய x_iஐ அதன் நிகழ்வெண்ணாகிய f_iயால் பெருக்கி எல்லா கண்டறிதல்களுக்கும் கூட்டிய கூட்டுத் தொகை:, $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ நிகழ்வெண்களின் கூட்டல்..

பிறகு, கண்டறிதல்களிலிருந்து இடைமத் தின் விலகல்களையும் அவற்றின் மட்டுமதிப்பு களையும் காண்கிறோம். அதாவது, $|x_i - \overline{x}|$ ஐ எல்லா $i = 1, 2, \ldots, n$க்கும் காண்கிறோம்.

அதன்பின், விலகல்களின் இடைமத்தை காண்கிறோம். இதுவே தேவையான இடைமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகல்.

$$\text{இவி}(\overline{x}) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \overline{x}|\right)}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \overline{x}|$$

நடுமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகல்

நடுமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகலை காண, முதலில் கொடுத்துள்ள நிகழ்வெண்க ளின் பரவலின் நடுமத்தை காண்கிறோம். இதற்காக கண்டறிதல்களை ஏறுவரிசையில் அடுக்குகிறோம். பிறகு, திரட்டுநிகழ்வெண்களை பெறுகிறோம். அதன்பிறகு, எந்த கண்டறிதலின் திரட்டு நிகழ்வெண் $N/2$க்கு சமமாகவோ அதற்குச்சற்றே பெரியதாகவோ உள்ளதோ ($N =$ நிகழ்வெண்களின் கூட்டுத்தொகை), அந்த கண்டறிதலை அடையாளங்காண்கிறோம். இதன் மதிப்பு தரவுகளின் நடுவில் உள்ளதால், இதுவே நமக்குத்தேவையான நடுமம். நடுமத்தை கண்டபின், நடுமத்திலிருந்து விலகல்களின் மட்டுமதிப்புகளின் இடைமத்தை பெறுகிறோம். இவ்வாறு பெற்ற நடுமத்தை கீழ்க்காணும் சமன்பாட்டில் இட்டு, இவி(M)ஐ பெறலாம்.

$$\text{இவி}(M) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - M|$$

சான்று 4: கீழ்க்காணும் தரவுகளுக்கு இடைமத் தைப்பற்றிய இடைமவிலகலை காண்க.

x_i: 2, 5, 6, 8, 10, 12; f_i: 2, 8, 10, 7, 8, 5

தீர்வு: கொடுத்துள்ள தரவுகளை ஒரு அட்டவணையில் (அட்டவணை 15.1) பதிந்து கொண்டு. கணக்கீடுகளுக்கு தேவையானபடி மற்ற நெடுக்கைகளை சேர்ப்போம்.

அட்டவணை 15.1

x_i	f_i	$f_i x_i$	$\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	$f_i\lvert x_i - \overline{x}\rvert$
2	2	4	5.5	11
5	8	40	2.5	20
6	10	60	1.5	15
8	7	56	0.5	3.5
10	8	80	2.5	20
12	5	60	4.5	22.5
	40	300		92

$$N = \sum_{i=1}^{6} f_i = 40, \qquad \sum_{i=1}^{6} f_i x_i = 300$$

எனவே

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} f_i x_i = \frac{1}{40} \times 300 = 7.5$$

$$\sum_{i=1}^{6} f_i |x_i - \overline{x}| = 92$$

$$\text{இவி}(\overline{x}) = \frac{1}{N}\sum_{(i=1)}^{6} f_i |x_i - \overline{x}| = \frac{1}{40} \times 92 = 2.3$$

சான்று 5 கீழ்க்கண்ட தரவுகளுக்கான இவி(M)ஐக் காண்க.

x_i	3	6	9	12	13	15	21	22
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3

தீர்வு தரவுகள் **ஏற்கெனவே** ஏறுவரிசையில் உள்ளன. கண்டறிதல்களின் திரட்டுநிகழ் வெண்களுக்கான ஒரு கிடக்கையை மேலும் சேர்த்தால், அட்டவணை 15.2ஐ பெறுகிறோம்.

அட்டவணை 15.2

x_i	3	6	9	12	13	15	21	22
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3
திநி	3	7	12	14	18	23	27	30

$N = 30$. இது இரட்டைப்படையெண். எனவே, 15ஆம் கண்டறிதலுக்கும் 16ஆம் கண்டறிதலுக்கும் நடுவில் இருப்பதே நடுமம். இந்த இரு கண்டறிதல்களும் திரட்டுநிகழ்

வெண் 18 என்ற பதிகையில் கிடக்கின்றன. அதற்குரிய கண்டறிதலின் மதிப்பு 13.

எனவே நடுமம் 13க்கும் 13க்கும் நடுவில் இருக்கிறது. அதாவது நடுமம் 13.

அடுத்ததாக, நடுமத்திலிருந்து விலகல்களின் மட்டுமதிப்புகளை கணக்கிடுகிறோம். இவற்றை அட்டவணை 15.3 காட்டுகிறது.

அட்டவணை 15.3

$\lvert x_i - M\rvert$	10	7	4	1	0	2	8	9
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3
$f_i\lvert x_i - M\rvert$	30	28	20	2	0	10	32	27

அதிலிருந்து

$$N = \sum_{i=1}^{8} f_i = 30, \qquad \sum_{i=1}^{8} f_i\lvert x_i - M\rvert = 149$$

என்பதை பெறுகிறோம். எனவே,

$$\text{இவி}(M) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{8} f_i\lvert x_i - M\rvert = \frac{1}{30} \times 149 = 4.97$$

(ஆ) தொடர்நிகழ்வெண்பரவல்

ஒரு தொடர்நிகழ்வெண்பரவலில் இடைவிடாமல் தொடரும் இடைவெளிகளில் வகைப்படுத்திய தரவுகளும் அவற்றுக்கு நிகரான நிகழ்வெண்களும் இருக்கின்றன.

சான்றாக, 100 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களை ஒரு தொடர்நிகழ்வெண்பரவலாக கீழ்க்காணுமாறு வழங்குகிறோம்.

பெற்ற மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
$0 - 10$	12
$10 - 20$	18
$20 - 30$	27
$30 - 40$	20
$40 - 50$	17
$50 - 60$	6

இடைமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகல்

ஒரு தொடர்நிகழ்வெண்பரவலுக்கான இடைமத்தை கணக்கிடும்போது ஒவ்வொரு வகுப்பின் நிகழ்வெண்ணும் அதன் மையப் புள்ளிக்கு நிகராவதாக கொள்கிறோம்.. இங்கும், கொடுத்துள்ள ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் மையப் புள்ளியை எழுதி ஒரு உதிரிநிகழ்வெண்பரவலில் செய்ததுபோலவே இடைமவிலகலை காணலாம்.

சான்று 6. கீழ்க்காணும் தரவுகளுக்கான இடைமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகலை காண்க.

பெற்ற மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
$10 - 20$	2
$20 - 30$	3
$30 - 40$	8
$40 - 50$	14
$50 - 60$	8
$60 - 70$	3
$70 - 80$	2

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளிலிருந்து கீழ்க்காணும் அட்டவணை 15.4ஐ ஆக்குகிறோம்.

அட்டவணை 15.4

	f_i	x_i	$f_i x_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
$10 - 20$	2	15	30	30	60
$20 - 30$	3	25	75	20	60
$30 - 40$	8	35	280	10	80
$40 - 50$	14	45	630	0	0
$50 - 60$	8	55	440	10	80
$60 - 70$	3	65	195	20	60
$70 - 80$	2	75	150	30	60
	40		1800		400

$$N = \sum_{i=1}^{7} f_i = 40, \qquad \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 1800,$$

எனவே,

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = \frac{1800}{40} = 45$$

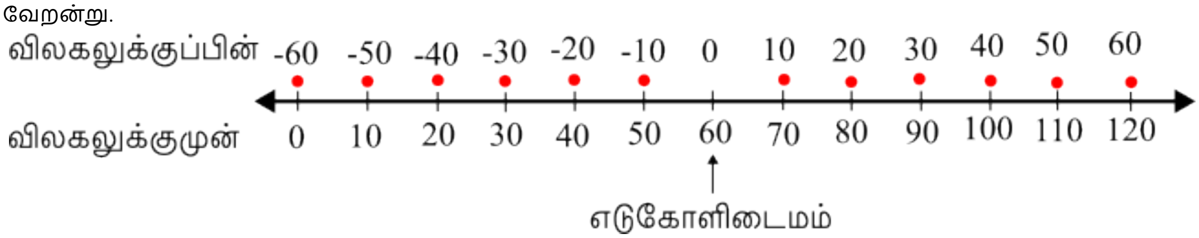
$$\sum_{i=1}^{7} f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert = 400$$

$$\text{இவி }(\bar{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert = \frac{1}{40} \times 400 = 10$$

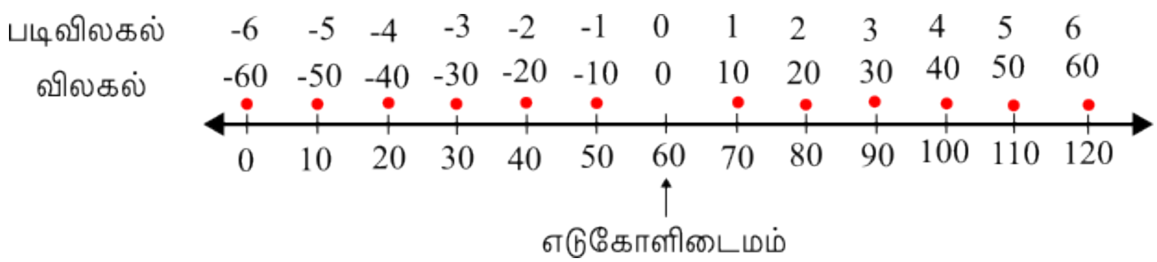
இடைமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகலை கணக்கிட ஒரு குறுக்குவழி:

படிவிலகன்முறையை பின்பற்றி $\bar{x}$ஐ கணிக்கும் கணக்கீடுகளை தவிர்க்கலாம். இந்த முறையில், தரவுகளின் மையத்திலோ மையத்துக்கு மிக அருகிலோ உள்ள ஒரு மதிப்பை எடுகோளிடைமமாக எடுக்கிறோம் என்பதை நினைவுகொள்க. இதனால், கண்டறிதல்களின் விலகல்களையோ வகுப்புகளின் மையப்புள்ளிகளின் விலகல்களையோ எடுகோளிடைமத்திலிருந்து எடுக்கிறோம். இது படம் 15.3இல் காட்டிய படி, எண்கோட்டில் மூலத்தை சுழியத்திலிருந்து

எடுகோளிடைமத்துக்கு இடம்பெயர்ப்பதன்றி வேறன்று.



படம் 15.3



படம் 15.4

எல்லா விலகல்களுக்கும் ஒரு பொதுக் காரணி இருந்தால், அவற்றை இதனால் வகுத்து விலகல்களை மேலும் எளிமையாக்கலாம். இவற்றை படிவிலகல்கள் என்று அழைக்கிறோம். படிவிலகல்களை எடுக்கும் வழிமுறை படம் 15.4இல் காட்டியபடி எண்கோட்டில் அளவத்தை மாற்றுவதன்றி வேறன்று.

விலகல்களும் படிவிலகல்களும் கண்டறிதல் களின் அளவை குறைத்து, பெருக்கல் முதலிய கணிக்கீடுகளை எளிமையாக்குகின்றன. புதிய மாறியை $d_i = (x_i - a)/h$ என்று வைப்போம். இங்கு, a எடுகோளிடைமம்;; h பொதுக்காரணி. அப்படியெனில், படிவிலகன்முறைப்படி

$$\text{இடைமம் } \overline{x} = a + \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i d_i\right) \times h$$

என்றாகிறது.

சான்று 6இன் தரவுகளை எடுத்து, படிவிலகன் முறைப்படி இடைமவிலகலை கணக்கிடுவோம்.

எடுகோளிடைமத்தை $a = 45$ என்றும் $h = 10$ என்றும் எடுத்து அட்டவணை 15.5ஐ ஆக்குகிறோம்.

அட்டவணை 15.5

பெற்ற மதிப்பகள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை, f_i	நடுப்புள்ளி, x_i	$d_i = \frac{x_i - 45}{10}$	$f_i d_i$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \overline{x} \rvert$
10-20	2	15	-3	-6	30	60
20-30	3	25	-2	-6	20	60
30-40	8	35	-1	-8	10	80
40-50	14	45	0	0	0	0
50-60	8	55	1	8	10	80
60-70	3	65	2	6	20	60
70-80	2	75	3	6	30	60
	40			0		400

எனவே,

$$\overline{x} = a + \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{7} f_i d_i\right) \times h = 45 + \frac{0}{40} \times 10 = 45$$

$$\text{இவி}(\overline{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i \lvert x_i - \overline{x} \rvert = \frac{400}{40} = 10$$

குறிப்பு இடைமமான $\overline{x}$ஐ கணக்கிட படிவில கன்முறையை பயனாக்குகிறோம். செய்மு றையின் மற்றப்படிகள் முன்பிருந்தவாறே.

நடுமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகல்

தொடர்நிகழ்வெண்பரவலில் நடுமத்தைப் பற்றிய இடைமவிலகலைக்காணும் முறை இடைமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகலைக் காணும் முறையைப்போன்றதே. ஒரே வேறுபாடு

என்னவென்றால், விலகல்களை கணக்கிடும் போது இடைமத்துக்குப்பதிலாக நடுமத்தை பயன்படுத்து கிறோம்.

தொடர்நிகழ்வெண்பரவலில் நடுமத்தை காணும் செய்முறையை நினைவுகொள்வோம்.

முதலில் தரவுகளை ஏறுவரிசையில் அடுக்கி, நடுமம் எந்த வகுப்பில் விழுகிறது (நடுமவகுப்பு) என்பதை காண்கிறோம். நிகழ்வெண்களின் கூட்டுத்தொகை N எனில் எந்த வகுப்பின் இடைவெளியில் திரட்டுநிகழ்வெண் $N/2$க்கு சமமாகவோ சற்றே அதிகமாகவோ இருக்கிறதோ அதுவே நடுமவகுப்பு. பிறகு கீழ்க்காணும் வாய்ப்பாட்டை பயன்படுத்தி நடுமத்தை பெறுகிறோம்.

$$\text{நடுமம்} = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$$

இங்கு, l , f , h ஆகியவை நடுமவகுப்பின் முறையே கீழெல்லை, நிகழ்வெண், அகலம் ஆகியவை; C நடுமவகுப்புக்கு முந்திய வகுப்பின் திரட்டுநிகழ்வெண்.

நடுமத்தை கண்டுபிடித்தபின், நடுமத்தி லிருந்து ஒவ்வொரு வகுப்பின் மையப்புள்ளியின் விலகலின் மட்டுமதிப்பை, அதாவது $|x_i - M|$களை பெற்று, இதிலிருந்து இடைமவிலகலை

$$\text{இவி}(M) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - M|$$

என்றவாறு காண்கிறோம். இந்த செய்முறையை கீழ்க்கண்ட சான்றால் எடுத்துக்காட்டுவோம்.

சான்று 7 கீழ்க்கண்ட தரவுகளில் நடுமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகலை கணக்கிடுக.

வகுப்பு	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
நிகழ்வெண்	6	7	15	16	4	2

தீர்வு கொடுத்த தரவுகளிலிருந்து அட்டவணை 15.6ஐ கட்டுமானிப்போம்.

அட்டவணை 15.6

வகுப்பு	நிகழ்வெண் (f_i)	திரட்டுநிகழ்வெண்	நடுப்புள்ளி (x_i)	$\lvert x_i - \text{நடுமம்} \rvert$	$fi \lvert x_i - \text{நடுமம்} \rvert$
$0 - 10$	6	6	5	23	138
$10 - 20$	7	13	15	13	91
$20 - 30$	15	28	25	3	45
$30 - 40$	16	44	35	7	112
$40 - 50$	4	48	45	17	68
$50 - 60$	2	50	55	27	54
	50				508

${}^{N}\!/_{2} = 25$ என்பதால், 25ஆம் உருப்படி இருக்கும் வகுப்பை காணவேண்டும். இந்த நடுமவகுப்பு 20-30 என்பதை அட்டவணையின் திரட்டுநிகழ்வெண் என்ற நெடுக்கையிலிருந்து காண்கிறோம். நடுமத்தைக்கணக்கிடும்

$$\text{நடுமம்} = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$$

என்ற வாய்ப்பாட்டில், இங்கு $l = 20, C = 13, f = 15, h = 10, N = 50.$ எனவே

$$\text{நடுமம்} = 20 + \frac{25 - 13}{15} \times 10 = 20 + 8 = 28$$

நடுமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகல்

$$\text{இவி}(M) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{6} f_i |x_i - M| = \frac{1}{50} \times 508 = 10.16$$

பயிற்சி 15.1

1,2 ஆகியவற்றில் இடைமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகலை காண்க.

1. 4, 7, 8, 9 10, 12, 13, 17
2. 38, 70, 48, 40, 42, 55, 63, 46, 54, 44

3, 4 ஆகியவற்றில் நடுமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகலை காண்க.

3. 13, 17, 16, 14, 11, 15, 10, 16, 11, 18, 12, 17
4. 36, 72, 46, 42, 60, 45, 53, 46, 51, 49

5, 6, ஆகியவற்றில் இடைமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகலை காண்க.

5.

x_i	5	10	15	20	25
f_i	7	4	6	3	5

6.

x_i	10	30	50	70	90
f_i	4	24	28	16	8

7, 8 ஆகியவற்றில் நடுமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகலை காண்க.

7.

x_i	5	7	9	10	12	15
f_i	8	6	2	2	2	6

8.

x_i	15	21	27	30	35
f_i	3	5	6	7	8

9, 10 ஆகியவற்றில் இடைமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகலை காண்க.

9.

நாள்வருமானம் (₹)	0 – 100	100 – 200	200 – 300	300 – 400	400 – 500	500 – 600	600 – 700	700 – 800
ஆட்களின் எண்ணிக்கை	4	8	9	10	7	5	4	3

10.

உயரம் (செமீ)	95-105	105-115	115-125	125-135	135-145	145-155
சிறுவன்களின் எண்ணிக்கை	9	13	26	30	12	10

11. கீழுள்ள தரவின் இடைமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகலை காண்க.

மதிப்பெண்கள்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
சிறுமியரின் எண்ணிக்கை	6	8	14	16	4	2

12. கீழுள்ள நூறு மனிதர்களின் அகவைப்பரவலில், நடுமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகலை காண்க.

அகவை (ஆண்டுகள்)	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-5-45	46-50	51-55
எண்ணிக்கை	5	6	12	14	26	12	16	9

(உதவி: ஒவ்வொரு வகுப்பிடைவெளியிலும் தாழெல்லையிலிருந்து 0.5 கழித்து உயரெல்லையுடன் 0.5 கூட்டுவதன்மூலம் கொடுத்த தரவுகளை தொடர்நிகழ்வெண்பரவலாக மாற்றுக.)

15.4.3 இடைமவிலகலின் செல்வரம்புகள்

மிகவும் அதிகமான மாறுமையுள்ள ஒரு தொடரில் நடுமம் மையப்போக்கின் ஒரு சிறந்த அளவமன்று. இவ்வாறான தொடர்களில் கணக்கிட்ட நடுமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகலை முழுவதுமாக நம்பவியலாது.

இடைமத்தைப்பற்றிய விலகல்களின் கூட்டுத்தொகை (எதிர்மக்குறிகளை புறக்கணித்து), நடுமத்தைப்பற்றிய விலகல்களின் கூட்டுத்

தொகையைவிட அதிகம். எனவே, இடைமத்தைப் பற்றிய இடைமவிலகல் அறிவியலானதன்று. இவ்வாறு, பல வேற்றுவங்களில், இடைமவிலகல் மனநிறைவற்ற முடிவுகளை தரலாம். மேலும், இடைமவிலகல் விலகல்களின் மட்டுமதிப்பு களின் அடிப்படையில் கணக்கிடப்படுவதால், அதனை மேலும் குறிக்கணிதக்கையாளலுக்கு உட்படுத்த இயலாது. இது நமக்கு உணர்த்துவது என்னவெனில், நாம் விரிகைக்கான வேறோர் அளவீட்டை கருதவேண்டும். செந்தரவிலகல், விரிகைக்கான இவ்வாறான ஒரு அளவீடு.

15.5 மாறுமையும் செந்தரவிலகலும்

இடைமத்தைப்பற்றிய இடைமவிலகலை கணக்கிடும்போது, விலகல்களின் மட்டுமதிப்பு களை எடுக்கிறோம் என்பதை நினைவுகூறுக. இடைமவிலகலுக்கு பொருள்தரும்பொருட்டு அவற்றின் மட்டுமதிப்புகளை எடுத்துக் கொண்டோம். அன்றெனில், அவை தங்களுக்குள் ஒன்றையொன்று நீக்கிவிடுவதை கண்டோம்.

விலகல்களின் குறிகளால் ஏற்படும் இடர்ப்பாட்டை நீக்கும் மற்றொரு வழி விலகல்களின் வர்க்கங்களை எடுப்பது. எல்லா விலகல்களின் வர்க்கங்களும் எதிர்மமற்றவை என்பது தெளிவு. $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ ஆகியவற்றை n கண்டறிதல்களாகவும், $\overline{x}$ஐ அவற்றின் இடைமமாகவும் கொள்வோம். அப்படியெனில்,

$$(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

இந்த கூட்டுத்தொகை சுழியம் எனில் ஒவ்வொரு $x_i - \overline{x}$ என்ற உறுப்பும் சுழியமா யிருக்கவேண்டும். எல்லாக்கண்டறிதல்களும் இடைமத்துக்கு சமமாயிருப்பதால் இங்கு விரிகையே இல்லை என்பது இதன் உள்ளுரை. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ இன் மதிப்பு சிறிதாயிருப்பது $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ ஆகிய எல்லாக்கண்டறிதல்களும் இடைமத்தின் மிக அருகில் உள்ளதையும், அதன் விளைவாக விரிகை குறைவாயிருப்பதையும் உணர்த்துகிறது. மாறாக, கூட்டுத்தொகை பெரிதாயிருந்தால், இடைமத்திலிருந்து கண்டறிதல்களின் விரிகை அதிகம். எனவே, $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ விரிகையின் அளவை அதாவது சிதறலின் அளவை குறிக்கும் ஒரு நியாயமான காட்டி என கூறலாமா?

$5, 15, 25, 35, 45, 55$ என்ற ஆறு கண்டறிதல்க ளின் A என்ற கணத்தை கருதுவோம்.. கண்டறி தல்களின் இடைமம் $\overline{x} = 30$. இக்கணத்தின் இடைமத்திலிருந்து கிடைக்கும் விலகல்களின் வர்க்கக்கூட்டுத்தொகையை கீழ்க்கண்ட சமன்பாடு தருகிறது.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \overline{x})^2 &= (5-30)^2 + (15-30)^2 \\ &\quad + (25-30)^2 + (35-30)^2 \\ &\quad + (45-30)^2 + (55-30)^2 \\ &= 625 + 225 + 25 + 25 + 225 + 625 = 1750\end{aligned}$$

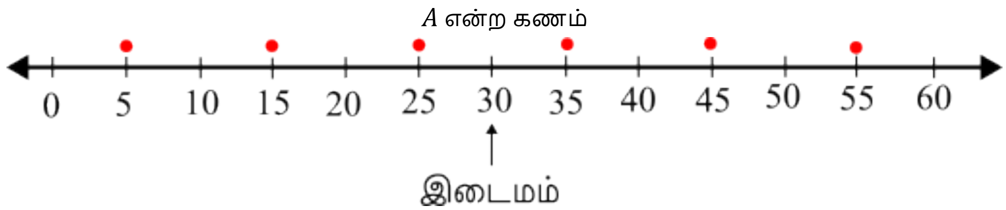
இப்போது, $15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45$ என்னும் 31 கண்டறிதல்களின் B என்ற மற்றொரு கணத்தை கருதுவோம். இதன் இடைமம், $\overline{y} = 30$. A, B ஆகிய இரு கணங்களின் இடைமமும் 30 என்பதை நோக்குக. B இன் இடைமத்திலிருந்து கண்டறிதல்களின் விலகல்களின் வர்க்கக்கூட்டுத்தொகையை கீழ்க்காணும் சமன்பட்டால் பெறுகிறோம்.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{31}(y_i - \overline{y})^2 &= (15 - 30)^2 + (16 - 30)^2 \\ &\quad + (17 - 30)^2 + \cdots \\ &\quad + (44 - 30)^2 + (45 - 30)^2 \\ &= (-15)^2 + (-14)^2 + \cdots + (-1)^2 + (0)^2 + (1)^2 \\ &\quad + (2)^2 + (3)^2 + \cdots + (14)^2 \\ &\quad + (15)^2 \\ &= 2[15^2 + 14^2 + \cdots + 1^2] \\ &= 2 \times \frac{15 \times (15+1)(30+1)}{6} = 5 \times 16 \times 31 \\ &= 2480\end{aligned}$$

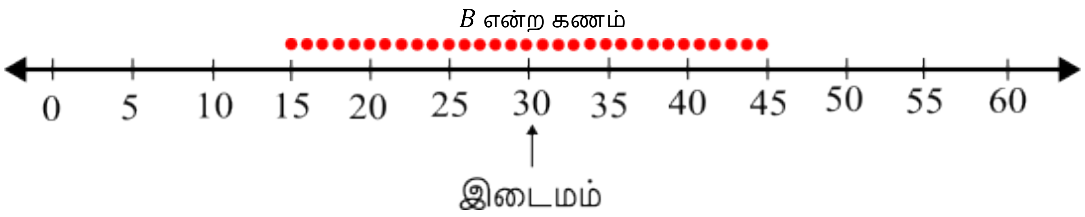
இங்கு, முதல் n இயலெண்களின் வர்க்கக் கூட்டுத்தொகை $= n(n+1)(2n+1)/6$ என்ற வாய்ப்பாட்டை $n = 15$ என்ற மதிப்புடன் பயன்படுத்தினோம்.

இடைமத்தைப்பற்றிய விரிகையின் அளவீடு அதாவது சிதறலின் அளவீடு $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ எனில் 6 கண்டறிதல்களுள்ள Aயின் பரவல் 31 கண்டறிதல்களுள்ள Bயின் பரவலைவிட குறைவு எனக்கூற நாம் விழைவோம். ஆனால், உண்மையில் A Bயைவிட அதிக விரிகையுள்ளது (Aயின் வீச்சு -25 இலிருந்து $+25$ வரை; Bயின் வீச்சு -15 இலிருந்து $+15$வரை).

கீழ்க்காணும் படங்களிலிருந்தும் மேற்கூறிய கருத்து நன்கு விளங்கும்.



படம் 15.5



படம் 15.6

இடைமத்திலிருந்து விலகல்களின் வர்க்கக் கூட்டுத்தொகை விரிகையின் தகுதியான அளவீடாக இல்லாததை காண்கிறோம். இந்த இடரை புறங்காண, விலகல்வர்க்கங்களின் இடைமத்தை எடுக்கிறோம்; அதாவது,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \text{ இன்}$$

மதிப்பை காண்கிறோம். A என்ற கணத்தில், இடைமம் $1750/6 = 291.67$. Bஇல் , இடைமம் $2480/31 = 80$. Aயின் விரிகை (சிதறல்), Bயினதைவிட அதிகம் என்பதை மேற்காணும் மதிப்புகள் உணர்த்துவதோடு இவ்விரு தொகுதிகளின் வடிவியற்குறிப்பீடுகளுடன் ஒவ்வுகின்றன.

இவ்வாறு,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \text{ ஐ}$$

விரிகையின் முறையான அளவமாக கொள்ள லாம். இடைமத்திலிருந்து விலகல்வர்க்கங்களின் இடைமம் எனும் இந்த எண்ணை மாறுமை என்று அழைத்து σ^2 என்று குறிக்கிறோம். எனவே, $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ ஆகிய n கண்டறிதல்களின் மாறுமையை

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

தருகிறது.

15.5.1 செந்தரவிலகல்

மாறுமையின் கணக்கீட்டில், தனிக்கண்டறி தல்களான x_iகளின் அலகும் அவற்றின் இடைமமான $\bar{x}$இன் அலகும் மாறுமையின் அலகுகளிலிருந்து மாறுபடுவதை கண்கிறோம். ஏனெனில், மாறுமையில் $(x_i - \bar{x})$இன் வர்க்கக் கூட்டுத்தொகை உள்ளது. இக்காரணத்தால், மாறுமையின் நேர்ம வர்க்கமூலத்தை ஒரு கண்டறிதற்கணம் இடைமத்திலிருந்து விலகுவதன் முறையான அளவீடாக கொள்கிறோம். இதை செந்தரவிலகல் (σ) என்று அழைக்கிறோம். எனவே, σ எனக்குறித்த செந்தரவிலகலை கீழ்க்கண்ட சமன்பாடு தருகிறது.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad (15.1)$$

விரிதரவுகளின் மாறுமையையும் அதிலி ருந்து செந்தரவிலகலையும் கணக்கிடுவதை கீழ்க்கண்ட சான்றால் எடுத்துக்காட்டலாம்.

சான்று 8: கீழ்க்காணும் தரவுகளின் மாறுமையை காண்க.

6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24

தீர்வு தரவுகளிலிருந்து அட்டவணை 15.7ஐ ஆக்குகிறோம். எடுகோள் இடைமம் 14 எனக் கொண்டு, படிவிலகன்முறையால் இடைமத்தை கணக்கிடுகிறோம்.

கண்டறிதல்களின் எண்ணிக்கை $n = 10$

அட்டவணை 15.7

x_i	$d_i = \dfrac{x_i - 14}{2}$	இடைமத்திலிருந்து விலகல் $(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
6	-4	-9	81
8	-3	-7	49
10	-2	-5	25
12	-1	-3	9
14	0	-1	1
16	1	1	1
18	2	3	9

20	3	5	25
22	4	7	49
24	5	9	81
	5		330

எனவே, இடைமம்

$$\overline{x} = \text{எடுகோளிடைமம்} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i \times h$$

$$= 14 + \frac{5}{10} \times 2 = 15$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{10} \times 330 = 33$$

இப்படியாக, $\sigma = \sqrt{33} = 5.74$.

15.5.2 ஒரு உதிரிநிகழ்வெண்பரவலின் செந்தரவிலகல்

உதிரிநிகழ்வெண்பரவலை கீழ்க்கண்டவாறு குறிப்போம்.

x:	x_1,	x_2,	$x_3, \ldots$,	x_n
f:	f_1,	f_2,	$f_3, \ldots$,	f_n

இதற்கான செந்தரவிலகல்

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^2} \qquad (15.2)$$

இங்கு

$$N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

சான்று 9 கீழ்க்காணும் தரவுகளின் மாறுமையையும் செந்தரவிலகலையும் காண்க.

x_i	4	8	11	17	20	24	32
f_i	3	5	9	5	4	3	1

தீர்வு: அட்டவணை 15.8ஐ கட்டுமானிப்போம்.

அட்டவணை 15.8

x_i	f_i	$f_i x_i$	$(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i(x_i - \overline{x})^2$
4	3	12	-10	100	300
8	5	40	-6	36	180
11	9	99	-3	9	81
17	5	85	3	9	45
20	4	80	6	36	144
24	3	72	10	100	300
32	1	32	18	324	324
	30	420			1374

$$N = 30, \quad \sum_{1}^{7} f_i x_i = 420,$$

எனவே,

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{1}^{7} f_i x_i = \frac{1}{30} \times 420 = 14$$

$$\sum_{i=1}^{7} f_i(x_i - \overline{x})^2 = 1374$$

மாறுமை $(\sigma^2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{30} \times 1374$
$= 45.8$

செந்தரவிலகல் $(\sigma) = \sqrt{45.8} = 6.77$

15.5.3 ஒரு தொடர்நிகழ்வெண்பரவலின் செந்தரவிலகல்

ஒரு குறிப்பிட்ட தொடர்நிகழ்வெண் பரவலின் ஒவ்வொரு வகுப்பையும் அதன் மையப்புள்ளியால் மீள்வைப்பதன்மூலம் அதை ஒரு உதிரிநிகழ்வெண் பரவலாக குறிப்பிடலாம். பின்பு, அதன் செந்தர விலகலை உதிரிநிகழ் வெண்பரவலில் பயன்படுத்திய செய்நுட்பத்தால் கணக்கிடலாம்.

ஒரு தொடர்நிகழ்வெண்பரவலில் n வகுப்புகள் இருந்தால், ஒவ்வொரு வகுப்பையும் அதன் x_i என்ற மையப்புள்ளியாலும் f_i என்ற நிகழ்வெண்ணாலும் வரையறுத்து, செந்தரவிலகலை

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^2}$$

என்று பெறுகிறோம்; இங்கு, $\overline{x}$ பரவலின் இடைமம்,

$$N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

செந்தரவிலகலுக்கான மற்றொரு வாய்ப்பாடு

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\left(x_i^2 + \overline{x}^2 - 2x_i\overline{x}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} f_i\overline{x}^2 - \sum_{i=1}^{n} f_i 2x_i\overline{x}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \overline{x}^2\sum_{i=1}^{n} f_i - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)$$

இங்கு,

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \overline{x}, \qquad \text{அதாவது,} \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = N\overline{x}$$

என்பதையும்

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = N$$

என்பதையும் பயன்படுத்தி

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \overline{x}^2 N - 2\overline{x}N\overline{x}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \overline{x}^2 - 2\,\overline{x}^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \overline{x}^2$$

என்று பெறுகிறோம். கூட்டலடுக்குள்ள உருபை x_i^2களின் இடைமமாக நாம் இனங்காணலாம். இதை $\overline{x^2}$ என்று குறித்து,

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

என்ற விடையை பெறுகிறோம். கணக்கீடுகளுக் காக, கூட்டலடுக்குகளை வெளிப்படையாக எழுதி,

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2$$

$$= \frac{1}{N^2}\left(N\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2\right)$$

என்றும், இதிலிருந்து செந்தரவிலகலை

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2} \qquad (15.3)$$

என்றும் பெறுகிறோம்.

சான்று 10 கீழ்க்காணும் பரவலின் இடைமம், மாறுமை, செந்தரவிலகல் ஆகியவற்றை கணக்கிடுக.

வகுப்பு	நிகழ்வெண்
$30-40$	3
$40-50$	7
$50-60$	12
$60-70$	15
$70-80$	8
$80-90$	3
$90-100$	2

தீர்வு தரவுகளிலிருந்து நாம் அட்டவணை 15.9ஐ கட்டமைக்கிறோம்.

அட்டவணை 15.9

	f_i	x_i	$f_i\,x_i$	$(x_i-\overline{x})^2$	$f_1(x_i-\overline{x})^2$
$30-40$	3	35	105	729	2187
$40-50$	7	45	315	289	2023
$50-60$	12	55	660	49	588
$60-70$	15	65	975	9	135
$70-80$	8	75	600	169	1352
$80-90$	3	85	255	529	1587
$90-100$	2	95	190	1089	2178
	50		3100		10050

இடைமம்

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i = \frac{3100}{50} = 62$$

மாறுமை

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i(x_i-\overline{x})^2 = \frac{1}{50}\times 10050 = 201$$

செந்தரவிலகல்

$$\sigma = \sqrt{201} = 14.18$$

சான்று 11 கீழ்க்காணும் தரவுகளுக்கான செந்தரவிலகலை காண்க.

x_i	3	8	13	18	23
f_i	7	10	15	10	6

தீர்வு அட்டவணை 15.10ஐ உருவக்குவோம்.

x_i	f_i	$f_i x_i$	x_i^2	$f_i x_i^2$
3	7	21	9	63
8	10	80	64	640
13	15	195	169	2535
18	10	180	324	3240
23	6	138	529	3174
	48	614		9652

அட்டவணை 15.10

இப்போது, (15.3)ஆம் சமன்பாட்டின்படி, செந்தரவிலகல்

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum f_i x_i^2 - \left(\sum f_i x_i\right)^2}$$
$$= \frac{1}{48}\sqrt{48 \times 9652 - (614)^2}$$
$$= \frac{1}{48}\sqrt{463296 - 376996}$$
$$= \frac{1}{48} \times 293.77 = 6.12$$

15.5.4 மாறுமையையும் செந்தரவிலகலையும் காணும் ஒரு குறுக்குவழி

சில நேரங்களில், ஒரு உதிரிப்பரவலின் x_i மதிப்புகளோ ஒரு தொடர்ச்சியான பரவலின் பல்வேறு வகுப்புகளிலுள்ள மையப்புள்ளிகளோ பெரிய எண்களாக இருக்கலாம். இந்த பெரிய எண்களை கணக்கிட்டு மாறுமையையும் செந்தரவிலகலையும் பெறுவது சோர்வளிப்பதா கவும் அதிக நேரமெடுப்பதாகவும் இருக்கலாம். இந்த செய்முறையை எளிமையாக்க, படிவிலகன் முறையை பயன்படுத்தலாம். எடுகோளிடை மத்தை A என்று கொள்வோம்; அளவிகிதத்தை $1/h$ மடங்கால் சுருக்குவோம் (h வகுப்பிடை வெளிகளின் அகலம்). படிவிலகல்களை y_i என்ற புதிய மதிப்புகளாக கொள்ளலாம்.

$$y_i = \frac{x_i - A}{h}, \quad \text{அதாவது } x_i = A + hy_i \quad (15.4)$$

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i \quad (15.5)$$

என்பது நாமறிந்தது. (15.5)இலுள்ள x_iஐ (15.4)இலிருந்து மாற்றிடும்போது

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(A + hy_i)$$
$$= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i A + \sum_{i=1}^{n} h f_i y_i\right)$$
$$= \frac{1}{N}\left(A\sum_{i=1}^{n} f_i + h\sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right)$$

என்று பெறுகிறோம். இப்போது

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = N$$

என்பதை பயன்படுத்தி

$$\overline{x} = A\frac{N}{N} + h\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i y_i$$

அதாவது

$$\overline{x} = A + h\,\overline{y} \quad (15.6)$$

என்று பெறுகிறோம். அடுத்ததாக, x என்ற மாறியின் மாறுமை

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^2$$

என்பதையும் அறிவோம். இதில் (15.4), (15.6) ஆகிய சமன்பாடுகளை பயன்படுத்தி

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i h^2 (y_i - \overline{y})^2 = \frac{h^2}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i (y_i - \overline{y})^2$$
$$= h^2 \sigma_y^2$$

என்று பெறுகிறோம். இங்கு, y என்ற மாறியின் மாறுமையை σ_y^2 என்று குறித்தோம். இதிலிருந்து

$$\sigma_x = h\sigma_y \quad (15.7)$$

என்பதை பெறுகிறோம். அதாவது, (15.6), (15.7) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\sigma_x = \frac{h}{N}\sqrt{N\sum_{i=1}^{n} f_i y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right)^2} \quad (15.8)$$

என்பது கிடைக்கிறது.

குறுக்குவழியையும் (15.8)ஆம் சமன் பாட்டையும் பயன்படுத்தி சான்று 11ஐ தீர்ப்போம்.

சான்று 12 கீழ்க்காணும் பரவலுக்கான இடைமத்தையும் செந்தரவிலகலையும் கணக்கிடுக.

வகுப்பு	நிகழ்வெண்
$30-40$	3
$40-50$	7
$50-60$	12
$60-70$	15
$70-80$	8
$80-90$	3
$90-100$	2

தீர்வு: எடுகோளிடைமம், $A = 65$ என்க. இங்கு $h = 10$.

அட்டவணை 15.11

	f_i	x_i	y_i	y_i^2	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$
$30-40$	3	35	-3	9	-9	27
$40-50$	7	45	-2	4	-14	28
$50-60$	12	55	-1	1	-12	12
$60-70$	15	65	0	0	0	0
$70-80$	8	75	1	1	8	8
$80-90$	3	85	2	4	6	12
$90-100$	2	95	3	9	6	18
	50				-15	105

எனவே, இடைமம்

$$\overline{x} = A + \frac{\sum f_i y_i}{50} \times h = 65 - \frac{15}{50} \times 10 = 62$$

மாறுமை

$$\sigma^2 = \frac{h^2}{N^2}\left[N \sum f_i {y_i}^2 - \left(\sum f_i y_i\right)^2 \right]$$
$$= \frac{10^2}{50^2}[50 \times 105 - (-15)^2]$$
$$= \frac{1}{25}[5250 - 225] = 201$$

செந்தரவிலகல்

$$\sigma = \sqrt{201} = 14.18$$

பயிற்சி 15.2

1முதல் 5வரையான பயிற்சிகளில் தரவுகளுக்கான இடைமத்தையும் மாறுமையையும் காண்க.

1. 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12
2. முதல் n இயல் எண்கள்.
3. 3இன் முதல் 10 மடங்குகள்
4.

x_i	6	10	14	18	24	28	30
f_i	2	4	7	12	8	4	3

5.

x_i	92	93	97	98	102	104	109
f_i	3	2	3	2	6	3	3

6. இடைமத்தையும் செந்தரவிலகலையும் குறுக்குவழிமுறையை பயன்படுத்தி காண்க.

x_i	60	61	62	63	64	65	66	67	68
f_i	2	1	12	29	25	12	10	4	5

கீழ்க்காணும் பயிற்சிகள் 7இலும் 8இலும் நிகழ்வெண்பரவல்களுக்கான இடைமத்தையும் மாறுமையையும் காண்க.

7.

வகுப்புகள்	0-30	30-60	60-90	90-120	120-150	150-180	180-210
நிகழ்வெண்கள்	2	3	5	10	3	5	2

8.

வகுப்புகள்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
நிகழ்வெண்கள்	5	8	15	16	6

9. குறுக்குவழிமுறையை பயன்படுத்தி இடைமத்தையும் மாறுமையையும் செந்தரவிலகலையும் காண்க.

உயரம் (செமீ)	70-75	75-80	80-85	85-90	90-95	95-100	100-105	105-110	110-115
பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை	3	4	7	7	15	9	6	6	3

10. ஒரு வடிவமைப்பில் வரையப்பட்ட வட்டங்களின் விட்டங்களை (மிமீயில்) கீழ் காண்கிறோம். வட்டங்களின் செந்தரவிலகலையும் இடைம விட்டத்தையும் காண்க.

விட்டம்	33-36	37-40	41-44	45-48	49-52
வட்டங்களின் எண்ணிக்கை	15	17	21	22	25

உதவி: முதலில் தரவுகளை 32.5-36.5, 36.5-40.5, 40.5-44.5, 44.5-48.5, 48.5-52.5 என்ற தொடர்ச்சியான வகுப்புகளாக ஆக்கியபின் தொடர்க.

15.6 நிகழ்வெண்பரவல்களின் பகுப்பாய்வு

முந்தைய பகுதிகளில் விரிகையளவீட்டின் சில வகைகளை படித்தோம். இடைம விலகலுக்கும் செந்தரவிலகலுக்கும் தரவுகளின் அலகு உள்ளது. ஒரே இடைமமுள்ளதும் வெவ்வேறு அலகுகளில் அளக்கப்பட்டதுமான இரண்டு தொடர்களின் மாறுமைகளை நாம் ஒப்பிட விரும்பினால், அவற்றின் விரிகைகளின் அளவீடுகள் போதாது; இதற்கு அலகற்ற அளவீடுகள் தேவை. அலகுகளைச்சாராத ஒரு மாறுமையளவீட்டை நாம் மாறுபாட்டுக்கெழு என்று அழைத்து மாழு என்று குறிக்கிறோம்.

மாறுபாட்டுக்கெழுவை

$$\text{மாழு} = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100, \qquad \overline{x} \neq 0$$

என்று வரையறுக்கிறோம்; இங்கு, σ தரவுகளின் செந்தரவிலகலும் $\overline{x}$ இடைமமும்.

இரண்டு தொடர்களின் மாறுபாடுகளை அதாவது விரிகைகளை ஒப்பிட ஒவ்வொரு தொடரின் மாழுவை கணக்கிடுகிறோம். எந்தத்தொடரின் மாழு அதிகமானதோ அது அதிக மாறுபாடுடையது.

15.6.1 ஒரே இடைமமுள்ள இரு நிகழ்வெண்பரவல்களை ஒப்பிடுதல்

முதற்பரவலின் இடைமமும் செந்தர விலகலும் முறையே $\overline{x_1}$, σ_1 என்றும் இரண்டாவதனவை $\overline{x_2}$, σ_2 என்றும் கொள்வோம். அப்படியெனில், அவற்றின் மாழுகள் முறையே

$$\text{மாழு}_1 = \frac{\sigma_1}{\overline{x_1}} \times 100$$

$$\text{மாழு}_2 = \frac{\sigma_2}{\overline{x_2}} \times 100$$

பரவல்களின் இடைமங்கள் சமமாயிருக்கும் போது, அதாவது $\overline{x_1} = \overline{x_2} = \overline{x}$ எனில்

$$\text{மாழு}_1 = \frac{\sigma_1}{\overline{x}} \times 100$$

$$\text{மாழு}_2 = \frac{\sigma_2}{\overline{x}} \times 100$$

இந்த இரண்டு பரவல்களின் மாறுபாட்டுக் கெழுக்களை அவற்றின் செந்தரவிலகல்களின் அடிப்படையிலே ஒப்பிடலாம்.

இவ்வாறாக, சம இடைமமுள்ள இரண்டு தொடர்களில், அதிக செந்தரவிலகலுள்ளது மற்றதைவிட அதிகமாக விலகுகிறது என்கிறோம். மேலும், குறைந்த செந்தரவிலகலுள்ளது மற்றதைவிட அதிய இயைபுமையுடையது.

இப்போது கீழ்க்காணும் சான்றுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

சான்று 13 A, B எனும் இரண்டு உற்பத்தியகங்களில் தொழிலாளரெண்ணிக்கைகளும் அவர்களுக்கு அளிக்கப்படும் கூலிகளும் பின்வருமாறு.

	A	B
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	5000	6000
இடைம மாதக்கூலி	₹2500	₹2500
கூலிப்பரவல்களின் மாறுமை	81	100

இந்த இரண்டு உற்பத்தியகங்களிலும் எது தனிமனிதக்கூலியில் அதிக மாறுமையை காட்டுகிறது?

தீர்வு Aயில் கூலிப்பரவலின் மாறுமை (σ_A^2) 81 என்பதால் செந்தரவிலகல் (σ_A) 9.

மேலும், B யில் கூலிப்பரவலின் மாறுமை 100; செந்தரவிலகல் 10.

இரண்டிலும் இடைமக்கூலி சமமாக (₹2,500) இருப்பதால், அதிக செந்தர விலகலுள்ள உற்பத்தியகத்தில், அதாவது Bயில், கூலி அதிகமாக மாறுபடுகிறது.

சான்று 14 இரண்டு பரவல்களின் 60உம் 70உம். அவற்றின் செந்தர விலகல்கள் முறையே, 21உம் 16உம். அவற்றின் இடைமங்கள் யாவை?

தீர்வு $\text{மாழு}_1 = 60$, $\sigma_1 = 21$, $\text{மாழு}_2 = 70$, $\sigma_2 = 16$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பரவல்களின் இடைமங்கள் முறையே $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$ என்க. அப்படியெனில்,

$$\text{மாழு}_1 = \frac{\sigma_1}{\overline{x_1}} \times 100$$

$$60 = \frac{21}{\overline{x_1}} \times 100$$

$$\overline{x_1} = \frac{21}{60} \times 100 = 35$$

$$\text{மாழு}_2 = \frac{\sigma_2}{\overline{x_2}} \times 100$$

$$70 = \frac{16}{\overline{x_2}} \times 100,$$

$$\overline{x_2} = \frac{16}{70} \times 100 = 22.85$$

சான்று 15 11ஆம் வகுப்பின் ஒரு பிரிவில் மாணவர்களின் உயரங்களையும் எடைகளையும்பற்றி கீழ்க்காணும் மதிப்புகள் கணக்கிட்டிருக்கிறோம்:

	உயரம்	எடை
இடைமம்	$162.5\ cm$	$52.36\ kg$
மாறுமை	$127.69\ cm^3$	$23.1361\ kg^2$

உயரங்களைவிட எடைகளில் அதிக மாறுபாடு இருப்பதாக சொல்லலாமா?

தீர்வு மாறுமைகளை ஒப்பிட மாறுபாட்டுக் கெழுக்களை (மாழுகளை) கணக்கிட வேண்டும்.

உயரத்தின் மாறுமை $127.69\ cm^2$ என்பதால், உயரத்தின் செந்தரவிலகல் $\sqrt{127.69\ cm^2} = 11.3\ cm$

எடையின் மாறுமை $23.1361\ kg^2$ என்பதால், எடையின் செந்தரவிலகல் $\sqrt{23.1361\ kg^2} = 4.81\ kg$.

மாறுபாட்டுக்கெழுக்கள் பின்வருமாறு.

உயரத்தின் மாழு

$$= \frac{\text{உயரத்தின் செந்தரவிலகல்}}{\text{உயரத்தின் இடைமம்}} \times 100$$

$$= 11.3/162.6 \times 100 = 6.95$$

எடையின் மாழு

$$= \frac{\text{எடையின் செந்தரவிலகல்}}{\text{எடையின் இடைமம்}} \times 100$$

$$= 4.81/52.36 \times 100 = 9.18$$

உயரத்தின் மாழுவைவிட எடையின் மாழு அதிகம் என்பது தெளிவு; எனவே, எடைகளில் உயரங்களைவிட அதிக மாறுபாடு இருப்பதாக சொல்லலாம்.

பயிற்சி 15.3

1. கீழே தந்துள்ள A, B என்ற இரு கணங்களின் தரவுகளிலிருந்து எது அதிகமான மாற்றத்தை காட்டுகிறது என்று கூறுக.

மதிப்பெண்கள்	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
கணம் A	9	17	32	33	40	10	9
கணம் B	10	20	30	25	43	15	7

2. கீழ்க்காணும் X, Y ஆகிய பங்குகளின் விலைகளிலிருந்து எதன் மதிப்பு அதிக நிலைப்பானது என்று காண்க.

X	35	54	52	53	56	58	52	50	51	49
Y	108	107	105	105	106	107	104	103	104	101

3. ஒரே தொழிலகத்தைச்சேர்ந்த A , B என்ற இரு நிறுவனங்களில் தொழிலாளர்களுக்கான மாதவூதியங்களைப்பற்றிய பகுப்பாய்வு கீழ்க்கண்ட முடிவுகளை தருகிறது.

	A நிறுவனம்	B நிறுவனம்
ஊதியம் பெறுவோரின் எண்ணிக்கை	586	648
மாத ஊதியங்களின் இடைமம்	₹5253	₹5253
ஊதியப்பரவலின் மாறுமை	100	121

இரு நிறுவனங்களில் எது அதிகத்தொகையை மாத ஊதியமாக வழங்குகிறது?

எந்த நிறுவனம் தனிமனித ஊதியங்களில் அதிக மாறுமையை காட்டுகிறது?

4. ஒரு கால்பந்துவிளையாட்டுக்காலத்தில் A க்குழு அடித்த கோல்களின் பதிவை கீழே காண்கிறோம்.

கோல்களின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4
போட்டிகளின் எண்ணிக்கை	1	9	7	5	3

Bக்குழுவுக்கு, ஒவ்வொரு போட்டியிலும் அடித்த கோல்களின் இடைமம் 2; செந்தரவிலகல் 1.25. இரண்டில் எக்குழு அதிக இயைபானது?

5. ஒரு நிறுவனத்தில் 50 உற்பத்திப்பொருட்களின் நீளம் $x\ cm$, எடை $y\ g$. இவற்றின் கூட்டுத்தொகையையும் வர்க்கக்கூட்டுத்தொகையையும் கீழே காண்கிறோம்.

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 212; \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 902.8$$

$$\sum_{i=1}^{50} y_i = 261; \sum_{i=1}^{50} {y_i}^2 = 1457.6$$

எது அதிக மாறுபாடுள்ளது, எடையா நீளமா?

பலவகைச்சான்றுகள்

சான்று 16 20 கண்டறிதல்களின் மாறுமை 5. ஒவ்வொரு கண்டறிதலையும் 2ஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கும் கண்டறிதல்களின் புதிய மாறுமையை காண்க.

தீர்வு கண்டறிதல்கள் $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ எனவும் இடைமம், $\overline{x}$ எனவும் கொள்வோம்.

மாறுமை 5, $n = 20$ என்பதால்,

$$\text{மாறுமை } (\sigma^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \overline{x})^2,$$

$$\text{அதாவது } 5 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \overline{x})^2$$

அப்படியெனில்

$$\sum_{i=1}^{20}(x_i - \overline{x})^2 = 100 \qquad (15.9)$$

ஒவ்வொரு கண்டறிதலையும் 2ஆல் பெருக்கினால் புதிய கண்டறிதல்கள் $y_i = 2x_i$. அதாவது $x_i = y_i/2$. எனவே,

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20} y_i = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} 2x_i = 2 \times \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i$$

அதாவது, $\overline{y} = 2\overline{x}$, அதாவது $\overline{x} = \overline{y}/2$

$x_i, \overline{x}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை (15.9)ஆம் சமன்பாட்டில் மாற்றிட்டு

$$\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{1}{2}y_i - \frac{1}{2}\overline{y}\right)^2 = 100$$

அதாவது

$$\sum_{i=1}^{20}(y_i - \overline{y})^2 = 400$$

என்று பெறுகிறோம். இவ்வாறாக, புதிய கண்டறிதல்களின் மாறுமை $400/20 = 20 = 5 \times 2^2$.

குறிப்பு ஒவ்வொரு கண்டறிதலையும் k என்ற ஒரு மாறிலியால் பெருக்கும்போது புதிய கண்டறிதல்களின் மாறுமை முதலிலிருந்த மாறுமையின் k^2 மடங்காவதை உணரலாம்.

சான்று 17 ஐந்து கண்டறிதல்களின் இடைமம் 4.4; அவற்றின் மாறுமை 8.24. மூன்று கண்டறிதல்கள் 1, 2, 6 **எனில்** மற்ற இரண்டு கண்டறிதல்களையும் காண்க.

தீர்வு தெரியாத கண்டறிதல்களை x, y என்போம். அப்படியெனில், தொடர் $1, 2, 6, x, y$. இவற்றின் இடைமம்

$$\overline{x} = \frac{1 + 2 + 6 + x + y}{5} = 4.4$$

$$22 = 9 + x + y$$

அதாவது,

$$x + y = 13 \qquad (15.10)$$

மாறுமை

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \overline{x})^2$$

அதாவது,

$$8.24 = \frac{1}{5}[(-3.4)^2 + (-2.4)^2 + 1.6^2 + (x - 4.4)^2 + (y - 4.4)^2]$$

$$= \frac{1}{5}[3.4^2 + 2.4^2 + 1.6^2 + (x^2 + y^2) - 2 \times 4.4 \times (x + y) + 2 \times 4.4^2]$$

அதாவது,

$$41.2 = 11.56 + 5.76 + 2.56 + x^2 + y^2 - 8.8 \times 13 + 38.72$$

எனவே,

$$x^2 + y^2 = 97 \qquad (15.11)$$

ஆனால், (15.10)ஆம் சமன்பாட்டின் வர்க்கத்திலிருந்து

$$x^2 + y^2 + 2xy = 169 \qquad (15.12)$$

என்று அறிகிறோம். எனவே, (15.11) இலிருந்தும் (15.12)இலிருந்தும்

$$2xy = 72 \qquad (15.13)$$

என்று பெறுகிறோம். (15.11)ஆம் சமன்பாட்டிலி ருந்து (15.13)ஐ கழித்து

$$x^2 + y^2 - 2xy = 97 - 72$$

அதாவது $(x - y)^2 = 25$ என்றும் இதிலிருந்து

$$x - y = \pm 5 \qquad (15.14)$$

என்றும் பெறுகிறோம். எனவே, (15.10), (15.14)ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து

$x = 9, y = 4$ $\quad x - y = 5$ என்றபோது

$x = 4, y = 9$ $\quad x - y = -5$ என்றபோது

என்று பெறுகிறோம். இவ்வாறு, மற்ற இரண்டு கண்டறிதல்கள் 4உம் 9உம்.

சான்று 18 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ஆகிய கண்டறிதல்களுள் ஒவ்வொன்றின் மதிப்பையும் a என்ற ஒரு நேர்ம எண்ணாலோ எதிர்ம எண்ணாலோ அதிகரிக்கும்போது மாறுமையின் மதிப்பு மாறுவதில்லை என்று காட்டுக.

தீர்வு $x_1, x_2, \dots, x_n$ ஆகியவற்றின் இடைமம் $\overline{x}$ என்க. அப்படியெனில் மாறுமை

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

ஒவ்வொரு கண்டறிதலின் மதிப்பையும் aஆல் அதிகரித்தால் புதிய கண்டறிதல்கள்

$$y_i = x_i + a \qquad (15.15)$$

என்று ஆகின்றன. புதிய இடைமத்தை $\overline{y}$ என்று குறித்தால்

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + a)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} a\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{na}{n} = \overline{x} + a$$

அதாவது

$$\overline{y} = \overline{x} + a \qquad (15.16)$$

புதிய கண்டறிதல்களின் மாறுமையை (15.15), (15.16) ஆகிய சமன்பாடுகளை பயன்படுத்தி

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + a - \overline{x} - a)^2$$

என்று எழுதலாம். அதாவது

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sigma_1^2 \qquad (15.17)$$

எனவே, புதிய கண்டறிதல்களின் மாறுமை பழைய கண்டறிதல்களின் மாறுமைக்கு சமம்.

குறிப்பு ஒரு கணத்திலுள்ள ஒவ்வொரு கண்டறிதலின் மதிப்புடனும் ஒரு நேர்ம எண்ணை கூட்டினாலோ கழித்தாலோ தொடரின் மாறுமை மாற்றமடைவதில்லை என நாம் காணகிறோம்.

சான்று 19 40 எனும் ஒரு கண்டறிதலுக்குப் பதிலாக 50 என தவறுதலாக குறித்து ஒரு ஆராய்ச்சியாளர் 100 கண்டறிதல்களின் இடைமத்தையும் செந்தரவிலகலையும் முறையே 40, 5.1 என கணக்கிடுகிறார். சரியான இடைமமும் செந்தரவிலகலும் யாவை?

தீர்வு கண்டறிதல்களின் எண்ணிக்கை $n = 100$

தவறான இடைமம் $(\overline{x}) = 40$

தவறான செந்தரவிலகல் $(\sigma) = 5.1$

இடைமத்தின் வாய்ப்பாடு

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\text{அதாவது}, 40 = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i$$

$$\text{எனவே}, \sum_{i=1}^{100} x_i = 4000$$

கண்டறிதல்களின் தவறான கூட்டுத்தொகை 4000.

கண்டறிதல்களின் சரியான கூட்டுத்தொகை $4000 - 50 + 40 = 3990$. எனவே,

சரியான இடைமம்

$$= \frac{\text{சரியான கூட்டுத்தொகை}}{100}$$

$$= \frac{3990}{100} = 39.9$$

செந்தரவிலகல்

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \overline{x}^2}$$

அதாவது,

$$5.1 = \sqrt{\frac{1}{100} \times \text{தவறான} \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 40^2}$$

$$26.01 = \frac{1}{100} \times \text{ தவறான} \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 1600$$

எனவே,

$$\text{தவறான} \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 100\,(26.01 + 1600)$$

$$= 162601$$

இப்போது,

$$\text{சரியான} \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$$

$$= \text{தவறான} \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 50^2 + 40^2$$

$$= 162601 - 2500 + 1600 = 161701$$

எனவே, சரியான செந்தரவிலகல்

σ

$$= \sqrt{\frac{\text{சரியான} \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{100} - [\text{சரியான இடைமம்}]^2}$$

$$= \sqrt{\frac{161701}{100} - [39.9]^2} = \sqrt{1617.01 - 1592.01}$$

$$= \sqrt{25} = 5$$

15ஆம் படலத்தில் பலவகைப்பயிற்சிகள்

1. எட்டு கண்டறிதல்களின் இடைமமும் மாறுமையும் முறையே 9.0, 9.25. ஆறு கண்டறிதல்கள் 6, 7, 10, 12, 12, 13 எனில் மற்ற இரண்டு கண்டறிதல்களை காண்க.

2. 7 கண்டறிதல்களின் இடைமமும் மாறுமையும் முறையே 8உம் 16உம். 5 கண்டறிதல்கள் 2, 4, 10, 12, 14 எனில் மற்ற இரண்டு கண்டறிதல்களை காண்க.
3. 6 கண்டறிதல்களின் இடைமமும் செந்தரவிலகலும் முறையே 8, 4. ஒவ்வொரு கண்டறிதலையும் 3ஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கும் கண்டறிதல்களின் புதிய இடைமத்தையும் செந்தரவிலகலையும் காண்க.
4. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ஆகிய n கண்டறிதல்களின் இடைமம் $\overline{x}$, மாறுமை σ^2 எனில் $ax_1, ax_2, \ldots, ax_n$ ஆகிய கண்டறிதல்களின் இடைமமும் மாறுமையும் முறையே, $a\overline{x}$, $a^2\sigma^2$ $(a \neq 0)$ என நிறுவுக.
5. 20 கண்டறிதல்களின் இடைமமும் செந்தரவிலகலும் முறையே 10, 2 என்று காண்கிறோம். மீள்சரிபார்த்தலில், 8 என்ற கண்டறிதல் தவறு என்பது தெளிவாகிறது, சரியான இடைமத்தையும் செந்தரவிலகலையும் கீழ்க்கண்ட சூழ்நிலைகளில் கணக்கிடுக.
   a. தவறான கண்டறிதலை நீக்குதல்
   b. அதனை 12ஆக திருத்துதல்
6. கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல் ஆகிய 3 பாடங்களில் 50 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் இடைமத்தையும் செந்தரவிலகல்களையும் கீழே காண்கிறோம்.

பாடம்	கணிதம்	இயற்பியல்	வேதியியல்
இடைமம்	42	32	40.9
செந்தரவிலகல்	12	15	20

   மூன்று பாடங்களில் எதன் மதிப்பெண்கள் மீப்பெரும மாறுமையை காட்டுகின்றன? எது மீச்சிறும மாறுமையை காட்டுகிறது?
7. ஒரு கணத்தின் 100 கண்டறிதல்களின் இடைமமும் செந்தரவிலகலும் முறையே 20, 3 என்று காண்கிறோம். பின்னர், இவற்றில் தவறாகப்பதிந்த 21, 21, 18 ஆகிய 3 கண்டறிதல்களை நீக்கியபின் கிடைக்கும் இடைமத்தையும் செந்தரவிலகலயும் காண்க.

சுருக்கவுரை

- **பரவலின் அளவீடுகள்**: வீச்சு, கான்மானவிலகல், இடைமவிலகல், மாறுமை, செந்தரவிலகல் ஆகியவை பரவலின் அளவீடுகள்.
- வீச்சு = மீப்பெரும மதிப்பு – மீச்சிறும மதிப்பு
- விரிதரவுகளுக்கான இடைமவிலகல்கள்

$$\text{இவி}(\overline{x}) = \frac{\sum|x_i - \overline{x}|}{n}; \quad \text{இவி}(M) = \frac{\sum|x_i - M|}{n}$$

- தொகுதரவுகளுக்கான இடைமவிலகல்கள்

$$\text{இவி}(\overline{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i|x_i - \overline{x}|; \quad \text{இவி}(M) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i|x_i - M|; \quad \text{இங்கு, } N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

- விரிதரவுகளுக்கான மாறுமையும் செந்தரவிலகலும்

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2; \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

- உதிரிநிகழ்வெண்பரவலுக்கான மாறுமையும் செந்தரவிலகலும்

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^2; \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^2}$$

- தொடர்நிகழ்வெண்பரவலுக்கான மாறுமையும் செந்தரவிலகலும்

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\,(x_i - \overline{x})^2; \quad \sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum_{i=1}^{n} f_i.x_i^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} f_i.x_i\right]^2}$$

- மாறுமையையும் செந்தரவிலகலையும் கண்டுபிடிப்பதற்கான குறுக்குவழி

$$\sigma^2 = \frac{h^2}{N^2}\, N\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^{\,2} - \left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right]^2 ; \qquad \sigma = \frac{h}{N}\sqrt{N\sum_{i=1}^{n} f_i . x_i^{\,2} - \left[\sum_{i=1}^{n} f_i . x_i\right]^2}$$

- மாறுபாட்டுக்கெழு (மாழு)

$$= \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100 \, ; \quad \overline{x} \neq 0$$

- சமமான இடைமமுள்ள தொடர்களில் குறைந்த செந்தரவிலகலுள்ள தொடர் அதிக இயைபானது; அதாவது குறைந்த சிதறலுள்ளது.

வரலாற்றுக்குறிப்பு

புள்ளியியல் மனிதப்பண்பாட்டின் தொடக்கத்திலே இருந்திருககவேண்டும். எகிப்தில், கி.மு. 3050இல் நிகழ்த்திய மக்கட்டொகைக்கணக்கெடுப்பு ஒருவேளை முதலாவதாயிருக்கலாம். இந்தியாவிலும், சுமார் 2000 ஆண்டுகளுக்கு முன்பு, குறிப்பாக சந்திரகுப்புத மௌரியரின் ஆட்சிக்காலத்தில் (கி.மு. 324-300) அலுவலகப்புள்ளியியவிவரங்களை சேகரிக்க ஒரு பயன்றிறனான முறை இருந்திருக்கிறது. பிறப்புக்கும் இறப்புக்குமான தரவுகளை சேகரிக்கும் முறையைப்பற்றி கௌடில்யர் அர்த்தசாத்திரத்தில் (கி.மு. 300) குறிப்பிடுகிறார். அக்குபரின் ஆட்சிக்காலத்தில் நிகழ்ந்த அலுவலக அளக்கைகளைப்பற்றிய ஒரு விரிவான உரையை அபுல் பாசல் எழுதிய அயினி அக்பரியில் காண்கிறோம்.

பிறப்பையும் இறப்பையும்பற்றிய ஆய்வறிதலின் காரணமாக, இலண்டனைச்சேர்ந்த கேப்பிட்டன் இயோவான் கிராண்டு (1620-1674) என்பவரை உயிர்மப்புள்ளியியலின் தந்தை என்கிறோம். யாக்கோபு பெருனூலி (1654-1704) கி.பி. 1713 இல் பதிப்பான உய்மானக்கலை எனும் தன் நூலில் பேரெண்களின் விதியை உரைத்தார்.

புள்ளியியலின் கோட்பாட்டுவளராக்கம் 17ஆம் நூற்றாண்டின் நடுவில் தொடங்கி, அதன் பின்னர் விளையாட்டுக்கும் வாய்ப்புக்குமான கோட்பாடுகள் (அதாவது நிகழ்தகவு) அறிமுகமானபோது தொடர்ந்தது. பிரான்சிசு காலுட்டன் (1822-1921) எனும் ஆங்கிலேயர் உயிரிய அளவீடுகளில் புள்ளியிய முறைகளை பயன்படுத்துவதில் முன்னோடியானார். காரல் பியர்சன் (1857-1936) கைவர்க்கச்சோதனையை கண்டுபிடித்ததாலும் இங்கிலாந்தில் புள்ளியியற்சோதனைக்கூடத்தை நிறுவியதாலும் புள்ளியியலின் வளர்ச்சிக்கு அதிகமாக பங்களித்தார். இக்காலப்புள்ளியியலின் தந்தை என நாமறியும் சர் இரோனால்டு பிசர் (1890-1962) புள்ளியியலை மரபியல், உயிரியவளவீடுகள், கல்வி, விவசாயம் முதலிய பன்மயப்புலங்களில் பயனாக்கினார்.