படலம் 2

உறவுகளும் சார்பன்களும்

2.1 அறிமுகம்

இலைபினிசு
(1646-1716)

கணிதத்தின் பெரும் பகுதி பாங்குகளை காண்பது; மாறும் அளவுகளிடையில் ஒரு தொடர்பை காண்பது. நம் அன்றாட வாழ்வில் அண்ணன்தம்பி, தாய்மகன், ஆசிரியர் மாணவர் போன்ற உறவுகளை காட்டும் பாங்குகளை எதிர்கொள்கிறோம். கணிதத்திலும் m என்ற எண் nஐவிட சிறியது, l என்ற கோடு m என்ற கோட்டுக்கு இணையானது, A என்ற கணம் B என்ற கணத்தின் உட்கணம் போன்ற பல உறவுகளை எதிர்கொள்கிறோம். இவற்றிலெல்லாம் ஒரு உறவில் இரண்டு பொருள்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட முறைமையில் பங்கேற்பதை காண்கிறோம். இந்த படலத்தில் இரண்டு கணங்களிலுள்ள சோடிப்பொருள்களை எவ்வாறு தொடர்புறுத்துவது என்பதையும் அவற்றிடையான உறவையும் அறிமுகமாக்குகிறோம். இறுதியாக, சார்பன்கள் என்ற தனித்துவ உறவுகளை கற்போம். சார்பன் என்ற கருத்துரு கணிதத்தில் அதிமுக்கியமானது; ஏனெனில், அது ஒரு அளவுக்கு மற்றொன்றுடனுள்ள தொடர்பை கணிதத்துல்லியத்துடன் விவரிக்கிறது.

2.2 கணங்களின் காருட்டீசியப்பெருக்கல்

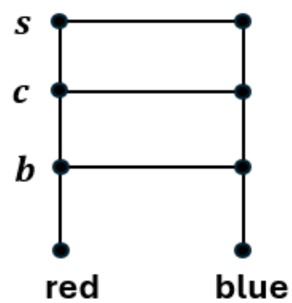
A என்பது 2 நிறங்களின் கணம் என்க; B மூன்று பொருள்களின் கணம் என்க. அதாவது

$$A = \{\text{சிவப்பு}, \text{நீலம்}\}, \qquad B = \{\text{பை}, \text{அ}, \text{ச}\}$$

இங்கு, பை, அ, ச ஆகியவை முறையே பை, அங்கி, சட்டை ஆகியவற்றை குறிக்கின்றன. இந்த இரண்டு கணங்களிலிருந்தும் எத்தனைவிதமான நிறப்பொருள்களை பெறலாம்? ஒரு முறைமையான வகையில் செயலாற்றி கீழ்க்காணும் ஆறு வேவ்வேறு இணைகள் இருப்பதை காணலாம்.

$$(\text{சிவப்பு}, \text{பை}), (\text{சிவப்பு}, \text{அ}), (\text{சிவப்பு}, \text{ச}),$$
$$(\text{நீலம்}, \text{பை}), (\text{நீலம்}, \text{அ}), (\text{நீலம்}, \text{ச})$$

இவ்வாறு ஆறு தனிப்பட்ட பொருள்களை பெறுகிறோம் (படம் 2.1). அதாவது, சிவப்புப்பை,, சிவப்பங்கி, சிவப்புச்சட்டை, நீலப்பை, நீலங்கி, நீலச்சட்டை ஆகிய ஆறு பொருள்களை பெறுகிறோம்.



படம் 2.1

நம் முந்திய வகுப்புகளிலிருந்து P, Q என்ற இரண்டு கணங்களிலிருந்து எடுத்த உறுப்பினர்களின் முறைமையிட்ட சோடியை பிறைக்குறிக்குள் இடுவதை நினைவுகொள்வோம். அதாவது $(p, q), p \in P, q \in Q$. இதனால் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கிறோம்.

வரையறை *1* *P*, *Q* என்ற வெற்றிலாக் கணங்களின் $P \times Q$ என்ற காருட்டீசியப் பெருக்கல் அவற்றின் உறுப்புகளிலிருந்து எழும் எல்லா முறைமையான சோடிகளின் கணம். அதாவது

$$\boldsymbol{P \times Q = \{(p, q): p \in P, q \in Q\}}$$

Pயோ Qவோ வெற்றுக்கணமெனில், $P \times Q$வும் வெற்றுக்கணம்; அதாவது $P \times Q = 0$.

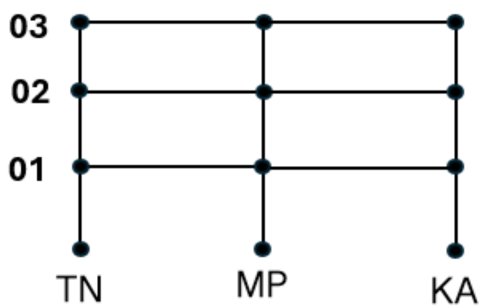
மேலே கருதிய சித்திரத்தில்

$$A \times B = \{(\text{சிவப்பு}, \text{பை}), (\text{சிவப்பு}, \text{அ}), (\text{சிவப்பு}, \text{ச}),$$
$$(\text{நீலம்}, \text{பை}), (\text{நீலம்}, \text{அ}), (\text{நீலம்}, \text{ச})\}$$

மற்றொரு சான்றாக, $A = \{TN, MP, KA\}$, $B = \{01,02,03\}$ ஆகிய இரு கணங்களை கருதுக. இங்கு TN, MP, KA முறையே தமிழ்நாடு, மத்தியப் பிரதேசம், கர்நாடகா ஆகிய மாநிலப்பெயர்களின் சுருக்கீடுகளையும் $01, 02, 03$ ஒவ்வொரு மாநில

மும் ஊர்திகளுக்கு வழங்கும் உரிமத்தகட்டின் தொடக்க எண்களையும் குறிக்கின்றன.

ஒவ்வொரு உரிமத்தகடும் அந்த மாநிலத்தின் சுருக்கீட்டைத்தொடர்ந்து முன்னொட்டு வரும்படி இருந்தால் எத்தனைவகையான தகடுகள் உள்ளன? (படம் 2.2).



படம் 2.2

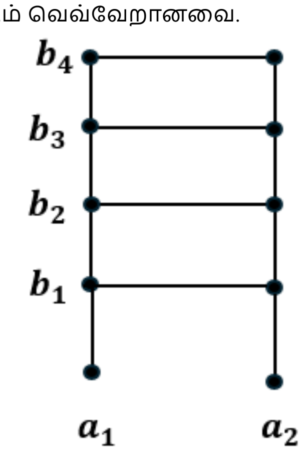
கிடைக்கும் சோடிகள்

$$(TN,01),(TN,02),(TN,03),(MP,01),(MP,02),$$
$$(MP,03),(KA,01),(KA,02),(KA,03)$$

எனவே, இரண்டு கணங்களின் காருட்டீசியப் பெருக்கல்

$$A\times B=\{(TN,01),(TN,02),(TN,03),(MP,01),$$
$$(MP,02),(MP,03),(KA,01),(KA,02),(KA,03)\}$$

A, B ஆகிய ஒவ்வொன்றிலும் மூன்று உறுப்புகள் இருப்பதால் காருட்டீசியப்பெருக்கலில் 9 உறுப்புகள் இருப்பது தெளிவு. மேலும், இந்த உறுப்புகள் சோடியில் தோன்றும் முறைமை முக்கியமானது. சான்றாக, $(TN,01)$ உம் $(01,TN)$உம் வெவ்வேறானவை.



படம் 2.3

இறுதிச்சான்றாக, $A\{a_1,a_2\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$ என்ற கணங்களை கருதுக (படம் 2.3).

$$A\times B=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_1b_4),$$
$$(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3),(a_2,b_4)\}$$

Aயும் Bயும் மெய்யெண்களின் உட்கணங்கள் எனில், இந்த 8 முறைமையிட்ட சோடிகள் தளத்திலுள்ள புள்ளிகளின் இடநிலைகளை குறிக்கின்றன. இங்கு (a_1,b_1) என்ற புள்ளி (b_1,a_1) என்ற புள்ளியிலிருந்து வேறுபட்டது என்பது தெளிவு.

குறிப்புரை

(அ) இரண்டு முறைமையிட்ட சோடிகள் சமம் எனிலும் எனில் மட்டுமேயும் நிகரான முதலுறுப்புகள் சமமாகவும் நிகரான இரண்டாம் உறுப்புகள் சமமாகவும் இருக்கின்றன.

(ஆ) Aயில் p உறுப்புகளும் Bயில் q உறுப்புகளும் இருந்தால், $A\times B$யில் $p\times q$ உறுப்புகள் உள்ளன. அதாவது $n(A)=p, n(B)=q$ எனில், $n(A\times B)=pq$.

(இ) Aயும் Bயும் வெற்றிலாக்கணங்கள், Aயோ Bயோ முடிவிலாக்கணம் எனில், $A\times B$ முடிவிலாக்கணம்.

(ஈ) $A\times A\times A=\{(a,b,c): a\in A, b\in A, c\in A\}$. இங்கு, (a,b,c)ஐ முறைமையிட்ட மும்மை என்கிறோம்.

சான்று *1* $(x+1,y-2)=(3,1)$ எனில், x,y ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை காண்க.

தீர்வு முறைமையிட்ட சோடிகள் சமம் என்பதால், நிகரான உறுப்புகள் சமம். எனவே,

$$x+1=3,\quad y-2=1 \qquad (2.1)$$

சமன்பாடுகளை தீர்த்து $x=2$, $y=3$ என்று பெறுகிறோம்.

சான்று *2* $P=\{a,b,c\}$, $Q=\{r\}$ எனில், $P\times Q$, $Q\times P$ ஆகிய கணங்களை கட்டுமானிக்க. இவை சமமா?

தீர்வு காருட்டீசியப்பெருக்கலின் வரையறையின்படி,

$$P\times Q=\{(a,r),(b,r),(c,r)\}$$
$$Q\times P=\{(r,a),(r,b),(r,c)\}$$

முறைமையிடட சோடிகளின் சமத்துவத்தின் வரையறையின்படி (a,r) என்ற சோடி (r,a)க்கு சமமன்று. எனவே $P\times Q\neq Q\times P$ என்ற முடிவை அடைகிறோம்.

ஆனால், ஒவ்வொரு கணத்திலுமுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை சமம்.

சான்று *3* $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4\}$, $C=\{4,5,6\}$ எனில், (அ) $A\times(B\cap C)$ (ஆ) $(A\times B)\cap(A\times C)$ (இ) $A\times(B\cup C)$ (ஈ) $(A\times B)\cup(A\times C)$ ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு (அ) இரண்டு கணங்களின் இடைவெட்டின் வரையறையின்படி $B\cap C=\{4\}$. எனவே,

$$A\times(B\cap C)(1,4),(2,4),(3,4)\}.$$

(ஆ)

$$A\times B=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2.4),(3,3),(3,4)\}$$
$$A\times C=\{(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),$$
$$(2,6),(3,4),(3,5),(3,6)\}$$

எனவே,

$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1,4),(2,4),(3,4)\}$

(இ) $B \cup C = \{3,4,5,6\}$ என்பதால்

$A \times (B \cup C) = \{(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),$
$(2,3),(2,4),(2.5),(2,6),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$

(ஈ) மேலுள்ள (ஆ)விலிருந்து $A \times B$யையும் $A \times C$யையும் பயன்படுத்தி,

$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),$
$(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$

சான்று 4 $P = \{1,2\}$ எனில், $P \times P \times P$ என்ற கணத்தை உருவாக்குக.

தீர்வு

$P \times P \times P = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(1,2,2),$
$(2,1,1),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2)\}$

சான்று 5 R எல்லா மெய்யெண்களின் கணம் எனில், $R \times R$, $R \times R \times R$ ஆகிய காருட்டீசியப் பெருக்கல்கள் எவற்றை குறிக்கின்றன?

தீர்வு $R \times R$ என்ற காருட்டீசியப்பெருக்கல்

$$R \times R = \{(x,y) : x,y \in R\}$$

என்ற கணத்தை குறிக்கிறது. இது இருபரிமாண வெளியிலுள்ள எல்லாப்புள்ளிகளின் ஒருங்களவுகளை குறிக்கிறது.

$$R \times R \times R = \{(x,y,z) : x,y,z \in R\}$$

முப்பரிமாண வெளியிலுள்ள எல்லாப்புள்ளி களின் ஒருங்களவுகளை குறிக்கிறது.

சான்று 6 $A \times B = \{(p,q),(p,r),(m,q),(m,r)\}$ எனில், Aயையும் Bயையும் காண்க.

தீர்வு $A =$ முதல் உறுப்புகளின் கணம் $= \{p,m\}$,
$B =$ இரண்டாம் உறுப்புகளின் கணம் $= \{q,r\}$.

பயிற்சி 2.1

1. $\left(\frac{x}{3}+1, y-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$
எனில், x,yமதிப்புகளை காண்க.
2. A என்ற கணத்தில் 3 உறுப்புகள் இருந்து, $B = \{3,4,5\}$ எனில் $A \times B$யிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை காண்க.
3. $G = \{7,8\}, H = \{5,4,2\}$ எனில், $G \times H$ஐயும் $H \times G$ஐயும் காண்க.
4. கீழ்க்காணும் கூற்றுகள் மெய்யா பொய்யா எனக்கூறுக. பொய் எனில், கூற்றை சரியாக எழுதுக.
   a. $P = \{m,n\}, Q = \{n,m\}$ எனில் $P \times Q = \{(m,n),(n,m)\}$
   b. Aயும் Bயும் வெற்றிலாக்கணங்கள் எனில், $A \times B$ வெற்றிலாக்கணம்; அதில் $x \in A, y \in B$ என்றவாறு (x,y) என்ற முறைமையிட்ட சோடிகள் இருக்கின்றன.
   c. $A = \{1,2\}, B = \{3,4\}$ எனில், $A \times (B \cap \phi) = \phi$.
5. $A = \{-1,1\}$ எனில் $A \times A \times A$ஐ காண்க.
6. $A \times B = \{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y)\}$ எனில், Aயையும் Bயையும் காண்க.
7. $A = \{1,2\}, B = \{1,2,3,4\}, C = \{5,6\}, D = \{5,6,7,8\}$ என்க. கீழ்க்காண்பவற்றை சரிபார்க்க.
   a. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ b. $A \times C \subset B \times D$
8. $A = \{1,2\},\ B = \{3,4\}$ என்க. $A \times B$யை எழுதுக. $A \times B$யில் எத்தனை உட்கணங்கள் உள்ளன? பட்டியலிடுக.
9. Aயும் Bயும் இரண்டு கணங்கள், $n(A) = 3, n(B) = 2$ என்க. $(x,1),(y,2),(z,1)$ ஆகியவை $A \times B$யில் இருந்தால், Aயையும் Bயையும் காண்க; இங்கு x,y,z ஆகியவை தனிப்பட்ட உறுப்புகள்.
10. $A \times A$ என்ற காருட்டீசியப்பெருக்கலில் 9 உறுப்புகள் உள்ளன. அவற்றுள் $(-1,0)$உம் $(0,1)$உம் இருக்கின்றன. A என்ற கண்ததையும் $A \times A$வின் மற்ற உறுப்புகளையும் காண்க.

2.3 உறவுகள்

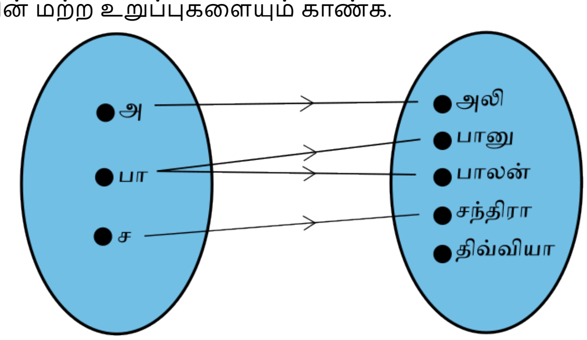
$P = \{$அ, பா, ச$\}$,

$Q = \{$அலி, பானு, பாலன், சந்திரா, திவ்வியா$\}$

ஆகிய இரண்டு கணங்களை கருதுக. இவற்றின் காருட்டீசியப்பெருக்கலில் 15 முறைமையிட்ட சோடிகள் உள்ளன. அவற்றை

$\{($அ, அலி$), ($அ, பானு$), \ldots, ($ச, திவ்வியா$)\}$

என்றவாறு பட்டியலிடலாம்.



படம் 2.4

இப்போது, ஒவ்வொரு முறைமையிட்ட சோடியான (x,y)யின் முதல் உறுப்புக்கும் இரண்டாம் உறுப்புக்குமிடையில்

$R = \{(x, y): y$இன் முதலெழுத்து $= x, x \in P, y \in Q\}$ என்ற ஒரு உறவை புகுத்துவதன்மூலம் $P \times Q$வின் ஒரு உட்கணத்தை பெறலாம். அப்படியெனில்,

$$R = \{(\text{அ}, \text{அலி}), (\text{பா}, \text{பானு}), (\text{பா}, \text{பாலன்}), (\text{ச}, \text{சந்திரா})\}$$

இந்த உறவின் (*அம்புக்குறிப்படவரைவு* எனப்படும்) ஒரு காணுறு குறிப்பீட்டை படம் 2.4 காட்டுகிறது.

வரையறை 2 A என்ற ஒரு வெற்றிலாக் கணத்திலிருந்து B என்ற வெற்றிலாக்கணத்துக் கான உறவு $A \times B$ என்ற காருட்டீசியப்பெருக் கலின் ஒரு உட்கணம். $A \times B$யிலுள்ள முறைமை யிட்ட சோடிகளின் முதல் உறுப்புக்கும் இரண்டாம் உறுப்புக்குமிடையிலான உறவை விவரிப்பதன்மூலம் இந்த உட்கணத்தை வருவிக்கிறோம். இரண்டாம் உறுப்பை முதலுறுப்பின் ***நிழலுரு*** என்கிறோம்.

வரையறை 3 A என்ற கணத்திலிருந்து Bக்கான R என்ற உறவிலுள்ள முறைமையிட்ட சோடிகளின் முதலுறுப்புகளின் கணம் அந்த உறவின் ***களம்.***

வரையறை 4 Aயிலிருந்து Bக்கான R என்ற உறவிலுள்ள முறைமையிட்ட சோடிகளின் இரண்டாமுறுப்புகளின் கணம் அந்த உறவின் வீச்சு. B என்ற முழுக்கணம் Rஇன் உடன்களம். வீச்சு $\subset$ உடன்களம் என்பதை நோக்குக.**

குறிப்புரைகள் (அ) ஒரு உறவை குறிக்கணிதப்படி பட்டியற்குறியீட்டாலோ பண்புக்குறியீட்டாலோ குறிப்பிடலாம்.

(ஆ) அம்புக்குறிப்படவரைவு உறவின் ஒரு காட்சிக்குறிப்பீடு.

சான்று 7 $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ என்க. Aயிலிருந்து Aக்கு R என்ற உறவை

$$R = \{(x, y): y = x + 1\}$$

என்று வரையறுப்போம். (அ) இந்த உறவை அம்புக்குறிப்படவரைவால் குறிப்பிடுக. (ஆ) அதன் களம், உடன்களம், வீச்சு ஆகியவற்றை எழுதுக.

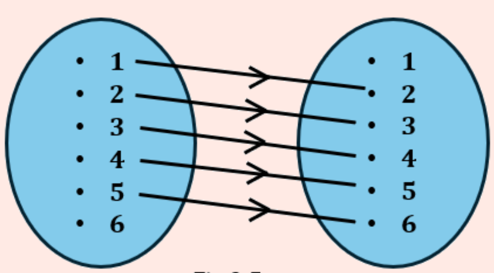


Fig 2.5

படம் 2.5

தீர்வு (அ) உறவின் வரையறையின்படி

$$R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$$

நிகரான அம்புக்குறிவரைபடத்தை படம் 2.5 காட்டுகிறது.

(ஆ) களம்=$\{1,2,3,4,5\}$ என்பதையும் வீச்சு=$\{2,3,4,5,6\}$ என்பதையும் எளிதில் காண்கிறோம். உடன்களம்=$\{1,2,3,4,5,6\}$.

சான்று 8 படம் 2.6 P, Q என்ற கணங்களிடையிலான ஒரு உறவை காட்டுகிறது. இந்த உறவை (அ) பண்புவடிவத்திலும் (ஆ) பட்டியல் வடிவத்திலும் எழுதுக. இதன் களமும் வீச்சும் யாவை?

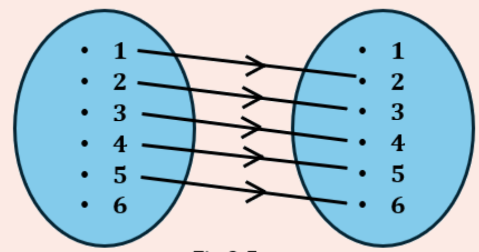


Fig 2.5

படம் 2.6

தீர்வு R என்ற உறவு '$x = y$இன் வர்க்கம்' என்பது தெளிவு.

(அ) பண்புவடிவத்தில்

$R = \{(x, y): x = y^2, x \in P, y \in Q\}$.

(ஆ) பட்டியல்வடிவத்தில் $R = \{(9,3), (9,-3), (4,2), (4,-2), (25,5), (25,-5)\}$

உறவின் களம் $\{4,9,25\}$

உறவின் வீச்சு $\{-2,2,-3,3,-5,5\}$

1 என்ற உறுப்பு Pயிலுள்ள எந்த உறுப்புக்கும் உறவாகவில்லை என்பதை நோக்குக. Q இந்த உறவின் உடன்களம்.

குறிப்பு Aயிலிருந்து Bக்கு வரையறுக்கக் கூடிய உறவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $A \times B$யின் சாத்தியமான உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை. $n(A) = p, n(B) = q$ எனில், $n(A \times B) = pq$; உறவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை 2^{pq}.

சான்று 9 $A = \{1,2\}, B = \{3,4\}$ என்க. Aயிலிருந்து Bக்கான உறவுகளின் எண்ணிக்கையை காண்க.

தீர்வு $A \times B = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$

$n(A \times B) = 4$ என்பதால், $A \times B$யின் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை 2^4. எனவே, Aயிலிருந்து Bக்கு 2^4 உறவுகள் இருக்கலாம்.

குறிப்புரை Aயிலிருந்து Aக்கான உறவை Aயின்மீதான உறவு என்கிறோம்.

பயிற்சி 2.2

1 $A=\{1,2,3,\ldots,14\}$ என்க. Aயிலிருந்து Aக்கான உறவை $R=\{(x,y): 3x-y=0;$ இங்கு $x,y\in A\}$ என்று வரையறுக்கிறோம். களம், உடன்களம், வீச்சு ஆகியவற்றை எழுதுக.

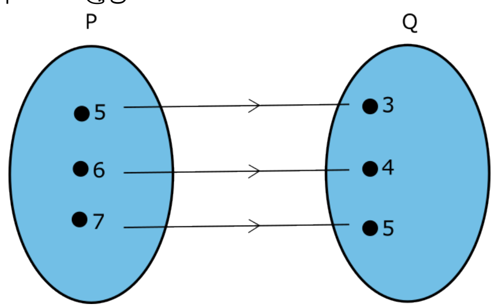
2 இயலெண்கணத்தில் (Nஇல்) $R=\{(x,y): y=x+5, x\in N, y\in N, x<4\}$ என்ற உறவை வரையறுக்கிறோம். இந்த உறவை பட்டியல்வடிவில் தருக. களத்தையும் வீச்சையும் எழுதுக.

3 $A=\{1,2,3,5\}, B=\{4,6,9\}$. Aயிலிருந்து Bக்க்கான உறவை

$$R\{(x,y): x\text{க்கும் } y\text{க்குமுள்ள வேறுபாடு ஒற்றைப்படை}; x\in A, y\in B\}$$

என்று வரையறுக்கிறோம். இந்த உறவை பட்டியல்வடிவில் எழுதுக.

4 படம் 2.7 P,Q ஆகிய கணங்களுக்கிடையான உறவை காட்டுகிறது. இந்த உறவை (அ) பண்புவடிவிலும் (ஆ) பட்டியல்வடிவிலும் எழுதுக. களமும் வீச்சும் யாவை?



படம் 2.7

5 $A=\{1,2,3,4,6\}$ என்க. Aயின்மீது R என்ற உறவை

$\{(x,y): a,b\in A, b$யை a முழுச்சரியாக வகுக்கிறது$\}$

என்று வரையறுக்கிறோம். (அ) Rஐ பட்டியல் வடிவில் எழுதுக. (ஆ) Rஇன் களத்தை காண்க. (இ) Rஇன் வீச்சை காண்க.

6 $R=\{(x,x+5): x\in\{0,1,2,3,4,5\}\}$ என்ற உறவின் களத்தையும் வீச்சையும் தீர்மானிக்க.

7 $R=\{(x,x^3): x$ 10ஐவிட குறைவான பகாவெண்$\}$ என்ற உறவை பட்டியல்வடிவில் எழுதுக.

8 $A=\{x,y,z\}, B=\{1,2\}$ என்க. Aயிலிருந்து Bக்குள்ள உறவுகளின் எண்ணிக்கையை காண்க.

9 Zயில் வரையறுத்த ஒரு உறவு $R=\{(a,b): a,b\in Z, a-b$ முழுவெண்$\}$ என்க. Rஇன் களத்தையும் வீச்சையும் காண்க.

2.4 சார்பன்கள்

இந்த பகுதியில் *சார்பன்* எனப்படும் ஒரு தனித்துவ வகையான உறவை படிப்போம். இது கணிதத்தில் அதிமுக்கியமான கருத்துருகளுள் ஒன்று. சார்பனை சில குறிப்பிட்ட உறுப்புகளி லிருந்து புதிய உறுப்புகளை உண்டாக்கும் ஒரு விதியாக மனங்காணலாம். சார்பனை குறிக்க இணைபடம், இணைபடமாக்கல் போன்ற பல சொற்களும் பயன்படுகின்றன.

வரையறை 5 A என்ற கணத்திலிருந்து B என்ற கணத்துக்கான f என்ற உறவின்கீழ் Aயின் ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் Bயின் ஒன்றும் ஒன்று மட்டுமேயுமான நிழலுரு இருந்தால் அந்த உறவை சார்பன் என்கிறோம்.

வேறுவிதமாக சொன்னால், f என்ற சார்பன் A என்ற வெற்றிலாக்கணத்திலிருந்து B என்ற வெற்றிலாக்கணத்துக்கு, fஇன் களம் Aயாகவும் fஇன் எந்த இருவேறு முறைமையிட்ட சோடிகளிலும் முதலுறுப்பு ஒரேயுறுப்பாக இல்லாமலும் இருக்கும்படியான ஒரு உறவு.

Aயிலிருந்து Bக்கான f என்ற சார்பனுக்கு $(a,b)\in f$ என்றிருந்தால், $f(a)=b$; இங்கு fஇன்கீழ் aயின் நிழலுரு b என்றும் aவை fஇன்கீழ் bயின் முன்னுரு என்றும் சொல்கிறோம்.

Aயிலிருந்து Bக்கான f என்ற சார்பனை $f: A\to B$ என்று குறிக்கிறோம்.

மேற்கண்ட சான்றுகளை பார்வையிட்டு சான்று 7இலுள்ள உறவில் 6 என்ற உறுப்புக்கு நிழலுரு இல்லாததால் இந்த உறவு சார்பனன்று என்று காண்கிறோம்.

மேலும், சான்று 8இலுள்ள உறவு சார்பனன்று; ஏனெனில், **களத்**திலுள்ள உறுப்புகள் ஒன்றுக்குமேற்பட்ட நிழலுருக்களுடன் உறவிலிருக்கின்றன. சான்று 9இலுள்ள உறவும் சார்பனன்று. (*ஏன்?*) கீழ்வரும் சான்றுகளில் மேலும் பல உறவுகளை காண்போம். இவற்றுள் சில சார்பன்கள்; வேறு சில சார்பன்களல்ல.

சான்று 10 N இயலெண்களின் கணம் என்க. அதன்மீது $R=\{(x,y): y=2x: x,y\in N\}$ என்ற உறவை வரையறுப்போம். Rஇன் களம், உடன்களம், வீச்சு ஆகியவை யாவை? இந்த உறவு ஒரு சார்பனா?

தீர்வு Rஇன் களம் இயலெண்கணமான N. உடன்களமும் N. வீச்சு இரட்டைப் படையெண்களின் கணம்.

ஒவ்வொரு n என்ற இயலெண்ணுக்கும் ஒரு நிழலுருவும் ஒரு நிழலுரு மட்டும் இருப்பதால் இந்த உறவு ஒரு சார்பன்.

சான்று 11 கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு உறவையும் ஆராய்ந்து ஒவ்வொரு வேற்றுவத்திலும் அது சார்பனா இல்லையா என்பதை காரணங் களுடன் கூறுக.

(அ) $R=\{(2,1),(3.1),(4.2)\}$

(ஆ) $R=\{(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$

(இ) $R=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,7)\}$

தீர்வு (அ) Rஇன் **களத்**திலுள்ள $2,3,4$ என்ற உறுப்புகளுள் ஒவ்வொன்றுக்கும் ஒருத்துவமான நிழலுரு இருப்பதால் இது ஒரு சார்பன்.

(ஆ) 2 என்ற முதலுறுப்பு $2, 4$ என்ற வெவ்வேறு நிழலுருக்களுக்கு நிகராவதால் சார்பனன்று.

(இ) ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் ஒன்றும் ஒன்று மட்டுமான நிழலுரு இருப்பதால் இது சார்பன்.

வரையறை 6 Rஓ அதன் ஒரு உட்கணமோ வீச்சாகும் ஒரு சார்பனை *மெய்யெண் மதிப்புச்சார்பன்* என்கிறோம். மேலும், அதன் களமும் Rஓ Rஇன் உட்கணமோ எனில் இதை *மெய்யெண்சார்பன்* என்கிறோம்.

சான்று 12 இயலெண்களின் கணம் N என்க. $f: N \to N$ என்ற மெய்யெண்மதிப்புச்சார்பனை $f(x) = 2x + 1$ என்று வரையறுக்க. இந்த வரையறையை பயன்படுத்தி, கீழ்க்காணும் அட்டவணையை நிரப்புக.

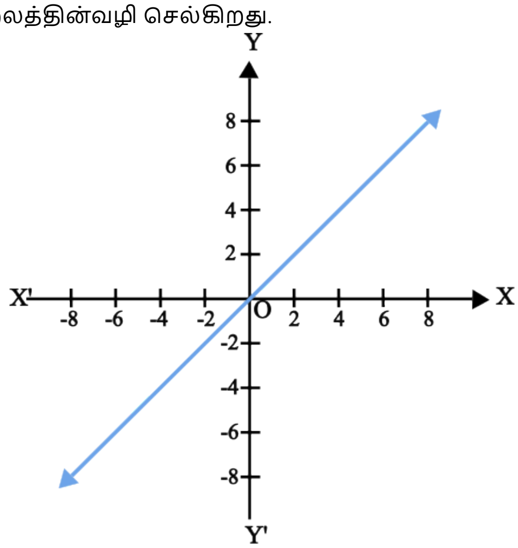
x	1	2	3	4	5	6	7
y	$f(1) = \ldots$	$f(2) = \ldots$	$f(3) = \ldots$	$f(4) = \ldots$	$f(5) = \ldots$	$f(6) = \ldots$	$f(7) = \ldots$

தீர்வு நிரப்பிய அட்டவணை பின்வருமாறு.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	$f(1) = 3$	$f(2) = 5$	$f(3) = 7$	$f(4) = 9$	$f(5) = 11$	$f(6) = 13$	$f(7) = 15$

2.4.1 சில சார்பன்களும் அவற்றின் வரைபடங்களும்

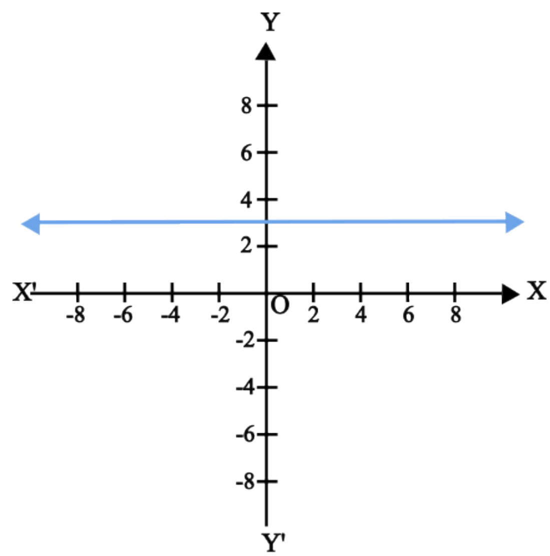
(அ) **முற்றொருமைச்சார்பன்**: மெய்யெண் கணம் R என்க. $f: R \to R$ என்ற மெய்யெண் மதிப்புச்சார்பனை ஒவ்வொரு $x \in R$க்கும் $y = f(x) = x$ என்று வரையறுக்க. இவ்வாறான சார்பனை *முற்றொருமைச்சார்பன்* என்கிறோம். இங்கு fஇன் களமும் வீச்சும் R. சார்பனின் வரைபடம் படம் 2.8இல் காட்டிய நேர்க்கோடு. அது மூலத்தின்வழி செல்கிறது.



$f(x)=x$

படம் 2.8

(ஆ) **மாறிலிச்சார்பன்**: $f: R \to R$ என்ற சார்பனை $y = f(x) = c,\ x \in R$ என்று வரையறுக்க. இங்கு, c ஒரு மாறிலி. இந்த சார்பனின் களம் R; வீச்சு $\{c\}$. சார்பனின் வரைபடம் xஅச்சுக்கு இணையான நேர்க்கோடு. சான்றாக, ஒவ்வொரு $x \in R$க்கும் $f(x) = 3$ என்ற சார்பனின் வரைபடத்தை படம் 2.9 காட்டுகிறது.



$f(x)=3$

படம் 2.9

(இ) **பல்லுறுப்புச்சார்பன்**: ஒவ்வொரு $x \in R$க்கும் $y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ எனில், $f: R \to R$ என்ற சார்பனை *பல்லுறுப்புச்சார்பன்* என்கிறோம்; இங்கு, n ஒரு எதிர்மமற்ற முழுவெண்; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$.

$f(x) = x^3 - x^2 + 2$ என்றும் $g(x) = x^4 + \sqrt{2}\, x$ என்றும் வரையறுத்த சார்பன்கள் பல்லுறுப்புச் சார்பன்களின் சான்றுகள்; மாறாக, $h(x) = x^{2/3} + 2x$ என்று வரையறுத்தது பல்லுறுப்புச்சார்பனன்று. (*ஏன்?*)

சான்று 13 $f: R \to R$ என்ற சார்பனை $f(x) = x^2, x \in R$ என்று வரையறுக்க. இந்த வரையறையை பயன்படுத்தி கீழ்க்காணும்

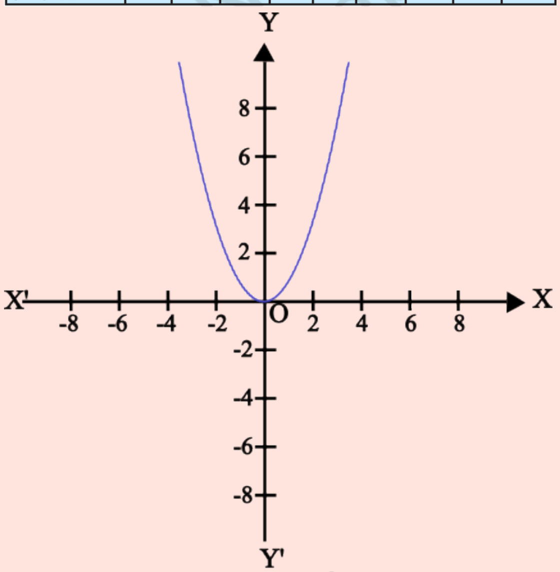
பட்டியலை நிரப்புக. இந்த சார்பின் களமும் வீச்சும் யாவை? fஇன் வரைபடத்தை வரைக.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$									

தீர்வு நிரப்பிய அட்டவணை பின்வருமாறு.

fஇன் களம் $\{x: x \in R\}$; fஇன் வீச்சு $\{x^2: x \in R\}$. fஇன் வரைபடத்தை படம் 2.10 காட்டுகிறது.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

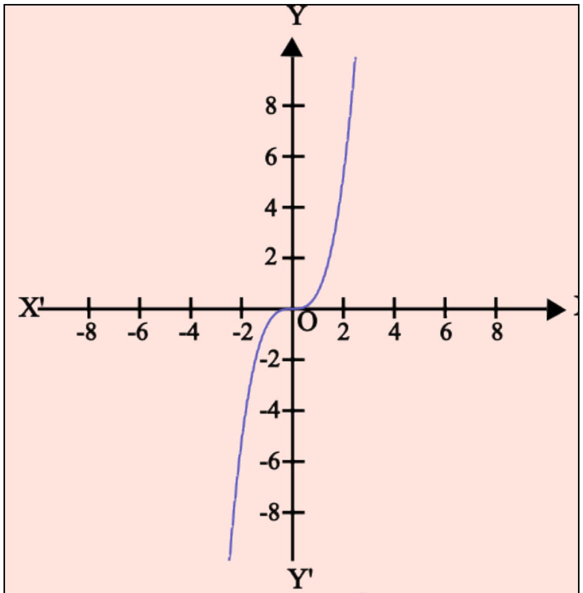


$f(x)=x^2$

படம் 2.10

சான்று 14 $f(x) = x^3, x \in R$ என்று வரையறுத்த $f: R \to R$ என்ற சார்பனின் வரைபடத்தை வரைக.

தீர்வு $f(0) = 0, f(1) = 1, f(-1) = 1, f(2) = 8, f(-2) = -8, f(3) = 27, f(-3) = -27,$ இவ்வாறே. இதன் வரைபடத்தை படம் 2.11 காட்டுகிறது.



$f(x)=x^3$

படம் 2.11

(ஈ) **விகிதமுறு சார்பன்கள்**: இவை $f(x)/g(x)$ என்ற வகையானவை; இங்கு, $f(x)$உம் $g(x)$உம் xஇல் ஒரு **களத்தில்** வரையறுத்த பல்லுறுப்புச்சார்பன்கள்; $g(x) \neq 0$.

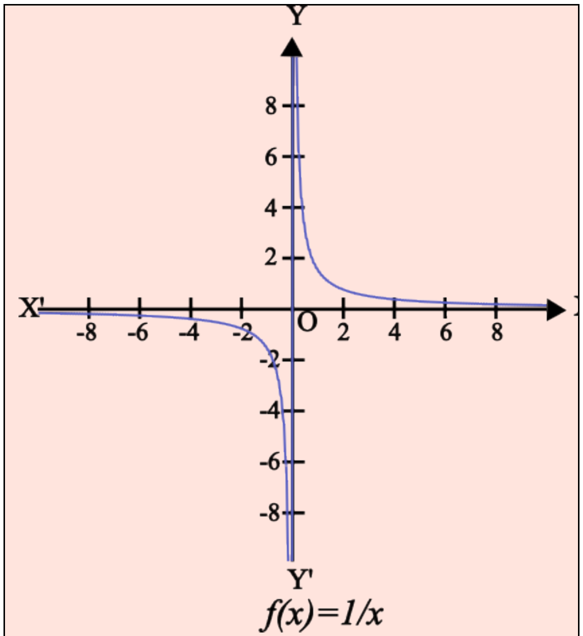
சான்று 15 $f: R - \{0\} \to R$ என்ற மெய்யெண் மதிப்புச்சார்பனை $f(x) = 1/x, x \in R - \{0\}$ என்று வரையறுக்கிறோம். இந்த வரையறையை பயன்படுத்தி கீழ்க்காணும் அட்டவணையை நிரப்புக. சார்பனின் களமும் வீச்சும் யாவை?

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y = \frac{1}{x}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...

தீர்வு நிரப்பிய அட்டவணை பின்வருமாறு.

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y = \frac{1}{x}$	-0.5	-0.67	-1	-2	4	2	1	0.67	0.5

களம் சுழியத்தைத்தவிர எல்லா மெய்யெண்களும்; வீச்சும் சுழியத்தைத் தவிர எல்லா மெய்யெண்களும். சார்பனின் வரைபடத்தை படம் 2.12 காட்டுகிறது.

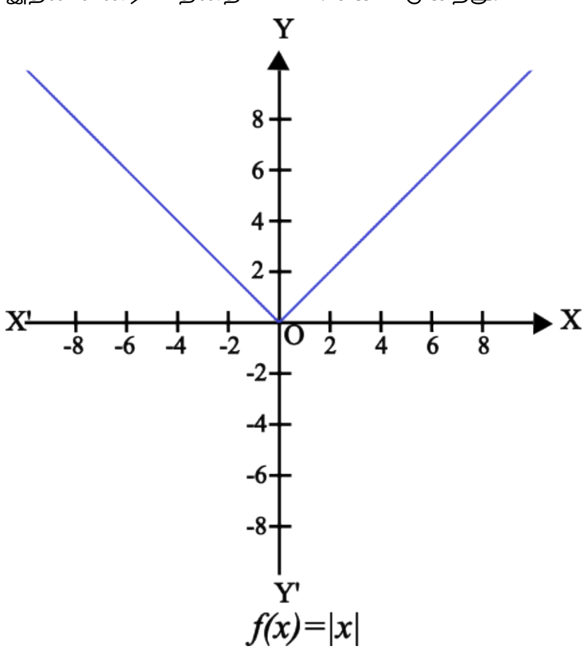


படம் 2.12

(உ) **மட்டுச்சார்பன்**: ஒவ்வொரு $x \in R$க்கும் $f(x) = |x|$ வரையறுக்கும் $f: R \to R$ என்ற சார்பனை மட்டுச்சார்பன் என்கிறோம். xஇன் ஒவ்வொரு எதிர்மமற்ற மதிப்புக்கும் $f(x)$ xக்கு சமம். ஆனால் எதிர்மமதிப்புகளுக்கு $f(x)$இன் மதிப்பு xஇன் எதிர்மமதிப்பு. அதாவது

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

இதன் வரைபடத்தை படம் 2.13 காட்டுகிறது.

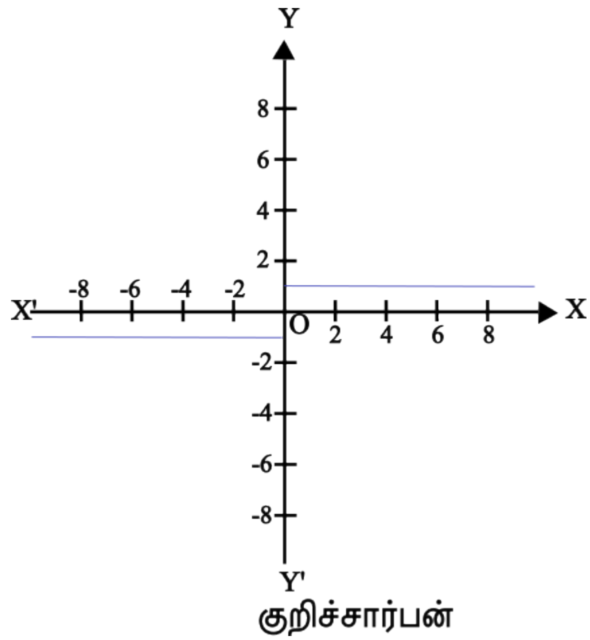


படம் 2.13

(ஊ) **குறிச்சார்பன்**: கீழ்க்காணுமாறு வரையறுத்த $f: R \to R$ என்ற சார்பனை குறிச்சார்பன் என்கிறோம்.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \text{ எனில்} \\ 0, & x = 0 \text{ எனில்} \\ -1, & x < 0 \text{ எனில்} \end{cases}$$

குறிச்சார்பனின் களம் R; அதன் வீச்சு $\{-1,0,1\}$ என்ற கணம். குறிச்சார்பனின் வரைபடத்தை படம் 2.14 காட்டுகிறது.

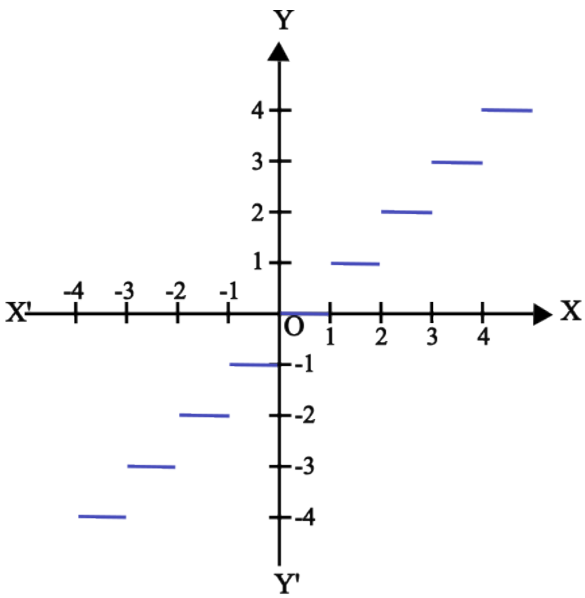


படம் 2.14

(எ) **மீப்பெரும முழுவெண் என்ற சார்பன்**: $f(x) = [x], x \in R$ என்று வரையறுத்த $f: R \to R$ சார்பன் xஐவிட குறைவானதோ சமமானதோவான மீப்பெரும முழுவெண்ணின் மதிப்பை எடுக்கிறது. இவ்வாறான சார்பனை **மீப்பெருமமுழுவெண் சார்பன்** என்கிறோம். $[x]$இன் வரையறையிலிருந்து

$$[x] = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0 \text{ எனில்} \\ 0, & 0 \leq x < 1 \text{ . எனில்} \\ 1, & 1 \leq x < 2 \text{ எனில்} \\ 2, & 2 \leq x < 3 \text{ எனில்} \\ & \text{என்றிவ்வாறே} \end{cases}$$

இந்த சார்பனின் வரைபடத்தை படம் 2.15 காட்டுகிறது.



$f(x)=[x]$

படம் 2.15

2.4.2 மெய்யெண்சார்பன்களின் குறிக்கணிதம்

இந்த பகுதியில் இரண்டு மெய்யெண்சார்பன்களை கூட்டுவதையும் ஒன்றிலிருந்து மற்றொன்றை கழிப்பதையும் ஒரு மெய்யெண் சார்பனை திசையிலியால் பெருக்குவதையும் (இங்கு திசையிலி ஒரு மெய்யெண்) இரண்டு மெய்யெண்சார்பன்களை பெருக்குவதையும் ஒன்றை மற்றொன்றால் வகுப்பதையும் படிப்போம்.

(அ) **இரண்டு மெய்யெண்சார்பன்களை கூட்டல்**: $f: X \to R,\ g: X \to R$ ஆகியவை இரண்டு மெய்யெண்சார்பன்கள் என்க. அப்போது, $(f+g): X \to R$ என்ற சார்பனை

$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$ எல்லா $x \in X$

என்று வரையறுக்கிறோம்.

(ஆ) **ஒரு மெய்யெண்சார்பனிலிருந்து மற்றொன்றை கழித்தல்**: $f: X \to R,\ \ g: X \to R$ ஆகியவை இரண்டு மெய்யெண்சார்பன்கள் என்க; இங்கு $X \subset R$. அப்போது $(f-g): X \to R$ என்ற சார்பனை .எல்லா $x \in X$க்கும் $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ என்று வரையறுக்கிறோம்.

(இ) **திசையிலியால் பெருக்கல்**: $f: X \to R$ ஒரு மெய்யெண்மதிப்புச்சார்பன், α ஒரு திசையிலி என்க. இங்கு திசையிலி ஒரு மெய்யெண்ணை குறிக்கிறது. அப்போது, αf என்ற பெருக்கல் Xஇலிருந்து Rக்கு $(\alpha f)(x) = \alpha f(x), x \in X$ என்று வரைபறுத்த சார்பன்.

(ஈ) **இரண்டு மெய்யெண்சார்பன்களை பெருக்கல்**: $f: X \to R,\ \ g: X \to R$ என்ற இரண்டு மெய்யெண்சார்பன்களின் பெருக்கல் எல்லா $x \in X$க்கும் $(fg)(x) = f(x)g(x)$ என்று வரையறுத்த $fg: X \to R$ என்ற சார்பன். இதை *புள்ளிவாரியான பெருக்கல்* என்றும் அழைக்கிறோம்.

(உ) **இரண்டு மெய்யெணசார்பன்களின் ஈவு**: fஉம் gஉம் $X \to R$இல் வரையறுத்த இரண்டு மெய்யெண்சார்பன்கள் என்க; இங்கு $X \subset R$. fஇன்கீழ் g என்ற ஈவை f/g என்று குறிக்கிறோம்; இதை $g(x) \neq 0,\ \ x \in X$ என்றபோது

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

என்று வரையறுக்கிறோம்.

சான்று 16 $f(x) = x^2, g(x) = 2x+1$ ஆகியவை இரண்டு மெய்யெண்சார்பன்கள் என்க. $(f+g)(x),\ \ (f-g)(x),\ \ (fg)(x),\ \ (f/g)(x)$ ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு

$$(f+g)(x) = x^2 + 2x + 1,$$
$$(f-g)(x) = x^2 - 2x - 1$$
$$(fg)(x) = x^2(2x+1) = 2x^3 + x^2$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{2x+1}, \qquad x \neq -\frac{1}{2}$$

சான்று 17 $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x$ ஆகியவை எதிர்மமற்ற மெய்யெகளின்மீது வரையறுத்த இரண்டு சார்பன்கள் என்க.

$(f+g)(x), (f-g)(x), (fg)(x), \left({}^{f}/_{g}\right)(x)$

ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு

$$(f+g)(x) = \sqrt{x} + x$$
$$(f-g)(x) = \sqrt{x} - x$$
$$(fg)(x) = \sqrt{x}(x) = x^{3/2}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} = x^{-1/2}, x \neq 0$$

பயிற்சி 2.3

1 கீழ்க்காணும் உறவுகளில் எவை சார்பன்கள்? காரணங்கூறுக. சார்பன்களின் களங்களையும் வீச்சுகளையும் தீர்மானிக்க.
  a. $\{(2,1), (5,1), (8,1), (11,1), (14,1), (17,1)\}$
  b. $\{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4), (10,5), (12,6), (14,7)\}$
  c. $\{(1,3), (1,5), (2,5)\}$

2 கீழ்க்காணும் சார்பன்களின் களங்களையும் வீச்சுகளையும் காண்க.
  a. $f(x) = -|x|$ b. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

3 f என்ற சார்பன் $f(x) = 2x - 5$ என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

a. $f(0)$ b. $f(7)$ c. $f(-3)$

ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை எழுதுக.

4 வெப்பநிலையை செல்சியசுப்பாகையிலிருந்து பாரனைட்டுப்பாகைக்கு இணைபடமாக்கும் t என்ற சார்பனை

$$t(C) = \frac{9C}{5} + 32$$

என்று வரையறுக்கிறோம்.

a. $t(0)$ b. $t(28)$ c. $t(-10)$

d. $t(C) = 212$ என்றபோது Cயின் மதிப்பு

ஆகியவற்றை காண்க.

5 கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு சார்பனின் வீச்சையும் காண்க.

a. $f(x) = 2 - 3x,\ x \in R, x > 0$

b. $f(x) = x^2 + 2$, x மெய்யெண்

c. $f(x) = x,\ x$ மெய்யெண்

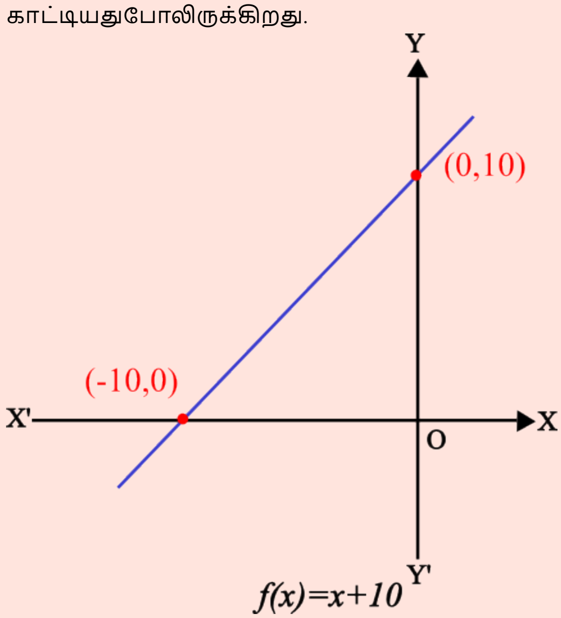
பலவகையான சான்றுகள்

சான்று 18 R மெய்யெண்களின் கணம் என்க. $f: R \to R$ என்ற மெய்யெண்சார்பனை $f(x) = x + 10$ என்று வரையறுக்கிறோம். இந்த சார்பனின் வரைபடத்தை வரைக.

தீர்வு $f(0) = 10, f(1) = 11, f(2) = 12, \dots$

மேலும், $f(-1) = 9, f(-2) = 8, \dots, f(-10) = 0, \dots$

எனவே, வரைபடத்தில் வடிவம் படம் 2.16இல் காட்டியதுபோலிருக்கிறது.



படம் 2.16

குறிப்புரை $f(x) = mx + c,\ x \in R$ என்று வரையறுத்த f என்ற சார்பனை நேரியச்சார்பன் என்கிறோம்; இங்கு, mஉம் cயும் மாறிலிகள். மேற்கண்ட சார்பன் நேரியச்சார்பனின் ஒரு சான்று.

சான்று 19 R என்ற உறவை Qவிலிருந்து Qவுக்கு $R = \{(a,b): a,b \in Q, a - b \in Z$ என்று வரையறுப்பதாக கொள்க. கீழ்க்காண்பவற்றை காட்டுக.

(அ) Qவிலுள்ள எல்லா aகளுக்கும் $(a,a) \in R$

(ஆ) $(a,b) \in R$ உள்ளுரைப்பது $(b,a) \in R$

(இ) $(a,b) \in R, (b,c) \in R$ உள்ளுரைப்பது $(a,c) \in R$

தீர்வு Q விகிதமுறு எண்களின் கணம் என்பதை நினைவுகொள்க

(அ) $a - a = 0 \in Z$ என்பதால், $(a,a) \in R$ என்பதை பெறுகிறோம்.

(ஆ)$(a,b) \in R$ உள்ளுரைப்பது $a - b \in Z$. இதனால், $b - a \in Z$. எனவே, $(b,a) \in R$.

(இ) $(a,b) \in R, (b,c) \in R$ உள்ளுரைப்பவை $a - b \in Z, b - c \in Z$. இதனால், $a - c = (a - b) + (b - c) \in Z$. எனவே, $(a,c) \in R$.

சான்று 20 $f = \{(1,1),(2,3),(0,-1),(-1,-3)\}$ என்பது Zயிலிருந்து Zக்கு ஒரு நேரியச்சார்பன் என்க. $f(x)$ ஐ காண்க.

தீர்வு f நேரியச்சார்பன் என்பதால் $f(x) = mx + c$. மேலும் $(1,1),(0,-1) \in f$ என்பதால், $f(1) = m + c = 1,\ f(0) = c = -1$. எனவே, $m = 2$ என்றும் $f(x) = 2x - 1$ என்றும் பெறுகிறோம்.

சான்று 21 கீழ்க்காணும் சார்பனின் களத்தை காண்க.

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 5x + 4}$$

தீர்வு $x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1)$ என்பதால், $x = 4,\ x = 1$ ஆகியவற்றைத்தவிர மற்றெல்லா மெய்யெண்களுக்கும் வரையறையுள்ளது. எனவே fஇன் களம் $R - \{1,4\}$.

சான்று 22 f என்ற சார்பனின் வரையறை

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$$

$f(x)$இன் வரைபடத்தை வரைக.

தீர்வு $f(x) = 1 - x,\ x < 0$ என்பதால்

$f(-4) = 1 - (-4) = 5,$

$f(-3) = 1 - (-3) = 4$

$f(-2) = 1 - (-2) = 3$

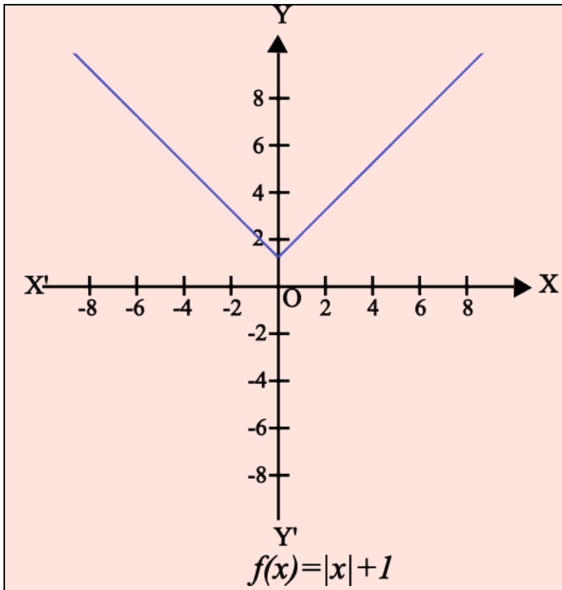
$f(-1) = 1 - (-1) = 2$

$f(x) = x + 1,\ x > 0$ என்பதால்

$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 5$

என்றிவ்வாறே

இதன் வரைபடத்தை படம் 2.17 காட்டுகிறது.



படம் 2.17

இரண்டாம் படலத்தில் பலவகையான பயிற்சிகள்

1 f என்ற உறவின் வரையறை

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 3 \\ 3x, & 3 \le x \le 10 \end{cases}$$

g என்ற உறவின் வரையறை

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 2 \\ 3x, & 2 \le x \le 10 \end{cases}$$

f ஒரு சார்பன் என்றும் g சார்பனன்று என்றும் காட்டுக.

2 $f(x) = x^2$ எனில்

$$\frac{f(1.1) - f(1)}{1.1 - 1}$$

என்பதை மதிப்பறிக

3 கீழ்க்காணும் சார்பனின் களத்தை காண்க

$$f(x) = \frac{x^2 + 2 + 1}{x^2 - 8x + 12}$$

4 $f(x) = \sqrt{x-1}$ என்று வரையறுத்த f என்ற மெய்யெண்சார்பனின் களத்தையும் வீச்சையும் காண்க.

5 $f(x) = |x - 1|$ என்று வரையறுத்த f என்ற மெய்யெண்சார்பனின் களத்தையும் வீச்சையும் காண்க.

6 Rஇலிருந்து Rக்கான ஒரு சார்பனின் வரையறை

$$f(x) = \left\{ \left(x, \frac{x^2}{1 + x^2} \right) : x \in R \right\}$$

எனில், fஇன் வீச்சை தீர்மானிக்க.

7 $f, g: R \to R$ என்ற சார்பன்கள் முறையே $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x - 3$ எனில், $f + g$, $f - g$, f/g ஆகியவற்றை காண்க..

8 $f = \{(1,1), (2,3), (0,-1), (-1,-3)\}$ என்ற Zயிலிருந்து Zக்கான சார்பனின் வரையறை $f(x) = ax + b$ என்க; இங்கு a, b முழுவெண்கள். aயையும் bயையும் தீர்மானிக்க.

9 Nஇலிருந்து Nக்கான R என்ற உறவின் வரையறை $R = \{(a,b): a \in N, b \in N, a = b^2$. கீழ்க்காண்பவை மெய்யா?

a. Nனிலுள்ள எல்லா aகளுக்கும் $(a,a) \in R$
b. $(a,b) \in R$ என்பது $(b,a) \in R$ஐ உள்ளுரைக்கிறது
c. $(a,b) \in R, (b,c) \in R$ என்பது $(a,c) \in R$ஐ உள்ளுரைக்கிறது.
ஒவ்வொரு விடைக்கும் காரணங்கூறுக.

10 $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,5,9,11,15,16\}$, $f\{(1,5),(2,9),(3.1),(4,5),(2,11)\}$ எனில், கீழ்க்காண்பவை மெய்யா?
a. f Aயிலிருந்து Bக்கு ஒரு உறவு
b. f Aயிலிருந்து Bக்கு ஒரு சார்பன்
ஒவ்வொரு விடைக்கும் காரணங்கூறுக.

11 f $Z \times Z$யின் உட்கணம் என்க. அதன் வரையறை $f = \{(ab, a+b): a \in Z, b \in Z\}$ என்க. இது Zயிலிருந்து Zக்கு ஒரு சார்பனா? விடைக்கு காரணங்கூறுக.

12 $A = \{9,10,11,12,13\}$ என்றும் $f: A \to N$இன் வரையறை $f(n) = n$இன் மீப்பெரும பகாக்காரணி என்க. fஇன் வீச்சு என்ன?

சுருக்கவுரை

இந்த படலத்தில் உறவுகளைப்பற்றியும் சார்பன்களைப்பற்றியும் படித்தோம்.

- **முறைமையிட்ட சோடி** ஒரு குறிப்பிட்ட முறைமையில் தொகுத்த இரண்டு உறுப்புகள்.
- **காருட்டீசியப்பெருக்கல்** A, B என்ற இரண்டு கணங்களின் பெருக்கல் $A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$. குறிப்பாக, $R \times R = \{(x,y): x,y \in R\}$, $R \times R \times R = \{(x,y,z): x,y,z \in R\}$.
- $(a,b) = (x,y)$ எனில், $a = x, b = y$.
- $n(A) = p, n(B) = q$ எனில் $n(A \times B) = pq$.
- $A \times \phi = \phi$.
- பொதுவாக, $A \times B \neq B \times A$
- **உறவு** A என்ற கணத்திலிருந்து B என்ற கணத்துக்கான R என்ற உறவு $A \times B$ என்ற காருட்டீசியப்பெருக்கலிலிருந்து முதல் உறுப்புக்கும் இரண்டாம் உறுப்புக்குமிடையில் ஒரு உறவை விவரிப்பதன்மூலம் பெறும் ஒரு உட்கணம்.
- R என்ற உறவில் (x,y) இருக்கும்போது, அதாவது $(x,y) \in R$ என்றபோது, Rஇன்கீழ் xஇன் **நிழலுரு** y என்கிறோம்.
- R என்ற உறவிலுள்ள முறைமையிட்ட சோடிகளின் முதலுறுப்புகளின் கணம் Rஇன் **களம்**. இரண்டாமுறுப்புகளின் கணம் **வீச்சு**.
- **சார்பன்**: A என்ற கணத்திலிருந்து B என்ற கணத்துக்கான சார்பன் ஒரு குறிப்பிட்ட வகையான உறவு. இதில் Aயின் ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் Bயில் ஒன்றும் ஒன்றுமட்டுமுமான ஒரு நிழலுரு இருக்கிறது. இதை $f: A \to B, f(x) = y$ என்று எழுதுகிறோம். fஇன் **களம்** A; அதன் **உடன்களம்** B. சார்பனின் **வீச்சு** அதன் நிழலுருக்களின் கணம்
- ஒரு மெய்யெண்சார்பனில் மெய்யெண்கணமோ அதன் உட்கணமோ சார்பனின் களமாகவும் வீச்சாகவும் இருக்கிறது.
- **சார்பன்களின் குறிக்கணிதம்**: $f: X \to R$, $g: X \to R$ என்ற சார்பன்களுக்கு

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad x \in X$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x), \qquad x \in X$$
$$(f.g)(x) = f(x).g(x), \qquad x \in X$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(g) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad x \in X, g(x) \neq 0$$