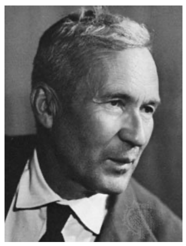
படலம் 16

நிகழ்தகவு

16.1 அறிமுகம்



கோமகோரவு
(1903-1987)

பல தோற்றப்பாடுகளில் நிச்சயமின்மையின் அளவீடாக நிகழ்தகவு என்ற கருத்துருவை முந்தைய பாடங்களில் கற்றிருக்கிறோம். பகடையுருட்டலில் இரட்டைப்படையெண்ணை பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $3/6$ அதாவது $1/2$ என்று கண்டிருக்கிறோம். இங்கு, $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ஆகிய ஆறு சாத்தியமான வருவிளைவுகள் உள்ளன. ‘இரட்டைப்படையெண்ணை பெறுதல்’ என்ற நிகழ்வுக்கு சாதகமான வருவிளைவுகள் $2, 4, 6$ ஆகிய மூன்றும். பொதுவாக, ஒரு நிகழ்வின் நிகழ்தகவைப்பெற அந்த நிகழ்வுக்கு சாதகமான வருவிளைவுகளின் எண்ணிக்கைக்கும் சமவாய்ப்பான மொத்த வருவிளைவுகளின் எண்ணிக்கைக்குமான விகித்ததை காண்கிறோம். இந்த கோட்பாட்டை *நிகழ்தகவின் செவ்வியக்கோட்பாடு* என்றழைக்கிறோம்.

கண்டறிதல்களால் தொகுத்த தரவுகளின் அடிப்படையில் நிகழ்தகவை காண்பதுபற்றி ஒன்பதாம் வகுப்பில் படித்தோம். இது *நிகழ்தகவின் புள்ளிவிவர அணுகுமுறை.*

இரண்டு கோட்பாடுகளிலும் சில கடுமையான இடர்ப்பாடுகள் உள்ளன. சான்றாக, முடிவிலி எண்ணிக்கையான வருவிளைவுகள் உள்ள செயல்பாடுகளுக்கும் பரிசோதனைகளுக்கும் இந்த கோட்பாடுகளை பயனாக்கவியலாது. செவ்வியக்கோட்பாட்டில் எல்லா வருவிளைவுகளும் சமவாய்ப்புள்ளவை என்று எடுகொள்கிறோம். எந்த நிகழ்வுக்கும் மற்றவற்றைவிட அதிக வாய்ப்பு இருக்க எந்தக்காரணமும் இல்லாவிட்டால் நிகழ்வுகள் சமவாய்ப்புடையவை என்பதை நினைவுகொள்க. வேறுவிதமாகச்சொன்னால், எல்லா வருவிளைவுகளும் நிகழ்வதற்கு சமவாய்ப்பு (நிகழ்தகவு) இருப்பதாக எடுகொள்கிறோம். இவ்வாறாக, நிகழ்தகவை வரையறுக்க சமவாய்ப்புள்ள வருவிளைவுகளை பயன்படுத்து கிறோம். இது ஏரணப்படி சரியான வரையறை *அன்று*. இதனால், அ. நி. கோமகோரவு என்ற உருசியக்கணிதர் 1933இல் நிகழ்தகவுக்கான மற்றொரு கோட்பாட்டை வளராக்கினார். அவர் ‘நிகழ்தகவின் அடித்தளம்’ என்ற தன் நூலில் நிகழ்தகவை பொருளுணர சில அடிக்கோள்களை முன்வைத்தார். நிகழ்தகவின் அடிக்கோளணுகுமுறை என்ற இந்த முறையை நாம் இந்த படலத்தில் கற்போம். இந்த அணுகுமுறையை புரிந்துகொள்ள நேர்ந்தவாறான பரிசோதனை, மாதிரிக்கூறுவெளி, நிகழ்வுகள் போன்ற பல சொற்களை அறிய வேண்டும். இவற்றை அடுத்து கற்போம்.

16.2 நேர்ந்தவாறான பரிசோதனைகள்

நம் அன்றாட வாழ்வில் எத்தனைமுறை செய்தாலும் ஒரே விளைவு வரக்கூடிய செயல்களை செய்கிறோம். சான்றாக, ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் தெரியாவிட்டாலும் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $180°$ என்று நிச்சயமாக சொல்லி விடலாம்.

முற்றொருமையான நிலைமைகளில் மீட்செய்யும்போது வெவ்வேறு விளைவுகளைத்தரும் பரிசோதனைச்செயல்களையும் செய்கிறோம். சான்றாக, ஒரு காசை சுண்டும்போது பூவோ தலையோ விழலாம்; ஆனால் எது விழும் என்பது தெரியாது. இவ்வாறான பரிசோதனைகளை *நேர்ந்தவாறான பரிசோதனைகள்* என்கிறோம்.

ஒரு பரிசோதனை கீழ்க்காணும் இரண்டு நிலைமைகளை நிறைவேற்றினால் அது ஒரு நேர்ந்தவாறான பரிசோதனை:

(அ) ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட வருவிளைவுகள் சாத்தியம்.

(ஆ) வருவிளைவை முன்னறிய இயலாது.

இதன்படி காசுச்சுண்டல் நேர்ந்தவாறான பரிசோதனையா என்பதை சரிபார்த்துக்கொள்க.

இந்தப்படலத்தில், வேறுவிதமாகச்சொல்லாவிட்டால், பரிசோதனை நேர்ந்தவாறான பரிசோதனையையே குறிக்கும்.

16.2.1 வருவிளைவுகளும் மாதிரிக்கூறுவெளியும்

ஒரு நேர்ந்தவாறான பரிசோதனையின் சாத்தியமான விளைவை வருவிளைவு என்கிறோம்.

பகடையுருட்டும் பரிசோதனையை கருதுக. இந்த பரிசோதனையின் வருவிளைவுகள் 1, 2, 3, 4 , 5 , 6 ஆகியவை. இந்த வருவிளைவுகளின் கணமான $\{1,2,3,4,5,6\}$ என்பதை இந்த பரி சோதனையின் மாதிரிக்கூறுவெளி என்கிறோம்.

அதாவது, ஒரு நேர்ந்தவாறான பரிசோதனை யின் சாத்தியமான எல்லா வருவிளைவுகளின் கணத்தை அந்த பரிசோதனையின் *மாதிரிக்கூறு வெளி* என்கிறோம். மாதிரிக்கூறுவெளியை S என்று குறிப்பது வழக்கம்.

மாதிரிக்கூறுவெளியின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் மாதிரிக்கூறுபுள்ளி என்கிறோம். வேறுவிதமாகச்சொன்னால், நேர்ந்தவாறான பரிசோதனையின் ஒவ்வொரு வருவிளைவும் ஒரு மாதிரிக்கூறுபுள்ளி. சில சான்றுகளை காண்போம்.

சான்று 1 இரண்டு காசுகளை ஒருமுறை சுண்டுவதன் மாதிரிக்கூறுவெளியை காண்க.

தீர்வு இரண்டு காசுகளையும் வேறுபடுத்த முதற்காசு இரண்டாங்காசு என்போம். எந்தக்காசும் தலையாகவோ பூவாகவோ விழலாம் என்பதால் சாத்தியமான வருவிளைவுகள்

இரண்டு காசுகளும் தலை (த, த): தத

முதற்காசு தலையும் இரண்டாங்காசு பூவும் (த, பூ): தபூ

முதற்காசு பூவும் இரண்டாங்காசு தலையும் (பூ, த): பூத

இரண்டு காசுகளும் பூ(பூ, பூ): பூபூ

இதனால், மாதிரிக்கூறுவெளி, $S = \{$தத, தபூ, பூத, பூபூ$\}$

குறிப்பு இந்த பரிசோதனையின் வருவிளைவு கள் தலை, பூ ஆகியவற்றின் முறைமைச் சோடி. எளிமைக்காக, முறைமைச்சோடியில் காற்புள்ளியை எழுதவில்லை.

சான்று 2 இரண்டு பகடைகளை ஒருமுறை உருட்டும் பரிசோதனையின் மாதிரிக்கூறு வெளியை காண்க. இந்த மாதிரிக்கூறுவெளியிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

தீர்வு முதற்பகடையில் 1உம் இரண்டாம் பகடையில் 2உம் விழுந்தால் அதை $(1,2)$ என்றும் முதலாவதில் 3 விழுந்து இரண்டாவதில் 5 விழுவதை $(3,5)$ என்றும் குறிப்போம். பொதுவாக, ஒவ்வொரு வருவிளைவையும் (x, y) என்ற ஒரு முறைமைச்சோடியால் குறிக்கலாம்; இங்கு x முதற்பகடையில் விழுந்த எண்ணையும் y இரண்டாவதில் விழுந்ததையும் குறிக்கின்றன. எனவே மாதிரிக்கூறுவெளி

$S = \{(x, y): x$ முதற்பகடையெண், y இரண்டாம்பகடையெண்$\}$

இந்தக்கணத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $6 \times 6 = 36$. வெளிப்படையாக, இந்தக்கணம்

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)$$

சான்று 3 கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு பரிசோதனையிலும் பொருத்தமான மாதிரிக்கூறுவெளியை கூறுக.

(அ) ஒரு பையனின் பையில் ஒரு ஒருருவாவில்லை, ஒரு இரண்டுருவாவில்லை, ஒரு ஐந்தருவாவில்லை ஆகியவை இருக்கின்றன. இவற்றுள் இரண்டை பையன் பையிலிருந்து ஒன்றன்பின்னொன்றாக எடுக்கிறான்.

(ஆ) போக்குவரத்து அதிகமான ஒரு நெடுஞ்சாலையில் ஓராண்டில் நிகழும் விபத்துகளின் எண்ணிக்கையை ஒருவர் குறித்துவருகிறார்.

தீர்வு (அ) ஒருருவாவில்லையை ஒ என்றும் இரண்டுருவாவில்லையை இ என்றும் ஐந்துருவாவில்லையை ஐ என்றும் குறிப்போம். பையன் முதலில் எடுக்கும் வில்லை ஒ, இ, ஐ ஆகிய மூன்றில் எதுவுமிருக்கலாம். ஒவ்வாயிருந்தால், இரண்டாவது வில்லை இய்யாகவோ ஐயாகவோ இருக்கலாம்; இதனால் இரண்டு எடுப்புகளின் விளைவு (ஒ,இ)ய்யாகவோ (ஒ,ஐ)யாகவோ இருக்கலாம்.

இதைப்போலவே முதலெடுப்பு இய்க்கு நிகராக இரண்டாமெடுப்பு ஒவ்வாகவோ ஐயாகவோ இருக்கலாம் என்பதால் விளைவுகள் (இ,ஒ)வ்வாகவோ (இ,ஐ)யாகவோ இருக்கலாம்.

இறுதியாக, முதலெடுப்பு ஐக்கு நிகராக (ஐ,ஒ), (ஐ,இ) ஆகியவை உள்ளன.

எனவே, மாதிரிக்கூறுவெளி $S = \{($ஒ, இ$), ($ஒ, ஐ$), ($இ, ஒ$), ($இ, ஐ$), ($ஐ, ஒ$), ($ஐ, இ$)\}$

(ஆ) அதிகப்போக்குவரத்தான நெடுஞ் சாலையில் ஓராண்டில் நிகழும் விபத்துகளின் எண்ணிக்கை சுழியமாயிருக்கலாம் (விபத்து ஏற்படவில்லை); 1, 2 போன்ற எந்தவொரு நேர்ம முழுவெண்ணாகவும் இருக்கலாம். எனவே, இந்த பரிசோதனைக்கு தொடர்பான மாதிரிக்கூறு வெளி $S = \{0,1,2, \ldots\}$.

சான்று 4 ஒரு காசைச்சுண்டுகிறோம். தலை விழுந்தால் 3 நீலப்பந்துகளும் 4 வெள்ளைப் பந்துகளும் அடங்கிய ஒரு பையிலிருந்து ஒரு பந்தை எடுக்கிறோம். பூ விழுந்தால் ஒரு பகடையை உருட்டுகிறோம். இந்த பரிசோத னையின் மாதிரிக்கூறுவெளியை விவரிக்க.

தீர்வு நீலப்பந்துகளை நீ$_1$, நீ$_2$, நீ$_3$ என்றும் வெள்ளைப்பந்துகளை வெ$_1$, வெ$_2$, வெ$_3$, வெ$_4$

என்றும் குறிப்போம். அப்படியெனில், பரிசோதனையின் மாதிரிக்கூறுவெளி

$$S = \left\{ \begin{matrix} தநீ_1, தநீ_2, தநீ_3, தவெ_1, தவெ_2, தவெ_3, \\ தவெ_4, பூ1, பூ2, பூ3, பூ4, பூ5, பூ6 \end{matrix} \right\}$$

இங்கு, தநீ$_i$ தலைவிழுந்து ஒரு iஆம் நீலப்பந்து வருவதைக்குறிக்கிறது; தவெ$_i$ தலைவிழுந்து iஆம் வெள்ளைப்பந்து வருவதை குறிக்கிறது. அதைப்போலவே, பூi பூ விழுந்தபின் பகடையில் i விழுவதை குறிக்கிறது.

சான்று 5 தலை விழும்வரை ஒரு காசை மீட்சுண்டும் பரிசோதனையை கருதுக. மாதிரிக்கூறுவெளியை விவரிக்க.

தீர்வு இந்த பரிசோதனையில் தலை முதலிலே வரலாம், இரண்டாவதாக வரலாம், மூன்றாவதாக வரலாம், எத்தனையாவது சுண்டலில் வேண்டுமானாலும் வரலாம். எனவே, தேவையான மாதிரிக்கூறுவெளி

$$S = \{த, பூத, பூபூத, பூபூபூத, பூபூபூபூத, \dots\}$$

பயிற்சி 16.1

1முதல் 7வரையான ஒவ்வொன்றிலும் குறிப்பிட்ட பரிசோதனைக்கான மாதிரிக்கூறுவெளியை விவரிக்க.

1. ஒரு காசை மூன்றுமுறை சுண்டுதல்
2. ஒரு பகடையை இரண்டுமுறை வீசல்
3. ஒரு காசை நான்குமுறை சுண்டல்
4. ஒரு காசைச்சுண்டி ஒரு பகடையை வீசல்
5. ஒரு காசை வீசி, அதில் தலை விழுந்தால் மட்டும் ஒரு பகடையை வீசல்
6. இரண்டு சிறுவன்களும் இரண்டு சிறுமிகளும் X என்ற அறையிலும் ஒரு சிறுவனும் 3 சிறுமிகளும் Y என்ற அறையிலும் இருக்கின்றனர். ஒரு அறையை தேர்ந்தெடுத்து அதிலிருந்து ஒரு சிறுவரை தேர்ந்தெடுத்தல்.
7. ஒரு சிவப்புப்பகடை, ஒரு வெள்ளைப்பகடை, ஒரு நீலப்பகடை ஆகியவற்றை ஒரு பையில் வைக்கிறோம். ஒரு பகடையை நேர்ந்தவாறாக தேர்ந்தெடுத்து அதை உருட்டி அதன் நிறத்தையும் அதன் மேன்முகத்திலுள்ள எண்ணையும் குறிக்கிறோம்.
8. ஒரு பரிசோதனையில் இரண்டு பிள்ளைகளுள்ள குடும்பங்களில் ஆண்பெண் கூறடக்கத்தை குறிக்கிறோம்.
   a. ஒரு பிள்ளை ஆணா பெண்ணா என்பதை அவர்களது பிறப்புமுறைமையில் நாம் அறிய விரும்பினால், மாதிரிக்கூறுவெளி என்ன?
   b. குடும்பத்திலுள்ள பெண்பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கையை அறிய விரும்பினால், மாதிரிக்கூறுவெளி என்ன?
9. ஒரு பெட்டியில் ஒரேவகையான ஒரு சிவப்புப்பந்தும் 3 வெள்ளைப்பந்துகளும் உள்ளன. இரண்டு பந்துகளை மீள்வைப்பின்றி நேர்ந்தவாறாக எடுக்கிறோம். இந்த பரிசோதனைக்கு மாதிரிக்கூறுவெளியை எழுதுக.
10. ஒரு பரிசோதனையில் ஒரு காசைச்சுண்டி, தலை விழுந்தால் அதை மீண்டும் சுண்டுகிறோம்; முதற்சுண்டலில் பூ விழுந்தால் ஒரு பகடையை ஒருமுறை உருட்டுகிறோம். மாதிரிக்கூறுவெளியை காண்க.
11. ஒரு குமிழத்தொகுதியிலிருந்து மூன்று குமிழங்களை நேர்ந்தவாறாக தேர்கிறோம். ஒவ்வொரு குமிழத்தையும் சோதனையிட்டு பழுதானது என்றோ பழுதற்றது என்றோ வகைப்படுத்துகிறோம். இந்த பரிசோதனையின் மாதிரிக்கூறுவெளியை எழுதுக.
12. ஒரு காசை சுண்டுகிறோம். வருவிளைவு தலை எனில் ஒரு பகடையை வீசுகிறோம். பகடை ஒரு இரட்டைப்படையெண்ணை காட்டினால் மீண்டும் பகடையை உருட்டுகிறோம். இந்த பரிசோதனைக்கு மாதிரிக்கூறுவெளி என்ன?
13. 1, 2, 3, 4 என்ற எண்களை தனித்தனியே நான்கு துண்டுத்தாள்களில் எழுதுகிறோம். துண்டுகளை ஒரு பெட்டியில் போட்டு நன்றாக குலுக்குகிறோம். ஒருவர் பெட்டியிலிருந்து இரண்டு துண்டுச்சீட்டுகளை ஒன்றன்பின்னனொன்றாக மீள்வைக்காமல் எடுக்கிறார். இந்த பரிசோதனைக்கு மாதிரிக்கூறுவெளியை விவரிக்க.
14. ஒரு பரிசோதனையில் ஒரு பகடையை உருட்டி, பகடையெண் இரட்டைப்படையெண் எனில் ஒரு காசை ஒரு முறையும் ஒற்றைப்படை எனில் இருமுறையும் சுண்டுகிறோம். இந்த பரிசோதனைக்கு மாதிரிக்கூறுவெளியை எழுதுக.
15. ஒரு காசை சுண்டுகிறோம். இது பூவைக்காட்டினால், 2 சிவப்புப்பந்துகளும் 3 கருப்புப்பந்துகளுமுள்ள ஒரு பெட்டியிருந்து ஒரு பந்தை எடுக்கிறோம். தலையைக்காட்டினால், ஒரு பகடையை வீசுகிறோம். இந்த பரிசோதனைக்கு மாதிரிக்கூறுவெளியை காண்க.
16. ஒரு பகடையை ஆறு தோன்றும்வரை மீள்வீசுகிறோம். இந்த பரிசோதனையின் மாதிரிக்கூறுவெளி என்ன?

16.3 நிகழ்வு

நேர்ந்தவாறான பரிசோதனையையும் ஒரு பரிசோதனையுடன் தொடர்பான மாதிரிக்கூறு வெளியையும்பற்றி அறிந்தோம். மாதிரிக்கூறு வெளி பரிசோதனையுடன் தொடர்புடைய எல்லாக்கேள்விகளுக்குமான ஒரு அனைத்துவக் கணமாக செயலாற்றுகிறது.

ஒரு காசை இருமுறை சுண்டுதவதை கருதுக. இதனுடன் தொடர்புடைய மாதிரிக்கூறுவெளி $S = \{$தத, தபூ, பூத, பூபூ$\}$.

இப்போது, முழுச்சரியாக ஒரு தலை விழுவதற்கான வருவிளைவுகளிலே நம் ஆர்வம் இருப்பதாக கொள்வோம். S இன் தபூ, பூத ஆகிய இரண்டு உறுப்புகள் மட்டுமே இவ்வாறு நிகழ்வதற்கு நிகரானவை என்று காண்கிறோம். இந்த இரண்டு உறுப்புகளும் $E = \{$தபூ, பூத$\}$ என்ற கணத்தில் அடங்குகின்றன.

E என்ற கணம் Sஇன் உட்கணம் என்பது நாம் அறிந்தது. இதைப்போலவை Sஇன் ஒவ்வொரு உட்கணமும் ஒரு நிகழ்வுக்கு நிகராவதை நாம் கீழ்க்கண்டவாறு காணலாம்.

நிகழ்வின் விவரம்	Sஇன் நிகரான உட்கணம்
பூக்களின் எண்ணிக்கை முழுச்சரியாக 2	$A = \{$பூ, பூ$\}$
பூக்களின் எண்ணிக்கை மீச்சிறுமமாக ஒன்று	$B = \{$தபூ, பூத, பூபூ$\}$
தலைகளின் எண்ணிக்கை மீப்பெருமமாக ஒன்று	$C = \{$தபூ, பூத, பூபூ$\}$
இரண்டாம் வீச்சு தலையன்று	$D = \{$தபூ, பூபூ$\}$
பூக்களின் எண்ணிக்கை மீப்பெருமமாக இரண்டு	$S = \{$தத, தபூ, பூத, பூபூ$\}$
பூக்களின் எண்ணிக்கை இரண்டுக்குமேல்	ϕ

மேற்கண்ட உரையிலிருந்து மாதிரிக்கூறு வெளியின் ஒரு உட்கணம் ஒரு நிகழ்வுக்கு நிகராவதும் ஒரு நிகழ்வு மாதிரிக்கூறுவெளியின் ஒரு உட்கணத்துக்கு நிகராவதும் தெளிவாகிறது. இதனால், நிகழ்வை கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கிறோம்.

வரையறை ஒரு மாதிரிக்கூறுவெளியின் E என்ற எந்தவொரு உட்கணமும் ஒரு *நிகழ்வு.*

16.3.1 ஒரு நிகழ்வு நிகழ்தல்

ஒரு பகடையுருட்டும் பரிசோதனையை கருதுக. ' 4 ஐவிடக்குறைவான எண் விழுகிறது' என்ற நிகழ்வை E என்று குறிப்போம். உண்மையில் பகடையில் 1 விழுந்தால், E என்ற நிகழ்வு நிகழ்ந்துவிட்டது என்கிறோம். சொல்லப்போனால், வருவிளைவு 2ஓ 3ஓ எனிலும் E நிகழ்ந்தது என்கிறோம்.

அதாவது ஒரு பரிசோதனையின் வருவிளைவை ω என்று குறித்தால் மாதிரிக்கூறு வெளியின் E என்ற நிகழ்வு நிகழ்வது $\omega \in E$ என்பதை உள்ளுரைக்கிறது; $\omega \notin E$ எனில் E நிகழவில்லை என்கிறோம்.

16.3.2 நிகழ்வின் வகைகள்

நிகழ்வுகளை அவற்றிலுள்ள உறுப்புகளின் அடிப்படையில் பல வகைகளாக பாகுபடுத்தலாம்.

(அ) சாத்தியமற்ற நிகழ்வுகளும் நிச்சயமான நிகழ்வுகளும்

மாதிரிக்கூறுவெளியும் (S) வெற்றுக் கணமும் (ϕ) நிகழ்வுகளை குறிக்கின்றன. உண்மையில், ϕ *சாத்தியமற்ற நிகழ்வு* என்றும் S *நிச்சயமான நிகழ்வு* என்றும் சொல்கிறோம்.

இவற்றை புரிந்துகொள்ள பகடையுருட்டும் பரிசோதனையை கருதுவோம். தொடர்பான மாதிரிக்கூறுவெளி

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

E என்ற நிகழ்வு 'பகடையுருட்டலில் விழும் எண் 7இன் மடங்கு' என்று கொள்வோம். இந்த நிகழ்வுடன் தொடர்பான உட்கணத்தை எழுதிப்பாருங்கள். நிகழ்விலுள்ள நிலைமையை எந்த வருவிளைவும் நிறைவேற்றாதது தெளிவு. இதனால், இந்த நிகழ்வுக்கு வெற்றுக்கணமே நிகரானது என்கிறோம். வேறுவிதமாகச் சொன்னால், பகடையுருட்டலில் 7இன் மடங்கை பெறுவது சாத்தியமன்று என்கிறோம். எனவே, $E = \phi$ என்பது சாத்தியமற்ற நிகழ்வு.

இப்போது F என்ற மற்றொரு நிகழ்வாக 'விழும் எண் ஒற்றைப்படையானதோ இரட்டைப் படையானதோ' என்பதை கருதுவோம்.

$F = \{12,3,4,5,6\}$

என்பது தெளிவு. அதாவது பரிசோதனையின் எல்லா வருவிளைவுகளும் F நிகழ்வதை உறுதிசெய்கின்றன. எனவே, $F = S$ என்பது நிச்சயமான நிகழ்வு.

(ஆ) எளிய நிகழ்வு

ஒரு நிகழ்வில் மாதிரிக்கூறுவெளியின் ஒற்றைப்புள்ளி மட்டும் இருந்தால், அது *எளிய நிகழ்வு.* என்கிறோம்.

n உறுப்புகள் அடங்கிய மாதிரிக்கூறுவெளி யில் முழுச்சரியாக n எளிய நிகழ்வுகள் உள்ளன.சான்றாக, இரண்டு காசுகளை சுண்டும் பரிசோதனையில் மாதிரிக்கூறுவெளி

$$S = \{தத, தபூ, பூத, பூபூ\}$$

இந்த மாதிரிக்கூறுவெளியில் நான்கு எளிய நிகழ்வுகள் உள்ளன. அவை

$$E_1 = \{தத\}, E_2 = \{தபூ\}, E_3 = \{பூத\}, E_4 = \{பூபூ\}$$

(இ) கூட்டுநிகழ்வு

ஒரு நிகழ்வில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட எளிய நிகழ்வுகள் இருந்தால் அதை ஒரு கூட்டுநிகழ்வு என்கிறோம்.

சான்றாக, 'ஒரு காசை மூன்றுமுறை சுண்டும்' பரிசோதனையில்

E: முழுச்சரியாக ஒரு தலை விழல்

F: மீக்குறைவாக ஒரு தலை விழல்

G: மீயதிகமாக ஒரு தலை விழல்

இன்ன பிற நிகழ்வுகள் கூட்டுநிகழ்வுகள். இந்த நிகழ்வுகளுடன் தொடர்பான Sஇன் உட்கணங்கள்

$$E = \{தபூபூ, பூதபூ, பூபூத\}$$

$$F = \{தபூபூ, பூதபூ, பூபூத, ததபூ, தபூத, பூதத, தத\}$$

$$G = \{பூபூபூ, பூதபூ, தபூபூ, பூபூத\}$$

மேற்கண்ட ஒவ்வொரு உட்கணத்திலும் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாதிரிக்கூறுபுள்ளி இருப்பதால் இவையெல்லாம் கூட்டுநிகழ்வுகள்.

16.3.3 நிகழ்வுகளின் குறிக்கணிதம்

கணங்களைப்பற்றிய படலத்தில் கணங்களை ஒன்றிப்பு, இடைவெட்டு, வேறுபாடு, நிரப்பு ஆகிய வெவ்வேறு வழிகளில் சேர்ப்பதைப்பற்றி படித்திருக்கிறோம். அதைப்போலவே நிகழ்வுகளையும் நிகரான கணக்குறியீடுகளால் சேர்க்கலாம்.

S என்ற மாதிரிக்கூறுவெளியுள்ள ஒரு பரிசோதனையில் A, B, C ஆகிய நிகழ்வுகள் இருப்பதாக கொள்வோம்.

(அ) நிரப்பநிகழ்வு

A என்ற ஒவ்வொரு நிகழ்வுக்கும் நிகராக A' என்ற மற்றொரு நிகழ்வு இருக்கிறது. இதை 'A அன்று' என்றும் சொல்கிறோம்.

சான்றாக, 'மூன்று காசுகளை சுண்டல்' என்ற பரிசோதனையை கருதுவோம். இதனுடன் தொடர்பான மாதிரிக்கூறுவெளி

$$S = \{ததத, ததபூ, தபூத, பூதத, தபூபூ, பூதபூ, பூபூத, பூபூபூ\}$$

இந்த வெளியில், 'ஒரு பூ மட்டும் விழும்' நிகழ்வு

$$A = \{தபூத, ததபூ, பூதத\}$$

தபூபூ என்ற வருவிளைவில் A நிகழவில்லை என்பது தெளிவு. ஆனால் 'A அன்று' என்ற நிகழ்வு நிகழ்வதாக சொல்லலாம். இவ்வாறு, A யில் இல்லாத ஒவ்வொரு வருவிளைவிலும் 'A அன்று' நிகழ்வதாக சொல்கிறோம்.

எனவே, Aயின் நிரப்பநிகழ்வான 'A அன்று' என்பது

$$A' = \{ததத, தபூபூ, பூதபூ, பூபூத, பூபூபூ\}$$

அதாவது,

$$A' = \{\omega : \omega \in S, \omega \notin A\} = S - A$$

(ஆ) Aயோ Bயோ என்ற நிகழ்வு

A, B ஆகிய இரண்டு கணங்களின் ஒன்றிப்பை $A \cup B$ என்று குறித்ததையும் அதில் A யிலோ B யிலோ இரண்டிலுமோ அடங்கிய உறுப்புகள் அடங்குவதையும் நினைவுகொள்க.

A, B என்ற கணங்கள் ஒரு மாதிரிக்கூறு வெளியின் இரண்டு நிகழ்வுகளாயிருக்கும்போது, $A \cup B$ என்ற நிகழ்வு ''Aயோ Bயோ இரண்டுமோ' என்பதை குறிக்கிறது. $A \cup B$ என்ற நிகழ்வை 'Aயோ Bயோ' என்கிறோம். அதாவது

$$A\text{யோ } B\text{யோ என்ற நிகழ்வு} = A \cup B$$
$$= \{\omega : \omega \in A\text{யோ } \omega \in B\text{யோ}\}$$

(இ) Aயும் Bயும் என்ற நிகழ்வு

இரண்டு கணங்களின் இடைவெட்டான $A \cap B$ என்பது Aயிலும் Bயிலும் பொதுவாக உள்ள உறுப்புகளின் கணம், என்பதை நாம் அறிவோம். அதாவது $A \cap B$யின் ஒவ்வோருறுப்பும் Aயிலும் இருக்கிறது; Bயிலும் இருக்கிறது.

Aயும் Bயும் இரண்டு நிகழ்வுகள் எனில் $A \cap B$ என்ற கணம் 'A யும் B யும்' என்ற நிகழ்வை குறிக்கிறது. அதாவது

$$A \cap B = \{\omega : \omega \in A, \omega \in B\}$$

சான்றாக, பகடையை இரண்டுமுறை வீசும் பரிசோதனையில், A 'முதல் வீச்சில் விழுவது 6' என்ற நிகழ்வாகவும் B 'இரண்டு வீச்சுகளிலும் விழுந்தவற்றின் கூட்டுத்தொகை மீச்சிறுமமாக 11' என்ற நிகழ்வாகவும் கொள்வோம். அப்படியெனில்

$$A = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$B = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$$

எனவே, $A \cap B = \{(6,5), (6,6)\}$. இந்தக்கணம் 'முதல்வீச்சில் விழுவது 6உம் இரண்டு வீச்சுகளில் விழுபவற்றின் கூட்டுத்தொகை மீச்சிறுமமாக 11உம் ' என்ற நிகழ்வுக்கு நிகராவதை நோக்குக.

(ஈ) 'Bயற்ற A' என்ற நிகழ்வு

$A - B$ என்ற கணம் Aயில் உள்ளதும் Bயில் இல்லாததுமான உறுப்புகளின் கணம் என்பதை அறிவோம். எனவே, $A - B$ என்ற கணம் 'A, B அன்று' என்ற நிகழ்வை, அதாவது 'B யற்ற A' என்ற நிகழ்வை குறிக்கலாம்.

$$A - B = A \cap B'$$

என்பதை நாம் **ஏற்கெனவே** அறிவோம்.

சான்று 6 ஒரு பகடையுருடற்பரிசோதனையை கருதுக. A ஒரு பகாவெண்ணைப்பெறும் நிகழ்வும் B ஒரு ஒற்றைப்படையெண்ணைப் பெறும் நிகழ்வும் என்க. (அ) Aயோ Bயோ (ஆ)

Aயும் Bயும் (இ) Bயற்ற A (ஈ) A அன்று ஆகிய நிகழ்வுகளைக்குறிக்கும் கணங்களை எழுதுக.

தீர்வு இங்கு $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{1, 3, 5\}$

(அ) 'Aயோ Bயோ' $= A \cup B = \{1,2,3,5\}$

(ஆ) 'Aயும் Bயும்' $= A \cap B = \{3,5\}$

(இ) 'Bயற்ற A' $= A - B = \{2\}$

(ஈ) 'A அன்று' $= A' = \{1,4,6\}$

16.3.4 ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் நிகழ்வுகள்

பகடையுருட்டற்பரிசோதனையில் மாதிரிக் கூறுவெளி $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. ஒற்றைப்படையெண் தோன்றும் A என்ற நிகழ்வையும் இரட்டைப்படையெண் தோன்றும் B என்ற நிகழ்வையும் கருதுக.

A என்ற நிகழ்வு B என்ற நிகழ்வை தவிர்க்கிறது; திருப்பியவாறும். அதாவது, A, B ஆகிய இரண்டு நிகழ்வுகளும் சேர்ந்து நிகழக்கூடிய வருவிளைவுகள் இல்லை. இங்கு

$$A = \{1, 3, 5\}, \quad B = \{2, 4, 6\}$$

$A \cap B = \phi$ என்பது தெளிவு. அதாவது, Aயும் Bயும் வெட்டாக்கணங்கள்.

பொதுவாக, A, B என்ற இரண்டு நிகழ்வுகளுள் ஒன்று நிகழ்வது மற்றது நிகழ்வதை தவிர்த்தால் அதாவது இவை சேர்ந்து நிகழவியலாது எனில் இவை *ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும்* நிகழ்வுகள் என்கிறோம். இந்நிலையில் A B என்ற கணங்கள் வெட்டாக்கணங்கள்.

ஒரு பகடையை உருட்டும் பரிசோதனையில் ஒற்றைப்படையெண் தோன்றும் A என்ற நிகழ்வையும் 4ஐவிடக்குறைந்த எண் தோன்றும் B என்ற நிகழ்வையும் கருதுக.

$$A = \{1, 3, 5\}, \quad B = \{1,2,3\}$$

என்பது தெளிவு. இப்போது $3 \in A, 3 \in B$. எனவே, Aயும் Bயும் ஒன்றையொன்று தவிர்ப்பவை அல்ல.

குறிப்பு ஒரு மாதிரிக்கூறுவெளியின் எளிய நிகழ்வுகள் எப்போதும் ஒன்றையொன்று தவிர்ப்பவை.

16.3.5 அனைத்தளாவிய நிகழ்வுகள்

ஒரு பகடையை வீசும் பரிசோதனையை கருதுக. இங்கு $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. கீழ்க்கண்ட நிகழ்வுகளை வரையறுப்போம்.

A: 4ஐவிட குறைவான எண் விழல்

B : 2ஐவிட அதிகமானதும் 5ஐவிட குறைவானதுமான எண் விழல்

C: 4ஐவிட அதிகமான எண் விழல்

அப்படியெனில், இந்த நிகழ்வுகள்

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{3,4\}, \quad C = \{5, 6\}$$

இப்போது $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} \cup \{5, 6\} = S$ என்பதை நோக்குக. இவ்வாறான A, B, C ஆகிய நிகழ்வுகளை அனைத்தளாவிய நிகழ்வுகள் என்கிறோம். பொதுவாக, S என்ற மாதிரிக்கூறு வெளியின் $E_1, E_2, \dots E_n$ ஆகிய நிகழ்வுகள்

$$E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$$

என்றவாறு இருந்தால், $E_1, E_2, \dots E_n$ ஆகியவற்றை *அனைத்தளாவிய நிகழ்வுகள்* என்கிறோம். வேறுவிதமாகச்சொன்னால், பரிசோதனையை நிகழ்த்தும்போது $E_1, E_2, \dots E_n$ ஆகியவற்றுள் மீக்குறைவாக ஒன்று நிகழ்வது தேவை எனில் இவற்றை அனைத்தளாவிய நிகழ்வுகள் என்கிறோம்.

மேலும், $E_i \cap E_j = \phi,\ j \neq i$, அதாவது $E_1, E_2, \dots E_n$ ஆகியவை சோடிகளாக வெட்டாநிகழ்வுகள் எனில் இவற்றை *ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் அனைத்தளாவிய நிகழ்வுகள்* என்கிறோம்.

சான்று 7 இரண்டு பகடைகளை வீசி பகடைகளில் மேல்வரும் எண்களின் கூட்டுத்தொகையை நோக்குகிறோம். இந்தப்பரிசோதனையின் கீழ்க்காணும் நிகழ்வுகளை கருதுவோம்.

A: கூட்டுத்தொகை இரட்டைப்படை

B: கூட்டுத்தொகை 3இன் மடங்கு

C: கூட்டுத்தொகை 4ஐவிட குறைவானது

D: கூட்டுத்தொகை 11ஐவிட அதிகமானது

இவற்றுள் எந்த சோடிநிகழ்வுகள் ஒன்றையொன்று தவிர்ப்பவை?

தீர்வு மாதிரிக்கூறுவெளியில் 36 உறுப்புகள் உள்ளன. $S = \{(x, y): x, y = 1,2,3,4,5,6\}$. அப்படியெனில்

$$A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$

$$B = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), (3, 3), (2, 4), (4, 2) (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)(6, 6)\}$$

$$C = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2)\}$$

$$D = \{(6, 6)\}$$

இதிலிருந்து

$$A \cap B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)\} \neq \phi$$

என்று காண்கிறோம். எனவே, A, B ஒன்றையொன்று தவிர்ப்பவை அல்ல. இதைப்போலவே,

$$A \cap C \neq \phi, A \cap D \neq \phi, B \cap C \neq \phi, B \cap D \neq \phi$$

என்பதால், $(A, C), (A, D), (B, C), (B, D)$ ஆகிய நிகழ்வுச்சோடிகளும் ஒன்றையொன்று தவிர்ப்பவை அல்ல.

ஆனால், $C \cap D = \phi$ என்பதால் C யும் D யும் ஒன்றையொன்று தவிர்ப்பவை.

சான்று 8 ஒரு காசை மூன்றுமுறை சுண்டுகிறோம். கீழ்க்காணும் நிகழ்வுகளை கருதுக.

A: தலை விழவில்லை

B: முழுச்சரியாக ஒரு தலை விழுகிறது

C: மீக்குறைவாக இரண்டு தலைகள் விழுகின்றன

இவை ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் அனைத்தளாவிய நிகழ்வுகளா?

தீர்வு இந்த பரிசோதனையின் மாதிரிக்கூறு வெளி $S = \{\text{ததத, ததபூ, தபூத, பூதத, தபூபூ, பூதபூ, பூபூத, பூபூபூ}\}$

$A = \{\text{பூபூபூ}\}$, $B = \{\text{தபூபூ, பூதபூ, பூபூத}\}$, $C = \{\text{ததபூ, தபூத, பூதத, ததத}\}$

$A \cup B \cup C = \{\text{பூபூபூ, தபூபூ, பூதபூ, பூபூத, ததபூ, தபூத, பூதத, ததத}\} = S$

எனவே, A, B, C ஆகியவை அனைத்தளாவிய நிகழ்வுகள். மேலும்

$A \cap B = \phi,\ A \cap C = \phi,\ B \cap C = \phi$

எனவே, இந்த நிகழ்வுகள் சோடியாக வெட்டாநிகழ்வுகள். அதாவது இவை ஒன்றையொன்று தவிர்ப்பவை. இவ்வாறு, A, B, C ஆகியவை ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் அனைத்தளாவிய நிகழ்வுகள்.

பயிற்சி 16.2

1. ஒரு பகடையை உருட்டுகிறோம். E 4 விழும் நிகழ்வும் F இரட்டைப்படையெண் விழும் நிகழ்வும் என்க. Eயும் Fஉம் ஒன்றையொன்று தவிர்பனவா?
2. ஒரு பகடையை வீசுகிறோம். கீழ்க்காணும் நிகழ்வுகளை விவரிக்க
   a. A: 7ஐவிட குறைவான எண்
   b. B: 7ஐவிட அதிகமான எண்
   c. C: 3இன் மடங்கு
   d. D: 4ஐவிட குறைந்த எண்
   e. E: 4விட உயர்ந்த இரட்டைப்படையெண்
   f. F: 3ஐவிடக்குறையாத எண்

   மேலும், $A \cup B, A \cap B, B \cup C, E \cap F, D \cap E, A - C, D - E, E \cap F', F'$ ஆகியவற்றை காண்க.
3. ஒரு பரிசோதனையில் ஒரு சோடி பகடைகளை உருட்டி மேலெழும் எண்களை குறிக்கிறோம். கீழ்க்காணும் நிகழ்வுகளை விவரிக்க.

   A: கூட்டுத்தொகை 8ஐவிட அதிகம்

   B: ஏதாவதொரு பகடையில் 2 விழுகிறது

   C: கூட்டுத்தொகை மீக்குறைவாக 7உம் 3இன் மடங்கும்

   இந்த நிகழ்வுகளின் எந்தச்சோடிகள் ஒன்றையொன்று தவிர்ப்பவை?
4. மூன்று காசுகளை ஒருமுறை சுண்டுகிறோம். A மூன்று தலைகள் விழும் நிகழ்வையும், B இரண்டு தலைகளும் ஒரு பூவும் விழும் நிகழ்வையும், C மூன்று பூக்கள் விழும் நிகழ்வையும் D முதற்காசில் தலை விழும் நிகழ்வையும் குறிக்கின்றன. எந்த நிகழ்வுகள்
   a. ஒன்றையொன்று தவிர்ப்பவை?
   b. எளிய நிகழ்வுகள்?
   c. கூட்டுநிகழ்வுகள்?
5. மூன்று காசுகளை வீசுகிறோம். கீழ்க்காண்பவற்றை விவரிக்க.
   a. ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் இரண்டு நிகழ்வுகள்
   b. ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் அனைத்தளாவிய மூன்று நிகழ்வுகள்
   c. ஒன்றையொன்று தவிர்க்காத இரண்டு நிகழ்வுகள்
   d. ஒன்றையொன்று தவிர்ப்பனவும் அனைத்தளாவியதாக இல்லாததுமான இரண்டு நிகழ்வுகள்
   e. ஒன்றையொன்று தவிர்ப்பனவும் அனைத்தளாவியதாக இல்லாததுமான மூன்று நிகழ்வுகள்
6. இரண்டு பகடைகளை வீசுகிறோம். A, B, C என்று நிகழ்வுகள் பின்வறுமாறு.

   A: முதற்பகடையில் இரட்டைப்படை எண்ணை பெறுவது

   B: முதற்பகடையில் ஒற்றைப்படை எண்ணை பெறுவது

   C: பகடைகளின் எண்களின் கூட்டல் ≤ 5 என்று பெறுவது.

   கீழ்க்கண்ட நிகழ்வுகளை விவரிக்க

   a. A'
   b. B அன்று
   c. Aயோ Bயோ
   d. Aயும் Bயும்
   e. Cயற்ற A
   f. Bயோ Cயோ
   g. Bயும் Cயும்
   h. $A \cap B' \cap C'$

7. மேலுள்ள 6ஆம் கேள்வியின் நோக்கீட்டில், கீழுள்ளவை மெய்யா பொய்யா என்று கூறுக.
   a. Aயும் Bயும் ஒன்றையொன்று தவிர்ப்பவை
   b. Aயும் Bயும் ஒன்றையொன்று தவிர்ப்பனவும் அனைத்தளாவியனவும்
   c. $A = B'$
   d. Aயும் Cயும் ஒன்றையொன்று தவிர்ப்பவை
   e. Aயும் B'யும் ஒன்றையொன்று தவிர்ப்பவை
   f. A', B', C ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் அனைத்தளாவியவை

16.4 நிகழ்தகவுக்கான அடிக்கோளணுகுமுறை

முந்தைய பகுதிகளில் நேர்ந்தவாறான பரிசோதனைகளையும் அவற்றின் மாதிரிக்கூறு வெளிகளையும் நிகழ்வுகளையும் கருதினோம். நம் அன்றாட வாழ்வில் நிகழ்வுகளின் வாய்ப்புகளைப்பற்றி பல சொற்களை பயன்படுத்துகிறோம். இந்த நிகழ்வுகள் நிகழ்வதற்கும் நிகழாததற்குமான வாய்ப்புகளை நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு அளவுரைக்க முயல்கிறது.

முந்தைய வகுப்புகளில் மொத்த வருவிளைவுகளின் எண்ணிக்கை முன்பே தெரிந்த ஒரு பரிசோதனையுடன் தொடர்பான ஒரு நிகழ்வுக்கு நிகழ்தகவை ஒப்படைக்கும் சில முறைகளை கற்றிருக்கிறோம்.

அடிக்கோளணுகுமுறை ஒரு நிகழ்வின் நிகழ்தகவை விவரிக்க பயன்படும் மற்றொரு முறை. இந்த அணுகுமுறையில் நிகழ்தகவுகளை ஒப்படைக்க சில அடிக்கோள்களை அதாவது விதிகளை பட்டியலிடுகிறோம்.

ஒரு நேர்ந்தவாறான பரிசோதனையின் மாதிரிக்கூறுவெளி S என்க. நிகழ்தகவு (P) என்பது களம் Sஇன் அடுக்குக்கணமானதும் வீச்சு $[0,1]$ என்ற இடைவெளியானதும் கீழ்க்காணும் அடிக்கோள்களை நிறைவேற்றுவதுமான ஒரு மெய்யெண்மதிப்புச்சார்பன்:

(அ) எந்தவொரு E என்ற நிகழ்வுக்கும் $P(E) \geq 0$

(ஆ) $P(S) = 1$

(இ) Eயும் Fஉம் ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் நிகழ்வுகள் எனில் $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$.

$P(\phi) = 0$ என்பது (இ)யிலிருந்து கிடைக்கிறது. இதை நிறுவ, $F = \phi$ என்று எடுத்து ϕயும் Eயும் வெட்டாநிகழ்வுகள் என்பதை நோக்குகிறோம். எனவே, (இ)யிலுள்ள அடிக்கோளிலிருந்து
$P(E \cup \phi) = P(E) + P(\phi)$,
அதாவது $P(E) = P(E) + P(\phi)$,
எனவே, $P(\phi) = 0$

S என்ற மாதிரிக்கூறுவெளியில் $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ ஆகிய வருவிளைவுகள் இருப்பதாக கொள்வோம். அதாவது

$$S = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\ \omega_n\}$$

என்க. நிகழ்தகவின் அடிக்கோளடிப்படையான வரையறையிலிருந்து

(அ) Sஇலுள்ள ஒவ்வொரு ω_iக்கும்

$$0 \leq P(\omega_i) \leq 1$$

(ஆ) $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_n) = 1$

(இ) A என்ற எந்த நிகழ்வுக்கும் $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$

ஆகியவற்றை பெறுகிறோம்.

குறிப்பு $\{\omega_i\}$ என்ற ஒற்றையக்கணமே எளிய நிகழ்வு என்பதையும் $P(\{\omega_i\})$ என்பதையே குறியீட்டு எளிமைக்காக $P(\omega_i)$ என்று எழுதுகிறோம் என்பதையும் நோக்குக.

சான்றாக, காசுசுண்டும் பரிசோதனையில் த, பூ என்ற ஒவ்வொரு வருவிளைவுக்கும் $1/2$ என்ற எண்ணை ஒப்படைக்கலாம். அதாவது

$$P(\text{த}) = \frac{1}{2}, \qquad P(\text{பூ}) = \frac{1}{2} \tag{16.1}$$

இந்த ஒப்படைப்பு அடிக்கோள்களை நிறைவேற்றுவது தெளிவு. அதாவது ஒவ்வொரு எண்ணும் சுழியத்தைவிட அதிகமானதும் 1ஐவிட குறைவானதும்; மேலும்,

$$P(\text{த}) + P(\text{பூ}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

எனவே, இந்த வேற்றுவத்தில் தலை விழுவதன் நிகழ்தகவு $1/2$ என்றும் பூ விழுவதன் நிகழ்தகவு $1/2$ என்றும் சொல்கிறோம்.

$$P(\text{த}) = \frac{1}{4}, \qquad P(\text{பூ}) = \frac{3}{4} \tag{16.2}$$

என்று எடுத்தால், இது அடிக்கோள்களை நிறைவேற்றுகிறதா?

ஆம்! இந்த வேற்றுவத்தில் தலைநிகழ்தகவு $1/4$, பூநிகழ்தகவு $3/4$.

(16.1)ஆம் சமன்பாட்டிலுள்ள ஒப்படைப்பும் (16.2) ஆம் சமன்பாட்டிலுள்ளதும் அடிக்கோள்களை நிறைவேற்றுவதை நாம் காண்கிறோம். உண்மையில் $0 \leq p \leq 1$ என்றவாறான எந்தவொரு p என்ற எண்ணையும் $(1-p)$ யையும் இரண்டு வருவிளைவுகளுக்கு ஒப்படைக்கலாம். அப்போதும் $P(\text{த}) + P(\text{பூ}) = p + (1-p) = 1$. இதுவும் அடிக் கோள்களை நிறைவேற்றுகிறது.

எனவே, ஒரு பரிசோதனையின் வருவிளைவுகளுக்கு நிகழ்தகவுகளை ஒப்படைக்க பல (முடிவிலி) வழிகள் உள்ளன எனலாம். சில சான்றுகளை காண்போம்.

சான்று 9 மாதிரிக்கூறுவெளி

$$S = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_6\}$$

என்க. கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவொப்படைப்புகளுள் எவை ஏற்புடையவை?

வருவிளைவு கள்	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
(அ)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
(ஆ)	1	0	0	0	0	0
(இ)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$
(ஈ)	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
(உ)	0.1	$.2$	$.3$	$.4$	$.5$	$.6$

தீர்வு (அ) அடிக்கோள் 1: $P(\omega_i)$ என்ற ஒவ்வொரு எண்ணும் நேர்மமானதும் ஒன்றைவிட குறைந்ததும்.

அடிக்கோள் 2: நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத் தொகை

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

எனவே, இந்த ஒப்படைப்பு ஏற்புடையது.

(ஆ) அடிக்கோள் 1: $P(\omega_i)$ என்ற ஒவ்வொரு நிகழ்தகவும் 0ஆகவோ 1ஆகவோ இருக்கிறது

அடிக்கோள் 1: நிகழ்தகவுக்கூட்டல் $= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1$

எனவே, இந்த ஒப்படைப்பு ஏற்புடையது.

(இ) அடிக்கோள் 1: $P(\omega_5)$உம் $P(\omega_6)$உம் எதிர்மமாதலால் ஒப்படைப்பு ஏற்புடைய தன்று.

(ஈ) $P(\omega_6) = 3/2 > 1$ என்பதால் ஒப்படைப்பு ஏற்புடையதன்று.

(உ) நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத்தொகை $0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5 + 0.6 = 2.1$ என்பதால் ஒப்படைப்பு ஏற்புடையதன்று.

16.4.1 ஒரு நிகழ்வின் நிகழ்தகவு

ஒரு எந்திரம் அடுத்தடுத்து தயாரித்த மூன்று பேனாக்களை ஆராய்ந்து பழுதானது என்றோ பழுதற்றது என்றோ வகைப்படுத்தும் பரிசோதனையின் மாதிரிக்கூறுவெளி S என்க. இந்த ஆய்வின் விளைவாக 0, 1, 2, 3 ஆகிய எண்ணிக்கையான பழுதான பேனாக்களை காணலாம்.

இந்த பரிசோதனையுடன் தொடர்பான மாதிரிக்கூறுவெளி

$S = \{$பபப, பபஅ, பஅப, அபப, பஅஅ, அபஅ, அஅப, அஅஅ$\}$

இங்கு பழுதானதை ப என்றும் பழுதற்றதை அ என்றும் குறித்தோம்.

பபப, பபஅ, பஅப, அபப, பஅஅ, அபஅ, அஅப, அஅஅ ஆகிய ஒவ்வொரு வருவிளைவுக்கும் $1/8$ என்ற நிகழ்தகவை ஒப்படைப்போம்.

முழுச்சரியாக ஒரு பழுதான பேனா இருக்கும் நிகழ்வை A என்றும் மீக்குறைவாக இரண்டு பழுதான பேனாக்கள் இருக்கும் நிகழ்வை B என்றும் குறிப்போம். அப்படியெனில்

$A = \{$பஅஅ, அபஅ, அஅப$\}$,

$B = \{$பபஅ, அபஅ, அபப, பபப$\}$

இப்போது

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$$

$$= P(\text{பஅஅ}) + P(\text{அபஅ}) + P(\text{அஅப})$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(B) = \sum_{\omega_i \in B} P(\omega_i)$$

$$= P(\text{பபஅ}) + P(\text{பஅப}) + P(\text{அபப}) + P(\text{பபப})$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

மற்றொரு பரிசோதனையாக, ஒரு காசை இரண்டுமுறை சுண்டுவதை கருதுவோம். இந்த பரிசோதனையின் மாதிரிக்கூறுவெளி

$S = \{$தத, தபூ, பூத, பூபூ$\}$

வருவிளைவுகளுக்கு கீழ்க்காணும் நிகழ்தகவு களை ஒப்படைப்போம்.

$$P(\text{தத}) = \frac{1}{4}, \quad P(\text{தபூ}) = \frac{1}{7}, \quad P(\text{பூத}) = \frac{2}{7},$$

$$P(\text{பூபூ}) = \frac{9}{28}$$

இது அடிக்கோள்களை நிறைவுசெய்வதை சரிபார்த்துக்கொள்க. இப்போது இரண்டு வீச்சுகளும் ஒரே விளைவை தருவதான E என்ற நிகழ்வை கருதுவோம். இங்கு $E = \{$தத, பூபூ$\}$.

$$P(E) = \sum_{\omega_i \in E} P(\omega_i) = P(\text{தத}) + P(\text{பூபூ}) = \frac{1}{4} + \frac{9}{28}$$

$$= \frac{4}{7}$$

முழுச்சரியாக இரண்டு தலைகள் என்ற நிகழ்வுக்கு, $F = \{$தத$\}$. எனவே

$$P(F) = \sum_{\omega_i \in F} P(\omega_i) = P(\text{தத}) = \frac{1}{4}$$

16.4.2 சமவாய்ப்பான வருவிளைவுகளின் நிகழ்தகவுகள்

ஒரு பரிசோதனையின் மாதிரிக்கூவெளி

$$S = \{\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n\}$$

என்க. எல்லா வருவிளைவுகளுக்கும் சம வாய்ப்பு இருப்பதாக கொள்வோம். அதாவது இவற்றுள் எந்த எளிய நிகழ்வு நிகழ்வதற்கும் சம வாய்ப்பு இருக்கிறது. அதாவது,

$$P(\omega_i) = p, \qquad \forall\, \omega_i \in S$$

இங்கு, $\forall \omega_i$ என்ற குறியீடு எல்லா ω_i களுக்கும் என்பதை குறிக்கிறது. அதாவது ' $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ ஆகியவற்றுள் ஒவ்வொன்றுக்கும்' என்ற பொருளை தருகிறது. நிகழ்தகவின் ஒரு

அடிக்கோளிலிருந்து $0 \leq p \leq 1$ என்பதை நாம் அறிவோம். மற்றொரு அடிக்கோளின்படி

$$\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1, \quad \text{அதாவது } p + p + \cdots + p(n \text{ முறை}) = 1$$

$$np = 1, \quad p = \frac{1}{n}$$

எனவே, ஒரு மாதிரிக்கூறுவெளியின் எல்லா வருவிளைவுகளுக்கும் சமவாய்ப்பு இருக்கும் போது ஒவ்வொன்றின் நிகழ்தகவும் $1/n(S)$; இங்கு, $n(S)$ வருவிளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை, அதாவது மாதிரிக்கூறுவெளியி லுள்ள உறுப்புகளின் (எளிய வருவிளைவுகளின்) எண்ணிக்கை.

பொதுவாக, S ஒரு மாதிரிக்கூறுவெளி எனவும் அதில் E ஒரு நிகழ்வு எனவும் கொள்வோம். மேலும் $n(S) = n, n(E) = m$ என்க. ஒவ்வொரு வருவிளைக்கும் சமவாய்ப்பு இருந்தால்

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

இங்கு, m Eக்கு சாதகமான வருவிளைவுகளின் எண்ணிக்கையையும் n சாத்தியமான மொத்த வருவிளைவுகளின் எண்ணிக்கையையும் குறிக்கின்றன.

16.4.3 'Aயோ Bயோ' என்ற நிகழ்வின் நிகழ்தகவு

இப்போது 'A யோ B யோ' என்ற நிகழ்வின் நிகழ்தகவை காணலாம். அதாவது $P(A \cup B)$ என்ன என்று பார்ப்போம்.

ஒரு காசை மூன்றுமுறை வீசுவதுடன் தொடர்பான $A = \{\text{தததபூ}, \text{தபூத}, \text{பூதத}\}, B = \{\text{தபூத}, \text{பூதத}, \text{தததத}\}$ ஆகிய இரண்டு நிகழ்வுகளை கருதுவோம்.

$$A \cup B = \{\text{தததபூ}, \text{தபூத}, \text{பூதத}, \text{தததத}\}$$

என்பது தெளிவு. எனவே

$$P(A \cup B) = P(\text{தததபூ}) + P(\text{தபூத}) + P(\text{பூதத}) + P(\text{தததத})$$

எல்லா வருவிளைவுகளும் சமவாய்ப்புள்ளவை எனில்

$$P(a \cup B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

மேலும்

$$P(A) = P(\text{தததபூ}) + P(\text{தபூத}) + P(\text{பூதத}) = \frac{3}{8}$$

$$P(B) = P(\text{தபூத}) + P(\text{பூதத}) + P(\text{தததத}) = \frac{3}{8}$$

எனவே,

$$P(A) + P(B) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

இதிலிருந்து

$$P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$$

என்பது தெளிவாகிறது.

தபூத, பூதத ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளும் Aக்கும் Bக்கும் பொதுவானவை. $P(A) + P(B)$ஐ கணக்கிடும்போது தபூத, பூதத ஆகிய புள்ளிக ளின் நிகழ்தகவுகளை (அதாவது $A \cap B$யின் உறுப்புகள்) இரண்டுமுறை சேர்த்துவிட்டோம். அதனால், $P(A \cup B)$ஐப்பெற $P(A) + P(B)$யிலிருந்து $A \cap B$யின் மாதிரிக்கூறுபுள்ளி களின் நிகழ்தகவுகளை கழிக்கவேண்டும். அதாவது

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \sum_{\omega_i \in A \cap B} P(\omega_i) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

இவ்வாறு,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

என்று காண்கிறோம். இதை இந்தச்சான்றில் மட்டுமன்றி, பொதுவான வாய்ப்பாடாக நாம் நிறுவலாம்.

பொதுவாக, ஒரு நேர்ந்தவாறான பரிசோதனை யுடன் தொடர்பான A, B என்ற இரண்டு நிகழ்வுகளுக்கு, நிகழ்தகவின் வரையறையின்படி,

$$P(A \cup B) = \sum_{\omega_i \in A \cup B} P(\omega_i)$$

இப்போது

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$$

என்ற முற்றொருமையை நினைவுகொள்வோம்.. (உங்களுக்கு மறந்துவிட்டால் வென்னின் வரைபடத்தை வரைந்து நீங்கள் சரிபார்த்துக் கொள்ளலாம்.) இதிலிருந்து, $A - B, A \cap B, B - A$ ஆகியவை ஒன்றையொன்று வெட்டாக் கணங்கள் என்பதால்,

$$P(A \cup B) = \sum_{\omega_i \in (A - B)} P(\omega_i) + \sum_{\omega_i \in (A \cap B)} P(\omega_i) + \sum_{\omega_i \in (B - A)} P(\omega_i) \qquad (16.3)$$

என்பதை பெறுகிறோம். மேலும், $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ என்பதையும் $B = (B - A) \cup (A \cap B)$ என்பதையும் பயன்படுத்தி

$$P(A) + P(B) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) + \sum_{\omega_i \in B} P(\omega_i)$$
$$= \sum_{\omega_i \in (A - B)} P(\omega_i) + \sum_{\omega_i \in (A \cap B)} P(\omega_i) + \sum_{\omega_i \in (B - A)} P(\omega_i) + \sum_{\omega_i \in (A \cap B)} P(\omega_i)$$

என்று பெறுகிறோம். இதில் (16.3)ஆம் சமன்பாட்டை பயன்படுத்தி

$$P(A)+P(B)=P(A\cup B)+\sum_{\omega_i\in(A\cap B)}P(\omega_i)$$
$$=P(A\cup B)+P(A\cap B)$$
என்று பெறுகிறோம். எனவே,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\quad(16.4)$$

என்று நாம் விரும்பிய விடையை பெறுகிறோம்.

இதை **வேறொரு வழி**யிலும் நிறுவலாம். இப்போது

$$A\cup B=A\cup(B-A)$$

என்பதிலிருந்து தொடங்குகிறோம். இங்கு Aயும் $(B-A)$யும் ஒன்றையொன்று தவிர்ப்பவை.

$$B=(A\cap B)\cup(B-A)$$

என்பதிலும் $(A\cap B)$யும் $(B-A)$யும் ஒன்றையொன்று தவிர்ப்பவை. நிகழ்தகவின் மூன்றாம் அடிக்கோளை பயன்படுத்தி

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-A)\qquad(16.5)$$
$$P(B)=P(A\cap B)+P(B-A)\qquad(16.6)$$

என்று பெறுகிறோம். (16.5)ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து (16.6)ஐ கழித்து

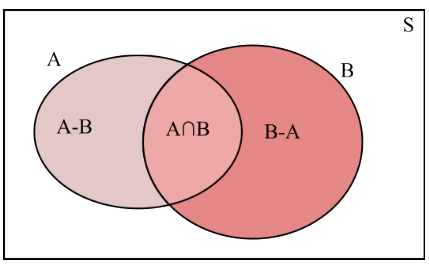
$$P(A\cup B)-P(B)=P(A)-P(A\cap B)$$

அதாவது

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

என்று பெறுகிறோம்.

இதுவே நாம் முன்பு பெற்ற (16.4)ஆம் சமன்பாடு. இதை படம் 16.1இல் காட்டிய வென்னின் படவரைவிலிருந்து சரிபார்த்து விளங்கிக் கொள்ளலாம்.



படம் 16.1

Aயும் Bயும் வெட்டாக்கணங்கள் எனில் அதாவது அவை ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் நிகழ்வுகள் எனில் $A\cap B=\phi$. அப்போது $P(A\cap B)=P(\phi)=0$.

எனவே ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் நிகழ்வுகளுக்கு

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$,

A,B ஒன்றையொன்று தவிர்ப்பவை

என்ற விளைவை பெறுகிறோம்.

16.4.4 'A அன்று' என்ற நிகழ்வின் நிகழ்தகவு

1இலிருந்து 10வரை எண்களிட்ட அட்டைகளின் கட்டிலிருந்து ஒரு அட்டையை உருவும் பரிசோதனையுடன் தொடர்பான $A=\{2,4,6,8\}$ என்ற நிகழ்வை கருதுக. மாதிரிக்கூறுவெளி $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ என்பது தெளிவு. எல்லா வருவிளைவுகளும் சமவாய்ப்புடையவை எனில் ஒவ்வொரு வருவிளைவின் நிகழ்தகவும் $1/10$. இப்போது

$$P(A)=P(2)+P(4)+P(6)+P(8)$$
$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

மேலும், A அன்று என்ற நிகழ்வு, $A'=\{1,3,5,7,9,10\}$.

$$P(A')$$
$$=P(1)+P(3)+P(5)+P(7)+P(9)+P(10)$$
$$=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

எனவே,

$$P(A')=\frac{3}{5}=1-\frac{2}{5}=1-P(A)$$

இதை பொதுவாக நிறுவ, A',A ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று தவிர்க்கும் அனைத்தளாவிய நிகழ்வுகள் என்பதை நோக்குகிறோம். அதாவது

$$A\cap A'=\phi,\qquad A\cup A'=S$$
$$P(A\cup A')=P(S)$$

இதிலிருந்து, இரண்டாம் அடிக்கோளையும் மூன்றாம் அடிக்கோளையும் பயன்படுத்தி,

$$P(A)+P(A')=1$$

என்று பெறுகிறோம். அதாவது

$$P(A')=P(A\text{ அன்று})=1-P(A)$$

இனி வரும் சான்றுகளிலும் பயிற்சிகளிலும், வேறுவிதமாக சொல்லாவிட்டால், வருவிளைவுகள் சமவாய்ப்புள்ளவை.

சான்று 10 52 சீட்டுகள் அடங்கிய சீட்டுக் கட்டை நன்கு குலுக்கியபின் ஒரு சீட்டை உருவுகிறோம். ஒவ்வொரு வருவிளைவும் சமவாய்ப்புடையது எனில் உருவிய சீட்டு கீழ்க்கண்டவாறு இருப்பதன் நிகழ்தகவை கணக்கிடுக.

(அ) ஒரு வைரம் (ஆ) ஒன்று அன்று

(இ) ஒரு கருப்புச்சீட்டு (மூவிலையோ வேலோ)

(ஈ) வைரமன்று (உ) கருப்புச்சீட்டன்று

தீர்வு நன்கு குலுக்கிய 52 சீட்டுகளுள்ள சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டை எடுக்கும்போது சாத்தியமான வருவிளைவுகள் 52.

(அ) 'எடுத்த சீட்டு வைரம்' என்ற நிகழ்வை A என்போம். A என்ற கணத்திலுள்ள சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை 13 என்பது தெளிவு. எனவே,

$$P(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$

அதாவது, ஒரு வைரச்சீட்டின் நிகழ்தகவு $1/4$.

(ஆ) உருவிய சீட்டு ஒன்று என்ற நிகழ்வு B என்க. எனவே, உருவிய சீட்டு ஒன்று அன்று என்ற நிகழ்வு B'. அதன் நிகழ்தகவு

$$P(B')=1-P(B)=1-\frac{4}{52}=1-\frac{1}{13}=\frac{12}{13}$$

(இ) உருவிய சீட்டு கருப்பு என்ற நிகழ்வை C என்று குறிப்போம். C என்ற கணத்திலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 26. எனவே

$$P(C) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

எனவே கருப்புச்சீட்டின் நிகழ்தகவு $1/2$.

(ஈ) மேலே (அ)வில் சீட்டு வைரம் என்ற நிகழ்வை A என்று குறித்தோம்; சீட்டு வைரமன்று என்பது 'A அன்று', அதாவது A'.

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

(உ) சீட்டு கருப்பன்று என்பதை மேலே கண்ட (இ)யின் நோக்கீட்டில் C' என்று எழுதலாம்.

$$P(C') = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

சான்று 11 ஒரு பையில் 9 வட்டுகள் உள்ளன. அவற்றுள் 4 சிவப்பு, 3 நீலம், 2 மஞ்சள். வட்டுகள் வடிவிலும் அளவிலும் ஒத்தவை. பையிலிருந்து ஒரு தகட்டை நேர்ந்தவாறாக எடுக்கிறோம். இது (அ) சிவப்பாக, (ஆ) மஞ்சளாக, (இ) நீலமாக, (ஈ) நீலமற்றதாக, (உ) சிவப்போ நீலமோவாக இருப்பதன் நிகழ்தகவுகளை கணக்கிடுக.

தீர்வு பையில் மொத்தம் 9 வட்டுகள் இருப்பதால் சாத்தியமான வருவிளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை 9. சி, ம, நீ என்ற நிகழ்வுகளை கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுப்போம்.

சி: எடுத்த வட்டு சிவப்பு

ம: எடுத்த வட்டு மஞ்சள்

நீ: எடுத்த வட்டு நீலம்

(அ) சிவப்பு வட்டுகளின் எண்ணிக்கை 4; அதாவது $n(\text{சீ}) = 4$. எனவே,

$$P(\text{சி}) = \frac{4}{9}$$

(ஆ) மஞ்சள் வட்டுகளின் எண்ணிக்கை 2; அதாவது $n(\text{ம}) = 2$. எனவே,

$$P(\text{ம}) = \frac{2}{9}$$

(இ) நீல வட்டுகளின் எண்ணிக்கை 3; அதாவது $n(\text{நீ}) = 3$. எனவே,

$$P(\text{நீ}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

(ஈ) நீலமன்று என்ற நிகழ்வு நீ' என்பது தெளிவு. எனவே,

$$P(\text{நீ}') = 1 - P(\text{நீ}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(உ) சிவப்போ நீலமோ என்ற நிகழ்வை 'சியோ நீயோ' என்ற கணத்தால் குறிக்கலாம். சீயும் நீயும் ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் நிகழ்வுகள். எனவே

$$P(\text{சியோ நீயோ}) = P(\text{சி} \cup \text{நீ}) = P(\text{சி}) + P(\text{நீ})$$
$$= \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$$

சான்று 12 அனில், அசிமா ஆகிய இருமாணவர்கள் தேர்வெழுதினர். அனில் தேர்வில் வெற்றிபெறுவதன் நிகழ்தகவு 0.05, அசிமா வெற்றிபெறும் நிகழ்தகவு 0.10, இருவரும் வெற்றிபெறும் நிகழ்தகவு 0.02 எனில் கீழ்க்கண்டவற்றின் நிகழ்தகவுகளை காண்க.

(அ) அனிலும் அசிமாவும் தேர்வில் வெற்றியடையமாட்டார்கள்

(ஆ) மீக்குறைவாக ஒருவர் தேர்வில் வெற்றியடையமாட்டார்

(இ) ஒருவர் மட்டும் தேர்வில் வெற்றியடைவார்

தீர்வு அனில் வெற்றிபெறும் நிகழ்வை E என்றும் அசிமா வெற்றிபெறும் நிகழ்வை F என்றும் குறிப்போம்.

$$P(E) = 0.05, \quad P(F) = 0.10,$$
$$P(E \cap F) = 0.02$$

என்று கொடுத்திருக்கிறார்கள். அப்படியெனில்

(அ) அனிலும் அசிமாவும் வெற்றியடைய மாட்டார்கள் என்ற நிகழ்வு $E' \cap F'$. திமார்கனின் விதிப்படி

$$E' \cap F' = (E \cup F)'$$

முதலில் $E \cup F$ இன் நிகழ்தகவை கணக்கிட்டு பிறகு அதன் மறுக்கையை கணக்கிடுவோம்.

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$
$$= 0.05 + 0.10 - 0.02 = 0.13$$

எனவே

$$P(E' \cap F'') = P(E \cup F)' = 1 - P(E \cup F)$$
$$= 1 - 0.13 = 0.87$$

(ஆ) மீக்குறைவாக ஒருவர் வெற்றியடைவதன் நிகழ்தகவு $= 1 -$ இருவரும் வெற்றியடைவதன் நிகழ்தகவு

$$= 1 - 0.02 = 0.98$$

(இ) ஒருவர் மட்டும் வெற்றியடையும் நிகழ்வு அனில் வெற்றியடைந்து அசிமா வெற்றியடையாததோ அனில் வெற்றியடையாமல் அசிமா வெற்றியடைவதோவான நிகழ்வுக்கு சமம். அதாவது $(E \cap F') \cup (E' \cap F)$ என்பதற்கு சமம்.

இங்கு $(E \cap F'), (E' \cap F)$ ஆகியவை வெட்டாக்கணங்கள் என்பதால்

$$P\big((E \cap F') \cup (E' \cap F)\big)$$
$$= P(E \cap F') + P(E' \cap F)$$

$E \cap F' = E - (E \cap F)$ என்பதை வென்பட வரைவிலிருந்து சரிபார்த்துக்கொள்ளலாம். எனவே

$$P(E \cap F') \cup (E' \cap F)$$
$$= P(E) - P(E \cap F) + P(F) - P(E \cap F)$$

$= 0.05 - 0.02 + 0.10 - 0.02 = 0.11$

சான்று 13 இரண்டு ஆண்களிலும் இரண்டு பெண்களிலுமிருந்து இரண்டுபேர் அடங்கிய ஒரு செயற்குழுவை தேர்ந்தெடுக்கிறோம். செயற்குழுவில் (அ) ஆண் இல்லாதது (ஆ) ஒரு ஆண் இருப்பது (இ) இரண்டு ஆண்கள் இருப்பது ஆகியவற்றின் நிகழ்தகவுகள் யாவை?

தீர்வு மனிதரின் மொத்த எண்ணிக்கை $2 + 2 = 4$. இந்த நால்வரிலிருந்து இருவரை

$${}^4C_2 = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6$$

வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

(அ) இரண்டுபேரடங்கிய செயற்குழுவில் ஆண் இல்லை எனில் இருவரும் பெண்கள் என்று பொருளாகிறது. இரண்டு பெண்களிலிருந்து இருவரை தேர்ந்தெடுக்க ${}^2C_2 = 1$ வழிகள் உள்ளன; அதாவது ஒரு வழியே உள்ளது. எனவே

P(ஆண் இல்லை)

$$= \frac{\text{ஆணில்லா வருவிளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த வருவிளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{1}{6}$$

(ஆ) செயற்குழுவில் ஒரு ஆண் இருக்கும்போது ஒரு பெண்ணும் இருக்கிறார். இரண்டு ஆண்களிலிருந்து ஒருவரை தேர்ந்தெடுக்க ${}^2C_1$ வழிகள் உள்ளன; இரண்டு பெண்களிலிருந்தும் ஒருவரை ${}^2C_1$ வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம். எனவே ஒரு ஆணையும் ஒரு பெண்ணையும் தேர்ந்தெடுக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை ${}^2C_1 \times {}^2C_1 = 2 \times 2 = 4$. எனவே, ஓராண் இருக்கும் நிகழ்தகவு ${}^4/_6 = {}^2/_3$.

(இ) இரண்டு ஆண்களை தேர்வுசெய்ய 1 வழியே உள்ளது. எனவே நிகழ்தகவு ${}^1/_6$.

பயிற்சி 16.3

1. கீழ்க்காண்பவற்றுள் எவை $S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$ என்ற மாதிரிக்கூறுவெளியின் நிகழ்தகவுகளுக்கு ஏற்புடைய ஒப்படைப்புகள் அல்ல?

ஒப்படைப்பு	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
(அ)	0.1	0.01	0.05	0.03	0.01	0.2	0.6
(ஆ)	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	/17	1/7
(இ)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
(ஈ)	-0.1	0.2	0.3	0.4	-0.2	0.1	0.3
(உ)	1/14	2/14	3/14	4/14	5/14	6/14	15/14

2. ஒரு காசை இருமுறை சுண்டுகிறோம். மீக்குறைவாக ஒரு பூ விழுவதன் நிகழ்தகவு என்ன?
3. ஒரு பகடையை வீசுகிறோம். கீழ்க்கண்ட நிகழ்வுகளுக்கான நிகழ்தகவுகளை காண்க.
   a. ஒரு பகாவெண் தோன்றல்
   b. 3க்கு சமமோ அதிகமோவான எண் தோன்றல்
   c. ஒன்றுக்கு சமமாகவோ குறைவாகவோ எண் தோன்றல்
   d. 6ஐவிட அதிகமான எண் தோன்றல்
   e. 6ஐவிட குறைவான எண் தோன்றல்
4. 52 சீட்டுகளடங்கிய கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டை தேர்கிறோம்.
   a. மாதிரிக்கூறுவெளியில் எத்தனை புள்ளிகள் உள்ளன?
   b. சீட்டு வேலின் ஒன்று என்ற எண்ணாயிருக்கும் நிகழ்தகவு என்ன?
   c. சீட்டு ஒன்று என்ற எண்ணுடையதாகும் நிகழ்தகவை கணக்கிடுக.
   d. சீட்டு கருப்பச்சீட்டாகும் நிகழ்தகவை கணக்கிடுக.
5. ஒரு பக்கம் 1 என்றும் மறுபக்கம் 6 என்றும் குறித்த ஒரு நியாயமான காசையும் ஒரு நியாயமான பகடையையும் வீசுகிறோம். மேல்வரும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை (அ) 3 (ஆ) 12 ஆகும் நிகழ்தகவுகளை காண்க.
6. நகரமன்றத்தில் நான்கு ஆண்களும் ஆறு பெண்களும் உள்ளனர். ஒரு செயற்குழுவுக்கு ஒரு நகரமன்றவுறுப்பினரை நேர்ந்தவாறாக தேர்ந்தெடுத்தால் அது ஒரு பெண்ணாயிருக்கும் வாய்ப்பு யாது?
7. ஒரு நியாயமான காசை நான்குமுறை சுண்டுகிறோம். ஒருவர் ஒவ்வொரு தலைக்கும் ₹1ஐ பெறுகிறார்; ஒவ்வொரு பூவுக்கும் ₹1.50ஐ இழக்கிறார். மாதிரிக்கூறுவெளியிலிருந்து நான்கு

சுண்டல்களுக்குப்பின் எத்தனை வழிகளில் இவரிடம் பணம் இருக்கலாம் என்பதையும் ஒவ்வொரு தொகைக்குமான நிகழ்தகவுகளையும் கணக்கிடுக.

8. மூன்று காசுகளை ஒருமுறை சுண்டுகிறோம். கீழ்க்கண்டவற்றை பெறும் நிகழ்தகவுகளை காண்க.

a. 3 தலைகள்
b. 2 தலைகள்
c. மீக்குறைவாக 2 தலைகள்
d. மீயதிகமாக 2 தலைகள்
e. தலை இல்லை
f. 3 பூக்கள்
g. முழுச்சரியாக இரண்டு பூக்கள்
h. பூ இல்லை
i. மீயதிகமாக இரண்டு பூக்கள்

9. ஒரு நிகழ்வின் நிகழ்தகவு $2/11$ எனில் அந்த நிகழ்வின் மறுக்கையின் நிகழ்தகவு என்ன?

10. 'வருவாய்த்துறையாவணக்கோப்புகள்' என்ற சரத்திலிருந்து ஒரு எழுத்தை நேர்ந்தவாறாக தேர்கிறோம். இந்த எழுத்து (அ) குறிலாக (ஆ) நெடிலாக இருப்பதன் நிகழ்தகவு என்ன?

11. ஒரு குலுக்கலில் 1முதல் 20 வரையான ஆறு வெவ்வேறு இயலெண்களை ஒருவர் தேர்ந்தெடுக்கிறார். இந்த ஆறு எண்களும் குலுக்கலின் செயற்குழு **ஏற்கெனவே** நிச்சயித்த ஆறு எண்களுடன் ஒத்துப்போனால் இவர் குலுக்கலில் ஒரு பரிசை வெல்கிறார். இந்த விளையாட்டில் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு என்ன? (உதவி: எண்களின் முறைமை ஒரு பொருட்டன்று).

12. கீழ்க்காணும் $P(A)$, $P(B)$ என்ற நிகழ்தகவுகள் தன்னியைபாக வரையறுக்கப்பட்டனவா என்று சரிபார்க்க.

a. $P(A) = 0.5,\ P(B) = 0.7,\ P(A \cap B) = 0.6$
b. $P(A) = 0.5,\ P(B) = 0.4,\ P(A \cup B) = 0.8$

13. கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

	$P(A)$	$P(B)$	$P(A \cap B)$	$P(A \cup B)$
(அ)	$1/3$	$1/5$	$1/15$	...
(ஆ)	0.35	...	0.25	0.6
(இ)	0.5	0.35	...	0.7

14. ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் A, B ஆகிய நிகழ்வுகளுக்கு $P(A) = 3/5$, $P(B) = 1/5$ எனில் $P(A$யோ Bயோ$)$வை காண்க.

15. Eயும் Fஉம் $P(E) = 1/4, P(F) = 1/2, P(E$உம் Fஉம்$) = 1/8$ என்றவாறான நிகழ்வுகள் எனில் (அ) $P(E$ஓ Fஓ$)$ (ஆ) $P(E$ அன்றும் F அன்றும்$)$ ஆகியவற்றை காண்க.

16. E, F என்ற நிகழ்வுகள் $P(E$ அன்றோ F அன்றோ$) = 0.25$ என்றவாறு உள்ளன. E, F ஒன்றையொன்று தவிர்ப்பனவா என்று கூறுக.

17. A, B ஆகியவை $P(A) = 0.42$, $P(B) = 0.48$, $P(A$யும் Bயும்$) = 0.16$ என்றவாறான நிகழ்வுகள். (அ) $P(A$ அன்று$)$, (ஆ) $P(B$ அன்று$)$, (இ) $P(A$யோ Bயோ$)$ ஆகியவற்றை தீர்மானிக்க.

18. ஒரு பள்ளியின் பதினோராம் வகுப்பில் 40% மாணவர்கள் கணிதத்தையும் 30% உயிரியலையும் படிக்கின்றனர்; 10% கணிதத்தையும் உயிரியலையும் படிக்கின்றனர். இந்த வகுப்பிலிருந்து ஒரு மாணவரை நேர்ந்தவாறாக தேர்ந்தால் இவர் கணிதத்தையோ உயிரியலையோ படிப்பவராயிருக்கும் நிகழ்தகவு என்ன?

19. இரண்டு தேர்வுகளின் அடிப்படையில் மதிப்பறியும் ஒரு நுழைவுச்சோதனையில் நேர்ந்தவாறாகத்தேர்ந்த ஒரு மாணவர் முதல் தேர்வில் தேர்ச்சிபெறும் நிகழ்தகவு 0.8; இரண்டாம் தேர்வில் தேர்ச்சிபெறும் நிகழ்தகவு 0.7; ஒரு தேர்விலாவது தேர்ச்சிபெறும் நிகழ்தகவு 0.95. இரண்டிலும் தேர்ச்சிபெறும் நிகழ்தகவு என்ன?

20. ஒரு மாணவர் இறுதித்தேர்வில் தமிழிலும் ஆங்கிலத்திலும் தேர்ச்சிபெறும் நிகழ்தகவு 0.5; இரண்டில் எதிலும் தேர்ச்சிபெறாததன் நிகழ்தகவு 0.1. ஆங்கிலத்தேர்வில் தேர்ச்சிபெறும் நிகழ்தகவு 0.75 எனில் தமிழ்த்தேர்வில் தேர்ச்சிபெறும் நிகழ்தகவு என்ன?

21. 60 மாணவர்களடங்கிய ஒரு வகுப்பில் 30பேர் தேமாபவுக்கும் 32பேர் தேசேதிக்கும் விருப்பந்தெரிவித்தனர்; 24பேர் தேமாபவுக்கும் தேசேதிக்கும் விருப்பந்தெரிவித்தனர். இவர்களுள் ஒரு மாணவரை நேர்ந்தவாறாக தேர்ந்தால் கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவுகளை காண்க.

a. மாணவர் தேமாபவுக்கோ தேசேதிக்கோ விருப்பந்தெரிவித்தார்
b. மாணவர் தேமாபவுக்கோ தேசேதிக்கோ விருப்பந்தெரிவிக்கவில்லை
c. மாணவர் தேசேதிக்கு விருப்பந்தெரிவித்தார்; ஆனால் தேமாபவுக்கு விருப்பந்தெரிவிக்க வில்லை

பலவகைச்சான்றுகள்

சான்று 14 வீணா தன் விடுமுறையில் A, B, C, D என்ற நான்கு நகரங்களுக்கு நேர்ந்தவாறான முறைமையில் பயணிக் கிறாள். அவள் கீழ்க்கண்டவாறு பயணிக்கும் நிகழ்தகவுகள் யாவை?

(அ) Bக்குமுன் A

(ஆ) Bக்குமுன் Aயும் Cக்குமுன் Bயும்

(இ) முதலில் Aயும் இறுதியில் Bயும்

(ஈ) A முதலிலோ இரண்டாவதாகவோ

(உ) Bக்கு சற்றுமுன் A

தீர்வு A, B, C, D என்ற நான்கு நகரங்களுக்கும் வீணா செல்லக்கூடிய மொத்த முறைமைகள் (நான்கு பொருள்களை முறைமைமாற்றும் வழிகள்) $4! = 24$. எனவே $n(S) = 24$. இந்த 24 முறைமைகளும் சமவாய்ப்புடையவை. இந்த பயணத்தின் மாதிரிக்கூறுவெளி

$$S = \{ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB, BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA, CABD, CADB, CBDA, CBAD, CDAB, CDBA, DABC, DACB, DBCA, DBAC, DCAB, DCBA\}$$

(அ) B க்குமுன் A க்குச்செல்கிறாள் என்ற நிகழவை E என்று குறிப்போம். எனவே

$$E = \{ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB, CABD, CADB, CDAB, DABC, DCAB, DACB\}$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

(ஆ) B க்குமுன் A யும் C க்குமுன் B யும் என்பதை F என்று குறிப்போம்.

$$F = \{ABCD, ABDC, ADBC, DABC\}$$

$$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

இவ்வாறே (இ) (ஈ), (உ) ஆகிய கேள்விகளின் விடைகளை மாணவர்கள் கண்டுகொள்க.

சான்று 15 நன்கு கலைக்கப்பட்ட 52 சீட்டுகளுள்ள சீட்டுக்கட்டிலிருந்து 7 சீட்டுகளடங்கிய ஒரு கையை பெறும்போது, அந்தக்கையில் (அ) எல்லா அரசன்களும் (ஆ) மூன்று அரசன்கள் (இ) மீக்குறைவாக 3 அரசன்கள் இருக்கும் நிகழ்தகவுகளை காண்க.

தீர்வு சாத்தியமான மொத்த கைகளின் எண்ணிக்கை= ${}^{52}C_7$

(அ) 4 அரசன்களிலிருந்து 4 அரசன்களை பெறும் வழிகள்= ${}^{4}C_4 = 1$

எஞ்சிய 48 சீட்டுகளிலிருந்து ஏதேனும் 3 சீட்டுகளைப்பெறும் வழிகள்=${}^{48}C_3$

எனவே சீட்டுக்கட்டிலிருந்து பெறும் 7 சீட்டுகளில் நான்கு அரசன்கள் இருக்கும் வழிகள்= ${}^{4}C_4 \times {}^{48}C_3$

நான்கு அரசன்களைப்பெறும் நிகழ்தகவு

$$= \frac{{}^{4}C_4 \times {}^{48}C_3}{{}^{52}C_7} = \frac{4!\,0!}{4!} \times \frac{48!}{45!\,3!} \times \frac{45!\,7!}{52!} = \frac{1}{7735}$$

(ஆ) மூன்று அரசன்களும் நான்கு அரசனல்லாத சீட்டுகளும் இருக்கும் வழிகள்= ${}^{4}C_3 \times {}^{48}C_4$

$$P(3 \text{ அரசன்கள்}) = \frac{{}^{4}C_3 \times {}^{48}C_4}{{}^{52}C_7} = \frac{9}{1547}$$

(இ) $P(\text{மீக்குறைவாக } 3 \text{ அரசன்கள்}) = P(3 \text{ அரசன்களோ } 4 \text{ அரசன்களோ})$

$$= P(3 \text{ அரசன்கள்}) + P(4 \text{ அரசன்கள்}) = \frac{9}{1547} + \frac{1}{7735} = \frac{46}{7735}$$

சான்று 16 A, B, C ஆகியவை ஒரு நேர்ந்த வாறான பரிசோதனையுடன் தொடர்பான மூன்று நிகழ்வுகள் எனில்

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

என்று நிறுவுக.

தீர்வு $E = B \cup C$ என்க. அப்படியெனில், $A \cup B \cup C = A \cup E$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E)$$

$$P(E) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

இரண்டையும் சேர்த்து

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap E)$$

என்பதை பெறுகிறோம். இதிலிருந்து Eஐ நீக்க, கணங்களின் இடைவெட்டின் பரவுமப் பண்பால்

$$A \cap E = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$$

என்று எழுதுகிறோம். எனவே

$$P(A \cap E) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P\big((A \cap B) \cap (A \cap C)\big)$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

இதையும் $P(A \cup B \cup C)$க்கான சமன்பாட்டில் பயன்படுத்தி

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

என்று நாம் நிறுவவேண்டியதை பெறுகிறோம்.

சான்று 17 ஒரு தொடரோட்டப்பந்தயத்தில் A, B, C, D, E என்ற ஐந்து குழுக்குள் உள்ளன.

(அ) A, B, C ஆகியவை முறையே முதலாவ தாகவும் இரண்டாவதாகவும் மூன்றாவ தாகவும் ஓடிமுடிக்கும் நிகழ்தகவு என்ன?

(ஆ) A, B, C ஆகியவை முதல் மூன்று இடங்களில் (எந்த முறைமையிலும்) வரும் நிகழ்தகவு என்ன?

எல்லா முடிப்புமுறைமைகளும் சமவாய்ப் புடையவை என்று கொள்க.

தீர்வு முதல் மூன்று இடங்களில் முடிக்கும் எல்லா முறைமைகளும் அடங்கிய மாதிரிக்கூறு வெளியை கருதும்போது

$$^5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

மாதிரிக்கூறுபுள்ளிகள் கிடைக்கின்றன. ஒவ்வொன்றின் நிகழ்தகவும் $1/60$.

(அ) A, B, C ஆகியவை முறையே முதலாவதாகவும் இரண்டாவதாகவும் மூன்றாவ தாகவும் முடிப்பதற்கு ABC என்ற ஒரு முறைமையே உள்ளது. எனவே இதன் நிகழ்தகவு $1/60$.

(ஆ) A, B, C ஆகியவை முதல் மூன்று இடங்களில் இருப்பதற்கு $3!$ முறைமைகள் உள்ளன. எனவே இந்த நிகழ்வுக்கு நிகரான மாதிரிக்கூறுபுள்ளிகளின் எண்ணிக்கை $3!$. எனவே நிகழ்தகவு $3!/60 = 1/10$.

பலவகைப்பயிற்சிகள்

1. ஒரு பெட்டியில் 10 சிவப்புக்கோலிகளும் 20 நீலக்கோலிகளும் 30 பச்சைக்கோலிகளும் உள்ளன. பெட்டியிலிருந்து 5 கோலிகளை எடுக்கிறோம். (அ) எல்லாம் நீலமாயிருப்பது, (ஆ) மீக்குறைவாக ஒன்று பச்சையாயிருப்பது ஆகிய நிகழ்வுகளின் நிகழ்தகவுகள் யாவை?
2. நன்கு கலைக்கப்பட்ட 52 சீட்டுகளுள்ள சீட்டுக்கட்டிலிருந்து 4 சீட்டுகளை எடுக்கிறோம். 3 வைரங்களையும் ஒரு வேலையும் பெறும் நிகழ்தகவு யாது?
3. ஒரு பகடையில் 1 என்ற எண்ணுள்ள முகங்கள் இரண்டும் 2 உள்ள முகங்கள் மூன்றும் 3 உள்ளது ஒன்றும் உள்ளன. இந்தப்பகடையை ஒருமுறை உருட்டினால் (அ) $P(2)$ (ஆ) $P(1\text{ஓ } 3\text{ஓ})$, (இ) $P(3 \text{ அன்று})$ ஆகியவற்றை தீர்மானிக்க.
4. ஒரு குலுக்கலில் 10,000 சீட்டுகள் விற்பனையாகின்றன; பத்து சமமான பரிசுகள் வழங்கப்படுகின்றன. நாம் (அ) ஒரு சீட்டு, (ஆ) இரண்டு சீட்டுகள், (இ) 10 சீட்டுகள் வாங்கினால், பரிசு கிடைக்காததன் நிகழ்தகவு என்ன?
5. 100 மாணவர்களை 40உம் 60உமான இரண்டு பிரிவுகளாக பிரிக்கிறோம். நீயும் உன் நண்பரும் இந்த 100பேரில் இருந்தால்
   a. நீங்கள் இருவரும் ஒரே பகுதியில் இருக்கும் நிகழ்தகவு என்ன?
   b. நீங்கள் இருவரும் வெவ்வேறு பகுதிகளில் இருக்கும் நிகழ்தகவு என்ன?
6. மூன்று கடிதங்களை எழுதி மூன்று உறைகளையும் முகவரியிட்டு தயாரிக்கிறோம். ஒவ்வொரு உறையிலும் ஒரு கடிதத்தை நேர்ந்தவாறாக வைத்து மூடுகிறோம். மீக்குறைவாக ஒரு கடிதம் சரியான உறையில் இருக்கும் நிகழ்தகவு என்ன?
7. A, B ஆகியவை $P(A) = 0.54$, $P(B) = 0.69$, $P(A \cap B) = 0.35$ என்றவாறான இரண்டு நிகழ்வுகள். (அ) $P(A \cup B)$ (ஆ) $P(A' \cap B')$ (இ) $P(A \cap B')$ (ஈ) $P(B \cap A')$ ஆகியவற்றை காண்க.
8. ஒரு நிறுவனத்தின் பணியாளர்கள் நிறுவனத்தின் மேலாண்மைச்செயற்குழுவில் தங்கள் நிற்பாளர்களாக 5பேரை தேர்ந்தெடுக்கிறார்கள். அந்த 5பேரின் விவரங்கள் பின்வருமாறு:

எண்	பெயர்	பால்	அகவை (ஆண்டுகளில்)
1	அரீசு	ஆ	30
2	உரோகான்	ஆ	33
3	சீதள்	பெ	46
4	ஆலிசு	பெ	28
5	சலீம்	ஆ	41

இந்த குழவிலிருந்து ஒரு உரைஞரை நேர்ந்தவாறாக தேர்ந்தெடுக்கின்றனர். இந்த உரைஞர் ஆணாகவோ 35 அகவைக்கு குறைந்தவராகவோ இருப்பதன் நிகழ்தகவு என்ன?

9. 0,1,3,5,7 ஆகிய இலக்கங்களிலிருந்து 5,000க்கு மேற்பட்ட ஒரு நான்கிலக்க எண்ணை நேர்ந்தவாறாக உருவாக்கினால் (அ) இலக்கங்கள் மீள்வரும்போது (ஆ) இலக்கங்கள் மீள்வராதபோது 5ஆல் வகுபடும் எண்ணை உருவாக்கும் நிகழ்தகவு என்ன?
10. ஒரு பெட்டியின் எண்பூட்டில் 4 சக்கரங்கள் உள்ளன; ஒவ்வொன்றும் 0த்திலிருந்து 9வரையான 10 இலக்கங்களால் குறியமிடப்பட்டுள்ளது. மீள்வராத நான்கு இலக்கங்களின் ஒரு தொடரியால் பூட்டு திறக்கிறது. ஒருவர் பெட்டியைத்திறக்கும் சரியான தொடரியை அடைவதன் நிகழ்தகவு என்ன?

சுருக்கவுரை

இந்த படலத்தில் நிகழ்தகவின் அடிக்கோளணுகுமுறையை கற்றோம்.

- **மாதிரிக்கூறுவெளி:** சாத்தியமான எல்லா வருவிளைவுகளின் கணம்
- **மாதிரிக்கூறுபுள்ளி:** மாதிரிக்கூறுவெளியின் உறுப்புகள்
- **நிகழ்வு:** மாதிரிக்கூறுவெளியின் ஒரு உட்கணம்
- **சாத்தியமற்ற நிகழ்வு:** வெற்றுக்கணம்
- **நிச்சயமான நிகழ்வு:** முழு மாதிரிக்கூறுவெளி
- **நிரப்புநிகழ்வு:** (அன்று நிகழ்வு) A' என்ற கணம் $(S - A)$
- **$\boldsymbol{A}$யோ $\boldsymbol{B}$யோ** என்ற நிகழ்வு: $A \cup B$ என்ற கணம்
- **$\boldsymbol{A}$யும் $\boldsymbol{B}$யும்** என்ற நிகழ்வு: $A \cap B$ என்ற கணம்
- **$\boldsymbol{B}$யற்ற $\boldsymbol{A}$** என்ற நிகழ்வு: $A - B$ என்ற கணம்
- ஒன்றையொன்று **தவிர்க்கும்** நிகழ்வுகள்: $A \cap B = \phi$ எனில்
- **அனைத்தளாவிய ஒன்றையொன்று தவிர்க்கும் நிகழ்வுகள்:** $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = S$ என்றும் $E_i \cap E_j = \phi\ \forall i \neq j$ என்றும் இருந்தால்
- **நிகழ்தகவு:** ω_i என்ற மாதிரிக்கூறுபுள்ளியுடன் தொடர்பானதும் கீழ்க்கண்ட பண்புகளுள்ளதுமான $P(\omega_i)$ என்ற ஒரு எண்

  (அ) $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$ (ஆ) $\sum_{\omega_i \in S} P(\omega_i) = 1$ (இ) $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$

  $P(\omega_i)$வை ω_i என்ற வருவிளைவின் நிகழ்தகவு என்று அழைக்கிறோம்.
- **சமவாய்ப்பான** வருவிளைவுகளின் நிகழ்தகவுகள் சமம்.
- **ஒரு நிகழ்வின் நிகழ்தகவு;** சமவாய்ப்பான வருவிளைவுகளுள்ள ஒரு முடிவுறு மாதிரிக்கூறுவெளிக்கு, நிகழ்வின் நிகழ்தகவு $P(A) = n(A)/n(S)$; இங்கு, $n(A)$, $n(S)$ ஆகியவை Aஇலும் Sஇலுமுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைகள்.
- A , B என்ற எந்த இரண்டு நிகழ்வுகளுக்கும் $P(A\text{யோ } B\text{யோ}) = P(A) + P(B) - P(A\text{யும் } B\text{யும்})$; அதாவது $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Aயும் Bயும் ஒன்றையொன்று தவிர்ப்பவை எனில் $P(A\text{யோ } B\text{யோ}) = P(A) + P(B)$
- A என்ற எந்த நிகழ்வுக்கும் $P(A \text{ அன்று}) = 1 - P(A)$

வரலாற்றுக்குறிப்பு

கணிதத்தின் பல கிளைகளைப்போலவே நிகழ்தகவுக்கோட்பாடும் நடைமுறைக்கருத்துகளிலிருந்து படிமலர்ந்தது. இதன் தொடக்கம் 16ஆம் நூற்றாண்டில் உள்ளது. அப்போது இத்தாலிய மருத்துவரும் கணிதருமான செரலமோ கார்டானோ (1501-1575) இந்த தலைப்பில் முதலாவதான 'வாய்ப்பின் அடிப்படையிலான விளையாட்டுகளின் நூல்' என்ற நூலை எழுதினார். இது அவர் இறந்தபின் 1663இல் பதிப்பானது.

செவாலியே திமீகி என்ற சூதாட்டர் 1654இல் ஒரு பகடைச்சிக்கலுக்காக புகழ்பெற்ற பிரெஞ்சுத்தத்துவவியலரும் கணிதருமான பிளேயிசு பாசுக்கலை (1623-1662) அணுகினார். பாசுக்கல் இந்த சிக்கல்களில் ஆர்வங்கொண்டு பியர்டி பெர்மா (1601-1665) என்ற புகழ்பெற்ற பிரெஞ்சுக்கணிதருடன் உரையாடினார். பாசுக்கலும் பெர்மாவும் தனித்தனியே சிக்கலை தீர்த்தனர். இவர்களைத்தவிர, கிருத்தியன் ஐகன்சு (1629-1665) என்ற நெதர்லாந்தியக்கணிதர், யா. பெருனூலி (1654-1705), தி மாய்வர் (1667-1754), பிரான்சைச்சேர்ந்த பியர் இலாப்பிளாசு (1749-1827), உருசியரான ப. செபுசோ (1821-1897), அ. மார்க்காவு (1856-1922), அ. நி. கோமகோரவு (1903-1987) ஆகியோரும் மிகச்சிறந்த பங்களிப்புகளை வழங்கியிருக்கின்றனர். நிகழ்தகவின் அடிக்கோட்கோட்பாட்டுக்கான பெருமை கோமகோரவையே சேர்கிறது. அவர் 1933இல் பதிப்பித்த 'நிகழ்தகவின் அடித்தளங்கள்' என்ற செவ்விய நூல் நிகழ்தகவை ஒரு கணச்சார்பனாக அறிமுகமாக்குகிறது.