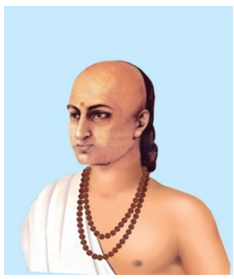
படலம் 3

முக்கோணவியச்சார்பன்கள்

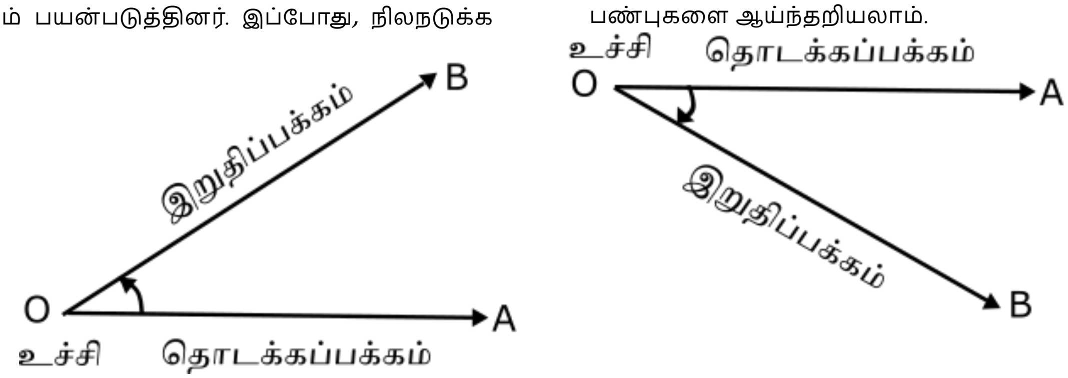
3.1 முன்னுரை



ஆரியபட்டர்
(476-550)

முக்கோணவியல் என்ற சொல் முக்கோணத்தின் பக்கங்களை அளவிடுதலை குறிக்கிறது. தொடக்கத்தில், இந்த பாடப்பொருள் முக்கோணத்துக்கு தொடர்பான வடிவியற்சிக்கல்கள தீர்க்க வளரானது. பின்னர், கடலில் வழிகாண கப்பல் களின் அணித்தலைவர் களும், நிலங்களை தரைப் படத்தில் வரைய அளக்கை யர், பொறியியலர் போன்ற வர்களும் பயன்படுத்தினர். இப்போது, நிலநடுக்க வியல், மின்சுற்றுகளை வடிவமைத்தல், அணுவின் நிலையை விவரித்தல், கடலில் நிறையீர்ப்பலை களின் உயரத்தை அளத்தல், ஒரு இசையத்தின் பகுப்பாய்வு போன்ற பல்வேறு துறைகளிலும் முக்கோணவியல் பயன்படுகிறது.

முந்தைய வகுப்புகளில் குறுங்கோணங்களின் முக்கோணவிய விகிதங்களை ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் விகிதங்களாக நாம் படித்துள்ளோம். உயரங்களுக்கும் தொலை வுக்கும் தொடர்பான சிக்கல்களை தீர்ப்பதில் முக்கோணவிய விகிதங்களின் பயன்பாட்டையும் முற்றொருமைகளைப்பற்றியும் நாம் படித்துள் ளோம். இப்படலத்தில், முக்கோணவியச்சார்பன் களுக்கான முக்கோணவியவிகிதங்கள் எனும் கருத்துருவை பொதுவமாக்கி அவற்றின் பண்புகளை ஆய்ந்தறியலாம்.



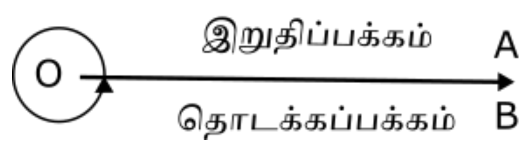
படம் 3.1

3.2 கோணங்கள்

கோணம் என்பது ஒரு கதிர் தன் தொடக்கப் புள்ளியைப்பற்றி திரும்புவதன் அளவீடு.

தொடக்கக்கதிரை கோணத்தின் தொடக்கப் பக்கமென்றும், கதிரின் இறுதி நிலையை கோணத் தின் இறுதிப்பக்கம் என்றும் அழைக்கிறோம். திருப்புப்புள்ளியை உச்சி என்று அழைக்கிறோம். திருப்பத்தின் திசை இடஞ்சுழி எனில் கோணத்தை நேர்மம் என்றும் வலஞ்சுழி எனில், அதனை எதிர்மம் என்றும் (படம் 3.1) அழைக்கிறோம்.

தொடக்கப்பக்கத்திலிருந்து இறுதிப் பக்கத்தைப்பெற நாம் நிகழ்த்தவேண்டிய திருப்பத்தின் அளவே கோணத்தின் அளவு. கோணங்களை அளக்க பல அலகுகள் உள்ளன. படம் 3.2இல் காட்டியபடி, தொடக்கப்பக்கத் திலிருந்து தொடங்கும் ஒரு முழுச்சுற்றை அலகாக கொள்ளலாம் என்பது கோணத்தின் வரையறை யிலிருந்து தெளிவாகிறது.



படம் 3.2

பல நேரங்களில், பெருங்கோணங்களை குறிக்க இது வசதியானது. சான்றாக, விரைந்து

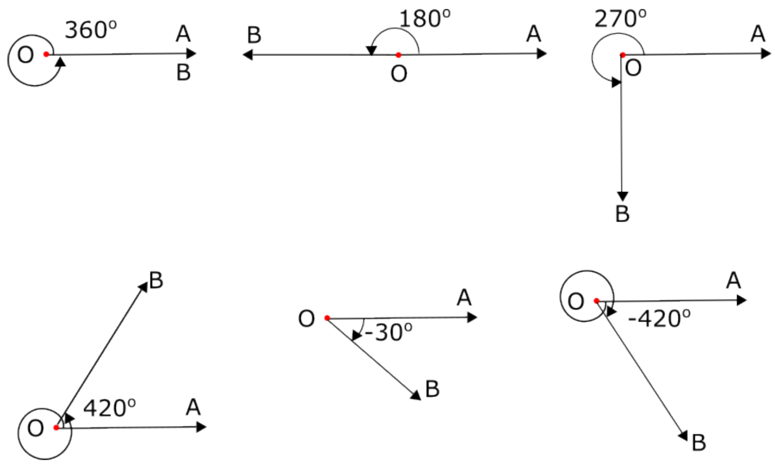
சுழலும் ஒரு சக்கரம், வினாடிக்கு 15 சுற்றுக்கள் என்ற வீதத்தில் சுழல்வதாக கூறலாம். ஒரு கோணத்தின் அளவீட்டில் பொதுவாக அதிகம் பயன்படும் வேறு இரு அலகுகளான பாகை, ஆரையன் ஆகிய அளவங்களைப்பற்றி விவரிப்போம்.

3.2.1 பாகை

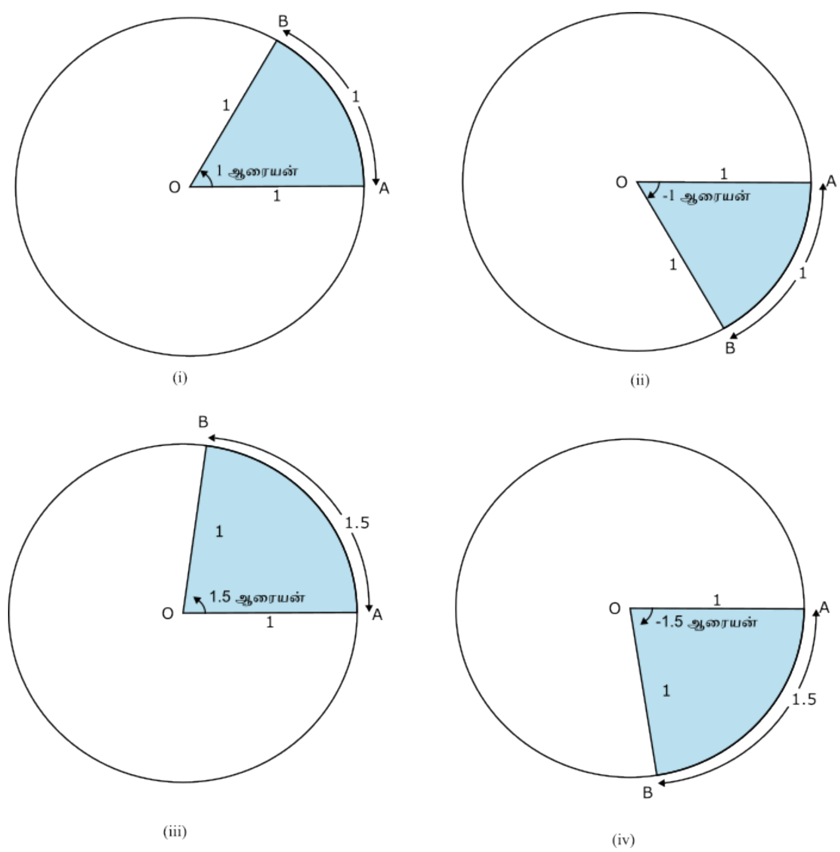
தொடக்கப்பக்கத்திலிருந்து இறுதிப்பக்கத்தின் சுற்று, ஒரு முழுச்சுற்றின் $1/360$ பங்கு எனில், இந்தக்கோணம் 1 பாகை என்று கூறி, அதனை 1° என எழுதுகிறோம். ஒரு பாகையை 60 கலைகளாகவும், ஒரு கலையை 60 விகலைகளாகவும் பிரிக்கிறோம். அதாவது, ஒரு பாகையின் $1/60$ பங்கை ஒரு கலை எனவும், ஒரு கலையின் $1/60$ பங்கை ஒரு விகலை எனவும் அழைக்கிறோம். அவற்றை முறையே $1', 1''$ என்று எழுதுகிறோம். இப்படியாக,

$$1^\circ = 60;\ 1' = 60''$$

$360^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 40^\circ, -30^\circ, -420^\circ$ ஆகிய கோண அளவுகளை படம் 3.3 காட்டுகிறது.



படம் 3.3



படம் 3.4 [(i) முதல் (iv)] வரை]

3.2.2 ஆரையன்

ஒரு கோணத்தை அளப்பதற்கான மற்றொரு அலகை ஆரையன் என்கிறோம். ஒரு அலகு வட்டத்தில் (1அலகு ஆரமுள்ள வட்டம்), 1 அலகு நீளமுள்ள ஒரு வில், மையப்புள்ளியில் தாங்கும் கோணத்தை, 1 ஆரையன் என அழைக்கிறோம்.

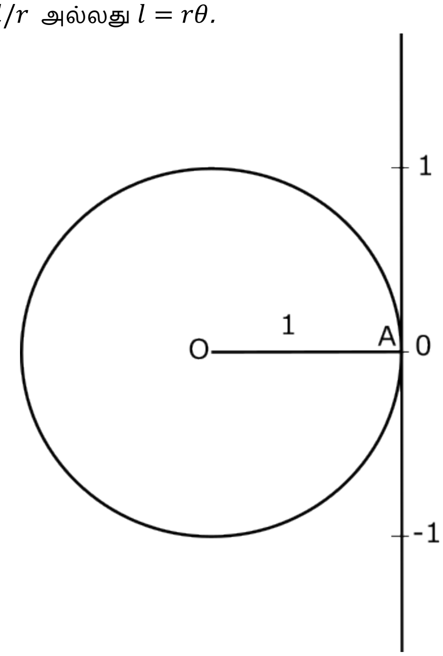
படம் 3.4(i)முதல்

படம் 3.4(iv)வரையான படங்களில், OA தொடக்கப்பக்கமாகவும் OB இறுதிப்பக்கமாகவும் உள்ளன. 1 ஆரையன், -1 ஆரையன்,$1\,{}^{1}/_{2}$ ஆரையன், $-1\,{}^{1}/_{2}$ ஆரையன் ஆகிய மதிப்புகளுள்ள கோண அளவுகளை இந்த படங்கள் காட்டுகின்றன.

1 அலகு ஆரமுள்ள வட்டத்தின் பரிதி 2π அலகு. இவ்வாறு, ஒரு தொடக்கப்பக்கம் ஒரு முழுச்சுற்றில் தாங்கும் கோணத்தின் அளவு 2π ஆரையன்.

பொதுவாக, r எனும் ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்தில் r எனும் நீளமுள்ள ஒரு வில் 1 ஆரையன் கோணத்தை தாங்குகிறது. சமமான விற்கள், வட்டத்தின் மையத்தில் சமக்கோணங்களை தாங்குவது அனைவரும் அறிந்ததே. r ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்தில் r நீளமுள்ள ஒரு வில் மையத்தில் 1 ஆரையன் கோணத்தை தாங்கினால், l நீளமுள்ள வில் தாங்கும் கோணம் l/r ஆரையன். எனவே, r ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்தில், l நீளமுள்ள வில் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் θ எனின், கீழ்க்காணும் சமன்பாட்டை நாம் பெறுகிறோம்:

$\Theta = l/r$ அல்லது $l = r\theta$.



படம் 3.5

3.2.3 ஆரையனுக்கும் மெய்யெண்களுக்குமுள்ள தொடர்பு:

O என்ற புள்ளியில் மையங்கொண்ட ஒரு அலகுவட்டத்தை கருதுக. A வட்டத்திலுள்ள ஏதோவொரு புள்ளி என்க. (படம் 3.5) OA ஒரு கோணத்தின் தொடக்கப்பக்கம் எனில், வட்டத்தின் ஒரு வில்லின் நீளம் அந்த வில் மையத்தில் தாங்கும் கோணத்தை ஆரையனில் தருகிறது. இப்போது Aயில், வட்டத்தின் தொடுகோடான PAQஐ கருதுக. A எனும் புள்ளியில் சுழியம் என்ற மெய்யெண்ணை வைப்போம். AP நேர்மமெய்யெண்ணையும், AQ எதிர்ம மெய்யெண்ணையும் குறிக்கின்றன. AP என்ற கோட்டை ஒரு கயிறாக்கி வட்டத்தின் மீது இடஞ்சுழித்திசையிலும், AQவை வலஞ்சுழித்திசை யிலும் வைத்தால், ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் ஒரு ஆரையனளவுக்கு நிகராகிறது; திருப்பியவாறும். இவ்வாறாக, ஆரையனளவுகளும் மெய்யெண் களும் ஒன்றே எனக்கருதலாம்.

3.2.4 பாகைக்கும் ஆரையனுக்குமுள்ள தொடர்பு

ஒரு வட்டம் மையத்தில் தாங்கும் கோணத்தினளவு 2π ஆரையன் என்பதாலும், அதன் பாகை அளவம் $360°$ என்பதாலும்,

2π ஆரையன் $= 360°$

அதாவது, π ஆரையன் $= 180°$.

மேற்கண்ட சமன்பாடு ஆரையனை பாகையிலும், பாகையை ஆரையனிலும் மாற்றியுரைக்க உதவுகிறது. πஇன் தோராயமான மதிப்பு ${}^{22}/_{7}$ என கொண்டால், நாம் பெறுவது

$$1 \text{ ஆரையன்} = \frac{180°}{\pi} = 57°16' (\text{தோராயமாக})$$

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ ஆரையன்}$$
$$= 0.01746 \text{ ஆரையன் (தோராயமாக)}$$

சில பொதுவான கோணங்களுக்கு, பாகையவு களுக்கும் ஆரையனளவுகளுக்குமான தொடர் பினை கீழ்க்காணும் அட்டவணை தருகிறது:

பாகை	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
ஆரையன்	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$

குறியீட்டு வழக்கேற்பு: கோணங்களை பாகைகளிலோ ஆரையன்களிலோ அளப்பதால் கீழ்க்காணும் குறிப்பீட்டு வழக்கேற்பை நாம் மேற்கொள்கிறோம். கோணத்தை θ என்று எழுதும்போது பாகையாகவும் β என்று எழுதும்போது ஆரையனாகவும் கொள்கிறோம்.

ஒரு கோணத்தை β ஆரையனாக உரைக்கும் போது, ஆரையன் என்ற சொல்லை நாம் பெரும் பாலும் விட்டுவிடுகிறோம். இவ்வாறாக, $\pi = 180°$, $\pi/4 = 45°$ என்று எழுதும்போது, π, $\pi/4$ ஆகியவை ஆரையனில் உள்ளதாக புரிந்துகொள்கிறோம். எனவே, நாம் கீழ்க்காணுமாறு எழுதலாம்:

$$\text{ஆரையனளவு} = {}^{\pi}/_{180} \times \text{பாகையளவு}$$

$$\text{பாகையளவு} = {}^{180}/_{\pi} \times \text{ஆரையனளவு}$$

சான்று 1 $40°20'$ஐ ஆரையனுக்கு மாற்றுக.

தீர்வு $180° = \pi$ ஆரையன் என்பது தெரியும்.

எனவே, $40°20' = 40\,{}^{1}/_{3}$ பாகை

$$= \frac{121}{3} \times \frac{\pi}{180} \text{ ஆரையன்} = \frac{121\pi}{540} \text{ ஆரையன்}$$

சான்று 2 6 ஆரையனை பாகைக்கு மாற்றுக.

தீர்வு π ஆரையன்$=180°$ என்பது தெரியும்.

$$6 \text{ ஆரையன்} = 6 \times \frac{180}{\pi} \text{ பாகை}$$

$$= 1080 \times \frac{7}{22} \text{ பாகை} = 343\frac{7}{11} \text{ பாகை}$$

$$= 343° + 7 \times \frac{60}{11} \text{ கலை } (1 \text{ பாகை} = 60 \text{ கலை})$$

$$= 343° + 38' + \frac{2}{11} \text{ கலை}$$

$$= 343°38'10.9'' \; (1' = 60'')$$

எனவே, தோராயமாக

6 ஆரையன்$= 343°38'10.9''$.

சான்று 3 ஒரு வட்டத்தின் $60°$ மையக்கோணம், 27.4 செமீ நீளமுள்ள ஒரு வில்லை உண்டாக்கினால், அந்த வட்டத்தின் ஆரத்தை காண்க. ($\pi = 22/7$ எனக்கொள்க).

தீர்வு இங்கு,

$$l = 37.4 \text{ செமீ}; \; \theta = 60° = \frac{60\pi}{180} \text{ ஆரையன்} = \pi/3$$

$$r = \frac{l}{\theta} \text{ என்பதால்}, \qquad r = \frac{37.4 \times 3}{\pi}$$

$$= \frac{37.4 \times 3 \times 7}{22} = 35.7 \text{ செ மீ}$$

சான்று 4 ஒரு கடிகாரத்தின் **நொடி**முள் 1.5 செமீ நீளமுள்ளது. அதன் முனை 40 நொடிகளில் எவ்வளவு தொலைவு நகரும்? ($\pi = 3.14$ எனக்கொள்க).

தீர்வு நொடிமுள்ளின் நீளம் $=$ ஆரம் $= r = 1.5$ செமீ

நொடிமுள் *60* நிமிடங்களில் ஒரு முழுச்சுற்றை முடிக்கிறது.

எனவே, *40* நிமிடங்களில் ஒரு முழுச்சுற்றின் $40/60 = 2/3$ பங்கை முடிக்கிறது.

$$\text{அதாவது } \theta = \frac{2}{3} \times 360 = \frac{2}{3} \times 2\pi = \frac{4}{3}\pi \text{ ஆரையன்}$$

எனவே, விநாடிமுள் பயணிக்கும் தொலைவு

$$l = r\theta = 1.5 \text{ செமீ} \times \frac{4\pi}{3} = 2\pi \text{ செமீ}$$

$$= 2 \times 3.14 \text{ செமீ} = 6.28 \text{ செமீ}$$

சான்று 5 சம நீளமுள்ள வில்கள் இரு வட்டங்களின் மையங்களில் முறையே $65°, 110°$ ஆகிய கோணங்களை தாங்கினால், அவ்விரு ஆரங்களின் விகிதத்தை காண்க.

தீர்வு இரு வட்டங்களின் ஆரங்கள் r_1, r_2 என்க. தரவுகளின்படி,

$$\theta_1 = 65° = \frac{\pi}{180} \times 65 = \frac{13}{36}\pi \text{ ஆரையன்}$$

$$\theta_2 = 110° = \frac{\pi}{180} \times 110 = \frac{22}{36}\pi \text{ ஆரையன்}$$

இரு வில்களின் நீளமும் l எனில்,

$$l = r_1\,\theta_1 = r_2\,\theta_2$$

$$r_1\,\theta_1 = r_2\,\theta_2 \text{ ஆதலால்}, r_1 \times \frac{13}{36}\pi = r_2 \times \frac{22}{36}\pi$$

$$\text{எனவே}, \frac{r_1}{r_2} = \frac{22}{36}\pi \times \frac{36}{13\pi} = \frac{22}{13}$$

அதாவது, $r_1 : r_2 = 22:13$

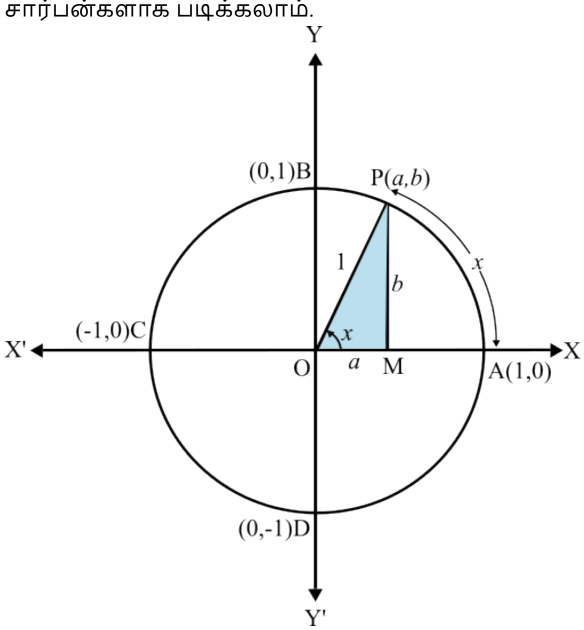
பயிற்சி *3.1*

1. கீழ்க்காணும் பாகையளவுகளுக்கு நிகரான ஆரையனளவுகளை காண்க.
   a. $25°$ b. $-47°30'$ c. $240°$ d. $520°$
2. கீழ்க்காணும் ஆரையனளவுகளுக்கு நிகரான பாகையளவுகளை காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ எனக்கொள்க).
   a. ${}^{11}/_{16}$ b. -4 c. ${}^{5}/_{3}\pi$ d. ${}^{7}/_{6}\pi$
3. ஒரு சக்கரம் ஒரு நிமிடத்தில் 360 முறை முழுவதுமாக சுற்றுகிறது. ஒரு நொடியில் அது எத்தனை ஆரையன் திரும்புகிறது?
4. 100 செமீ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்தின் மையத்தில் 22 செமீ நீளமுள்ள ஒரு வில் தாங்கும் கோணத்தின் பாகையளவு என்ன?
5. 40 செமீ விட்டமுள்ள ஒரு வட்டத்தில் ஒரு நாணின் நீளம் 20 செமீ. அந்நாணின் குறுவில்லின் நீளத்தை காண்க.
6. இரண்டு வட்டங்களில் ஒரே நீளமுள்ள விற்கள் முறையே $60°$, $75°$ என்ற கோணங்களை மையங்களில் தாங்கினால், அவற்றின் ஆரங்களின் விகிதத்தை காண்க.
7. *75* செமீ நீளமுள்ள ஒரு ஊசலியின் முனை கீழ்க்காணும் நீளங்களுள்ள விற்களில் ஊசலாடும்போது அது வீசும் கோணங்களை ஆரையனில் காண்க.

a. 10 செமீ b. 15 செமீ c. 21 செமீ

3.3 முக்கோணவியச் சார்பன்கள்

குறுங்கோணங்களுக்கான முக்கோணவிய விகிதங்களை ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் விகிதங்களாக நாம் முந்தைய வகுப்புகளில் படித்துள்ளோம். அவை வளைவி (வவி), உடன்வளைவி (உவவி), தொடுவி (தொவி), உடன்றொடுவி (உதொவி), வெட்டுவி (வெவி), உடன்வெட்டுவி (உவெவி) ஆகியவை. இப்போது முக்கோணவிய விகிதங்களின் வரையறைகளை எல்லாக்கோணங்களுக்கும் ஆரையனளவத்தின் மூலமாக நீட்டித்து அவற்றை முக்கோணவியச் சார்பன்களாக படிக்கலாம்.



படம் 3.6

ஒருங்களவச்சுக்களின் மூலப்புள்ளியில் மையமுள்ள ஒரு ஓரலகு வட்டத்தை கருதுவோம் (படம் 3.6). கோணம் $AOP = x$ ஆரையன் (அதாவது AP என்ற வில்லின் நீளம் x) என்று உள்ளவாறு, வட்டத்தின் மீதுள்ள ஏதோவொரு புள்ளி $P(a, b)$ என்க.

உவவி $x = a$ என்றும் வவி $x = b$ என்றும் வரையறுக்கிறோம். ΔOMP ஒரு செங்கோண முக்கோணமாதலால், $OM^2 + MP^2 = OP^2$ அதாவது $a^2 + b^2 = 1$ என்றாகிறது. இவ்வாறாக, ஓரலகு வட்டத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும், $a^2 + b^2 = 1$ அதாவது வவி$^2\, x +$உவவி$^2\, x = 1$ என்றாகிறது.

வட்டத்தின் மையத்தில் ஒரு முழுச்சுற்று 2π ஆரையனை தாங்குவதால், $\angle AOB = \pi/2$, $\angle AOC = \pi$, $\angle AOD = {}^3/_2\,\pi$. $\pi/2$இன் எல்லா முழுவெண் மடங்குகளையும் காற்பகுதிக்கோணங்கள் என்று அழைக்கிறோம். A, B, C, D ஆகியவற்றின் ஒருங்களவுகள் முறையே, $(1,0), (0,1), (-1.0), (0, -1)$. எனவே, காற்பகுதிக்கோணங்களுக்கு,

$$\text{உவவி}\, 0 = 1 \quad \text{வவி}\, 0 = 0$$
$$\text{உவவி}\, \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{வவி}\, \frac{\pi}{2} = 1$$
$$\text{உவவி}\, \pi = -1 \qquad \text{வவி}\, \pi = 0$$
$$\text{உவவி}\, \frac{3\pi}{2} = 0 \qquad \text{வவி}\, \frac{3\pi}{2} = -1$$
$$\text{உவவி}\, 2\pi = 1 \qquad \text{வவி}\, 2\pi = 0$$

P எனும் புள்ளியிலிருந்து ஒரு முழுச்சுற்றுக்குப்பின் மீண்டும் அதே P என்ற புள்ளியை வந்தடைகிறோம். இதனால், xஇன் மதிப்பு 2πஇன் முழுவெண் மடங்கால் அதிகரித்தாலோ குறைந்தாலோ வவிச்சார்பனும் உவவிச்சார்பனும் மதிப்புமாறுவதில்லை. எனவே,

$$\text{வவி}\, (2n\pi + x) = \text{வவி}\, x, \quad n \in \mathbb{Z}$$
$$\text{உவவி}\, (2n\pi + x) = \text{உவவி}\, x, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ என்ற மதிப்புகளுக்கு, அதாவது, x, πஇன் முழுவெண் மடங்கு எனில், வவி $x = 0$. மேலும், $x = \pm {}^{\pi}/_2, \pm {}^{3\pi}/_2, \pm {}^{5\pi}/_2, \ldots$ என்றிருக்கும்போது, அதாவது, xஇன் மதிப்பு $\pi/2$இன் ஒற்றைப்படை முழுவெண்மடங்காயிருக்கும்போது, உவவி xஇன் மதிப்பு சுழியம். இவ்வாறு,

வவி $x = 0$ உள்ளுரைப்பது $x = n\pi$; இங்கு n ஒரு முழுவெண்;

உவவி $x = 0$ உள்ளுரைப்பது $x = (2n + 1)\,\pi/2$ இங்கு, n ஒரு முழுவெண்.

இப்போது மற்ற முக்கோணவியச் சார்பன்களை வவிவழியும் உவவிவழியும் வரையறுக்கலாம்.

$$\text{உவெவி}\, x = \frac{1}{\text{வவி}\, x}, \quad x \neq n\pi$$
$$\text{வெவி}\, x = \frac{1}{\text{உவவி}\, x}, \quad x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}$$
$$\text{தொவி}\, x = \frac{\text{வவி}\, x}{\text{உவவி}\, x}, \quad x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}$$
$$\text{உதொவி}\, x = \frac{\text{உவவி}\, x}{\text{வவி}\, x}, \quad x \neq n\pi$$

இங்கெல்லாம் n ஒரு முழுவெண்.

எல்லா மெய் xகளுக்கும், வவி$^2\, x +$உவவி$^2\, x = 1$ என்பதை ஏற்கனவே கண்டோம். அதிலிருந்து கீழ்க்கண்டவற்றை பெறுகிறோம்.

$$1 + \text{தொவி}^2\, x = \text{வெவி}^2\, x \quad (\text{எவ்வாறு?})$$
$$1 + \text{உதொவி}^2\, x = \text{உவெவி}^2\, x \quad (\text{எவ்வாறு?})$$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

வவி	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
உவவி	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
தொவி	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0

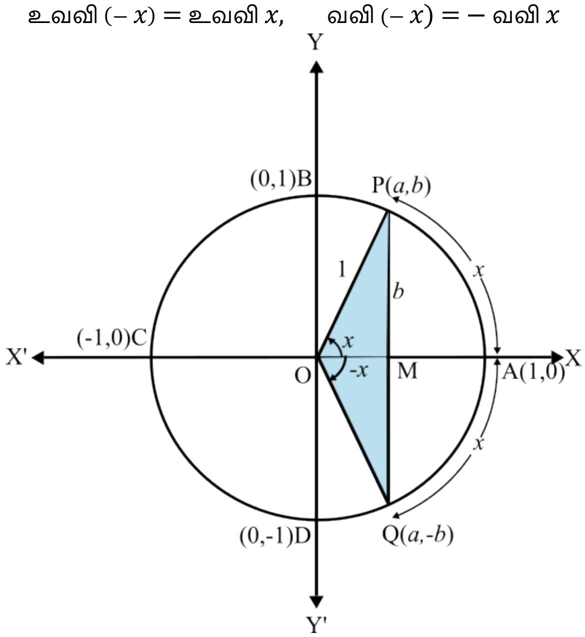
முந்தைய வகுப்புகளில், *0°, 30°, 45°, 60°, 90°* ஆகிய கோணங்களின் முக்கோணவிய விகிதங்களின் மதிப்புகளைப்பற்றி உரையளித்திருக்கிறோம். இக்கோணங்களுக்கான முக்கோணவியச்சார்பன்களின் மதிப்புகளும் முந்தைய வகுப்புகளில் படித்த முக்கோணவிய விகிதங்களும் ஒன்றே. இவ்வாறாக, மேற்கண்ட அட்டவணை கிடைக்கிறது.

$\pi/2$, $3\pi/2$ ஆகிய மதிப்புகளுக்கு தொவி வரையறுக்கப்படவில்லை என்பதை நோக்குக. உவெவி x, வெவி x, தொவி x ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் முறையே வவி x, உவவி x, தொவி x ஆகியவற்றின் மதிப்புகளின் புரட்டுகள்.

3.3.1 முக்கோணவியச்சார்பன்களின் குறிகள்

மூலத்தில் (O) மையமுள்ள ஓரலகு வட்டத்தில் $P\ (a,b)$ என்ற புள்ளி $\angle AOP = x$ என்றவாறு இருப்பதாக கொள்க. $\angle AOQ = -x$ எனில், Q என்ற புள்ளியின் ஒருங்களவுகள் $(a,-b)$ (படம் 3.7). எனவே,

உவவி $(-x) =$ உவவி x, வவி $(-x) = -$ வவி x



படம் 3.7

	I	II	III	IV
வவி x	+	+	−	−
உவவி x	+	−	−	+
தொவி x	+	−	+	−
உவெவி x	+	+	−	−
வெவி x	+	−	−	+
உதொவி x	+	−	+	−

ஓரலகு வட்டத்திலுள்ள ஒவ்வொரு $P(a,b)$ என்ற புள்ளிக்கும், $-1 \le a \le 1$, $-1 \le b \le 1$ என்பதால், எல்லா x கோணங்களுக்கும், $-1 \le$ உவவி $x \le 1$, $-1 \le$ வவி $x \le 1$ என்று அறிகிறோம். முதல் காற்பகுதியில் $(0 < x < \pi/2)$, a,b ஆகியவை நேர்மமாகவும், இரண்டாம் காற்பகுதியில் $(\pi/2 < x < \pi)$, a எதிர்மமாகவும் b நேர்மமாகவும், மூன்றாம் காற்பகுதியில் $(\pi < x < 3\pi/2)$ a,b ஆகியவை எதிர்மமாகவும், நான்காம் காற்பகுதியில் $(3\pi/2 < x < 2\pi)$ a நேர்மமாகவும் b எதிர்மமாகவும் உள்ளதை நாம் முந்தைய வகுப்புகளில் கற்றுள்ளோம். இப்போது, வெவ்வேறு காற்பகுதிகளில் முக்கோணவியச்சார்பன்களின் குறிகளை நாம் காணலாம். மேற்கண்ட அட்டவணையை பெறுகிறோம். அட்டவணையில் I, II, III, IV ஆகியவை முறையே முதலாம், இரண்டாம், மூன்றாம், நான்காம் காற்பகுதிகளை குறிக்கின்றன.

3.3.2 முக்கோணவியச்சார்பன்களின் களமும் வீச்சும்

வவிக்கும் உவவிக்குமான வரையரைகளிலிருந்து அவற்றை எல்லா மெய்யெண்களுக்கும் வரையறுக்கலாம் என்பதை காண்கிறோம். மேலும், x என்ற ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணுக்கும்

$-1 \le$ வவி $x \le 1$

$-1 \le$ உவவி $x \le 1$

எனவும் நாம் காண்கிறோம். இப்படியாக, $y =$ வவி x, $y =$ உவவி x ஆகியவற்றின் களம் எல்லா மெய்யெண்களின் கணம்; அவற்றின் வீச்சு $[-1,1]$, அதாவது, $-1 \le y \le 1$.

உவெவி $x = 1/$ வவி x என்பதால், $y =$ உவெவி xஇன் களம் $\{x: x \in \mathbb{R}, x \ne n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$ என்ற கணம்; அதன் வீச்சு $\{y: y \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)\}$ என்ற கணம். அதைப்போலவே, $y =$ வெவி xஇன் களம் $\{x: x \in \mathbb{R}, x \ne (2n+1)\pi/2, n \in \mathbb{Z}\}$; அதன் வீச்சு $\{y: y \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)\}$. மேலும், $y =$ தொவி xஇன் களம் $\{x: x \in \mathbb{R}, x \ne n+1)\pi/2, n \in \mathbb{Z}\}$, அதன் வீச்சு $\mathbb{R}$ என்றும், $y =$ உதொவி xஇன் களம்: $\{x: x \in \mathbb{R}, x \ne n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$, அதன் வீச்சு $\mathbb{R}$ என்றும் உள்ளன.

	I	II	III	IV
வவி	$0 \nearrow 1$	$1 \searrow 0$	$0 \searrow -1$	$-1 \nearrow 0$
உவவி	$1 \searrow 0$	$0 \searrow -1$	$-1 \nearrow 0$	$0 \nearrow 1$

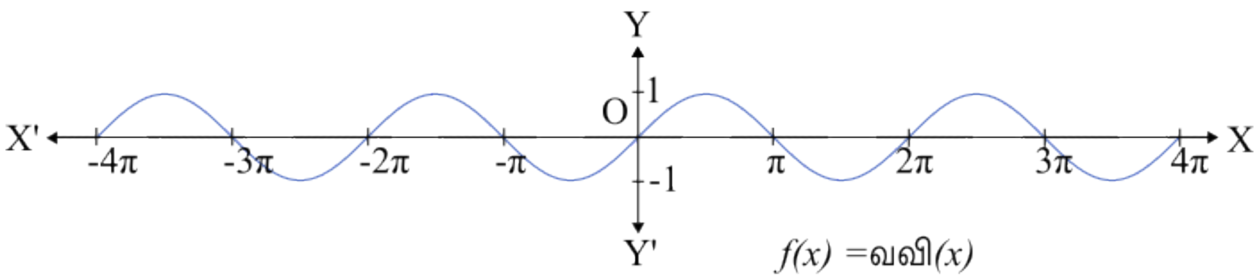
தொவி	$0 \nearrow \infty$	$-\infty \nearrow 0$	$0 \nearrow \infty$	$-\infty \nearrow 0$
உதொவி	$\infty \searrow 0$	$0 \searrow -\infty$	$\infty \searrow 0$	$0 \searrow -\infty$
வெவி	$1 \nearrow \infty$	$-\infty \nearrow -1$	$-1 \searrow -\infty$	$\infty \searrow 1$
உவெவி	$\infty \searrow 1$	$1 \nearrow \infty$	$-\infty \nearrow -1$	$-1 \searrow -\infty$

மேலும், முதல் காற்பகுதியில், xஇன் மதிப்பு, 0த்திலிருந்து $\pi/2$வரை உயரும்போது வவி x 0த்திலிருந்து 1வரை உயர்வதையும், இரண்டாம் காற்பகுதியில் xஇன் மதிப்பு $\pi/2$இலிருந்து πவரை உயரும்போது வவி x 1இலிருந்து 0த்துக்கு குறைவதையும் நாம் காண்கிறோம். மூன்றாம் காற்பகுதியில், xஇன் மதிப்பு, πஇலிருந்து $3\pi/2$வரை உயரும்போது, வவி x, 0த்திலிருந்து -1க்கு குறைகிறது, இறுதியாக, நான்காம் காற்பகுதியில், xஇன் மதிப்பு, $3\pi/2$இலிருந்து 2π வரை உயரும்போது, வவி x, -1இலிருந்து 0வரை உயர்கிறது. இதைப்போலவே, மற்ற முக்கோணவியச்சார்பன்களின் நடத்தைகளையும் நாம் காணலாம். மேற்கண்ட அட்டவணை கிடைக்கிறது.

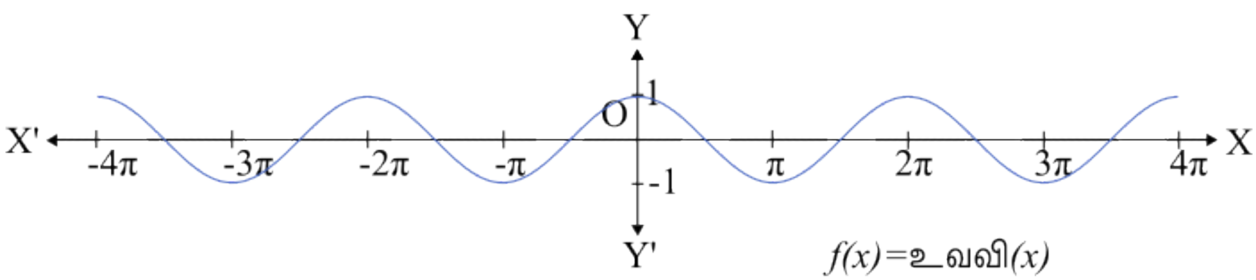
குறிப்புரை: மேற்காணும் அட்டவணையில், முதல் காற்பகுதியில் தொவி xஇன் மதிப்பு $0 \nearrow \infty$ எனும் கூற்று x சுழியத்தில் தொடங்கி அதிகரிக்கும்போது தொவி x சுழியத்தில் தொடங்கி அதிகரிக்கிறது என்றும் x ${}^{\pi}/_{2}$ஐ நெருங்க தொவி x குறிப்பற்ற பெரும் மதிப்புகளை அடைகிறது என்றும் பொருளுடையது.

அதைப்போல், நான்காம் காற்பகுதியில், உவெவி xஇன் மதிப்பு $-1 \searrow -\infty$ எனும் கூற்று x ${}^{3}/_{2}\,\pi$இல் தொடங்கி அதிகரிக்கும்போது உவெவி xஇன் மதிப்பு -1இல் தொடங்கி குறைகிறது என்றும், x 2πஐ நெருங்க உவெவி x குறிப்பற்ற பெரும் எதிர்ம மதிப்புகளை அடைகிறது என்றும் பொருளைடையது. $\infty, -\infty$ என்பவை சார்பன்கள், மாறிகள் ஆகியவற்றின் ஒரு வகையான நடத்தையை குறிக்கும் குறியீடுகள்.

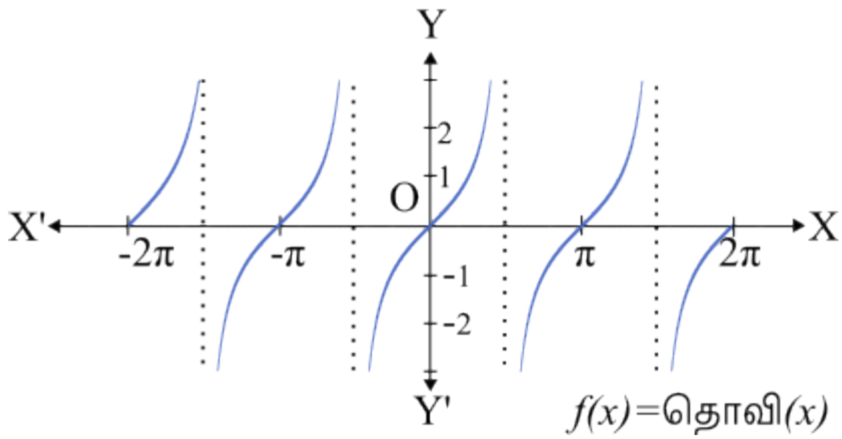
வவி x, உவவி x ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் 2π இடைவெளிக்குப்பின் மீள்வருவதை ஏற்கனவே கண்டிருக்கிறோம். எனவே, உவெவி x, வெவி x ஆகியவற்றின் மதிப்புகளும் 2π இடைவெளிக்குப்பின் மீள்வருகின்றன.



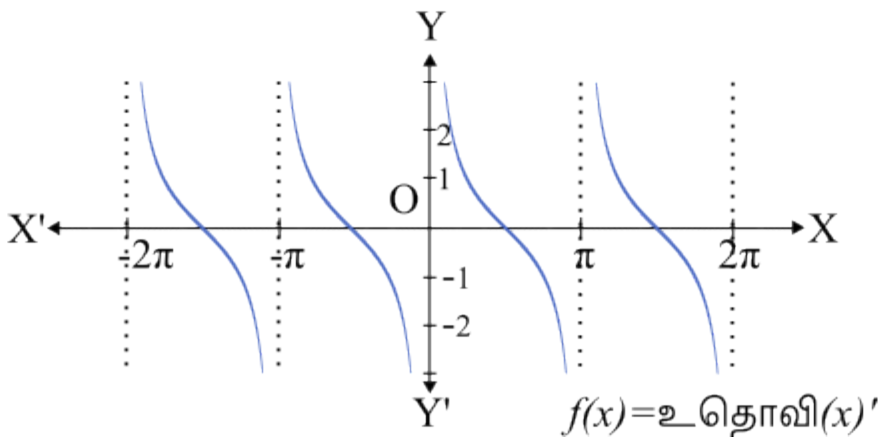
படம் 3.8



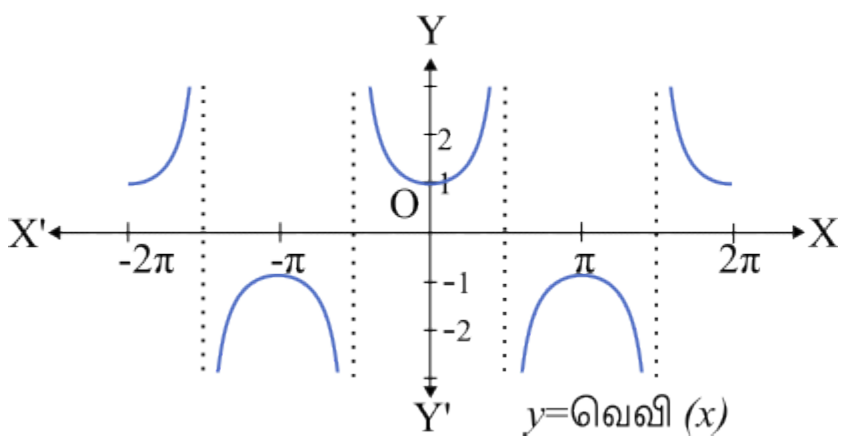
படம் 3.9



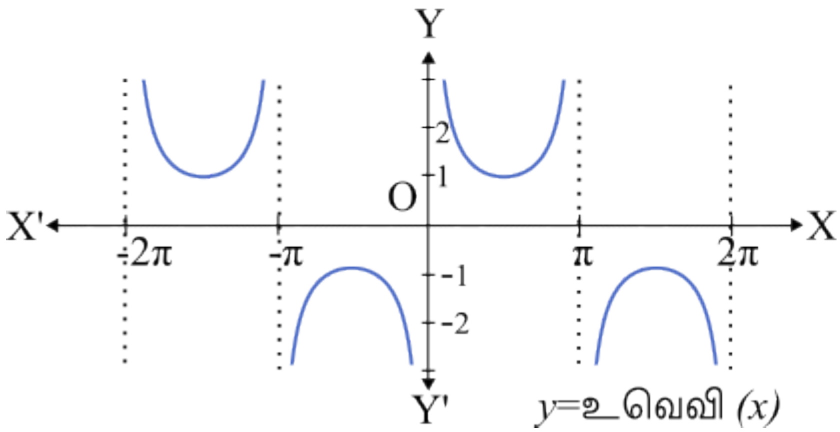
படம் 3.10



படம் 3.11



படம் 3.12



படம் 3.13

தொவி $(\pi + x) =$ தொவி x என்று அடுத்த பகுதியில் காண்போம். எனவே, தொவி xஇன் மதிப்புகளும் π என்ற இடைவெளிகளுக்குப்பின் மீள்வருகின்றன. உதொவி x தொவி xஇன் புரட்டு என்பதால் அதன் மதிப்புகளும் π இடைவெளிகளில் மீள்வருகின்றன. இந்த அறிவையும் முக்கோணவியச்சார்பன்களின் நடத்தைகளையும் பயன்படுத்தி இந்த சார்பன்களை வரைபடமாக வரையலாம். இவ்வாறான வரைபடங்கள் மேல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

சான்று 6 மூன்றாம் காற்பகுதியிலுள்ள ஒரு xக்கு உவவி $x = -3/5$ எனில், மற்ற ஐந்து முக்கோணவியச்சார்பன்களின் மதிப்புகளை காண்க.

தீர்வு உவவி $x = -3/5$ என்பதால், வெவி $x = -5/3$

வவி^{2} x +உவவி^{2} $x = 1$ என்பதால், வவி^{2} $x = 1 -$ உவவி^{2} x

அதாவது, வவி^{2} $x = 1 - {}^{9}/_{25} = {}^{16}/_{25}$

எனவே, வவி $x = \pm 4/5$

x, மூன்றாவது காற்பகுதியில் உள்ளதால், வவி x எதிர்மம். எனவே, வவி $x = -4/5$

இதிலிருந்து உவெவி $x = -5/4$ என்பதையும் பெறுகிறோம். மேலும்

தொவி $x =$ வவி $x/$உவவி $x = 4/3$

உதொவி $x =$ உவவி $x/$வவி $x = 3/4$

சான்று 7 இரண்டாம் காற்பகுதியிலுள்ள ஒரு xக்கு உதொவி $x = -5/12$ எனில், மற்ற ஐந்து முக்கோணவிய சார்பன்களின் மதிப்புகளை காண்க.

தீர்வு உதொவி $x = -5/12$ எனவே, தொவி $x = -12/5$.

இப்போது, வெவி^{2} $x = 1 +$ தொவி^{2} $x = 1 + 144/25 = 169/25$

எனவே, வெவி $x = \pm 13/5$

x இரண்டாம் காற்பகுதியில் இருப்பதால், வெவி x எதிர்மம்.

எனவே, வெவி $x = -13/5$.

இது உவவி $x = -5/13$ என்பதையும் தருகிறது.

மேலும், வவி $x =$ தொவி $\times$ உவவி $x = \left(-{}^{12}/_{5}\right)\left(-{}^{5}/_{13}\right) = {}^{12}/_{13}$

உவெவி $x = 1/$வவி $x = 13/12$

சான்று 8 வவி $(31\pi/3)$இன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு வவி xஇன் மதிப்புகள் 2π இடைவெளியில் மீள்வருகின்றன.

எனவே, வவி $\left({}^{31\pi}/_{3}\right) =$ வவி $\left(10\pi + {}^{\pi}/_{3}\right) =$ வவி $\left({}^{\pi}/_{3}\right) = {}^{\sqrt{3}}/_{2}$

சான்று 9 உவவி $(-1710°)$ இன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு உவவி xஇன் மதிப்புகள், 2π அதாவது $360°$ எனும் இடைவெளிக்குப்பின் மீள்வருவதை நாமறிவோம்.

எனவே, உவவி $(-1710°)$

$=$ உவவி $\{-1710° + (5 \times 360°)\}$

$=$ உவவி $\left(-1710° - (-1800°)\right)$

$=$ உவவி $90° = 0$

பயிற்சி 3.2

1 *1*முதல் *5*வரையான பயிற்சிகளில் மற்ற ஐந்து முக்கோணவியச்சார்பன்களின் மதிப்புகளை காண்க.
2 உவவி $x = -1/2$, x மூன்றாம் காற்பகுதியில் உள்ளது.
3 வவி $x = 3/5$, x இரண்டாம் காற்பகுதியில் உள்ளது.
4 உதொவி $x = 3/4$, x மூன்றாம் காற்பகுதியில் உள்ளது.
5 வெவி $x = 13/5$, x நான்காம் காற்பகுதியில் உள்ளது.
6 தொவி $x = -5/12$, x இரண்டாம் காற்பகுதியில் உள்ளது.

7 6முதல் 10வரையான பயிற்சிகளில் முக்கோணவியச்சார்பன்களின் மதிப்புகளை காண்க.
8 வவி $765°$
9 உவெவி $(-1410°)$
10 தொவி $19\pi/3$
11 வவி $(-11\pi/3)$
12 உதொவி $(-15\pi/4)$

3.4 இரண்டு கோணங்களின் கூட்டலுக்கும் வேறுபாட்டுக்குமான முக்கோணவியச்சார்பன்கள்

இரண்டு எண்களின் (கோணங்களின்) கூட்டல், வேறுபாடு, தொடர்பான மற்ற கோவைகள் ஆகியவற்றின் முக்கோணவியச்சார்பன்களுக் கான கோவைகளை இந்த பகுதியில் வருவிக்கலாம். இந்த அடிப்படை விளைவுகளை முக்கோணவிய முற்றொருமைகள் என்று அழைக்கிறோம்.

1. வவி$(-x) = -$ வவி x

2. உவவி $(-x) =$ உவவி x

ஆகியவற்றை நாம் ஏற்கனவே பார்த்திருக்கிறோம். இப்போது, மேலும் சில விளைவுகளை நிறுவலாம்.

3. உவவி $(x+y)$

$=$ உவவி x உவவி $y -$ வவி x வவி y

மூலத்தில் மையமுள்ள ஓரலகு வட்டத்தை கருதுவோம். படம் 3.14இல் P_4OP_1 என்ற கோணத்தை x என்றும் P_1OP_2 என்ற கோணத்தை y என்றும் அழைப்போம். அப்படியெனில், P_4OP_2 என்ற கோணம் $x+y$ ஆகிறது. மேலும், P_4OP_3 என்ற கோணம் $-y$ மதிப்புடையதாக கொள்வோம். எனவே, P_1, P_2, P_3, P_4 ஆகிய புள்ளிகளின் ஒருங்களவுகள் P_1 (உவவி x, வவி x), P_2 [உவவி$(x+y)$, வவி$(x+y)$], P_3 [உவவி$(-y)$, வவி$(-y)$], P_4 $(1,0)$ என்றாகின்றன (படம் 3.14).

P_1OP_3, P_2OP_4 ஆகிய முக்கோணங்களை கருதுக. அவை முழுச்சமமானவை. *(எப்படி?)* எனவே, P_1P_3உம் P_2P_4உம் சமம். இரண்டையும் மதிப்பிட்டு ஒப்பிடுவோம்.

$(P_1P_3)^2 =$ [உவவி $x -$ உவவி $(-y)]^2$

$+$ [வவி $x -$ வவி $(-y)]^2$

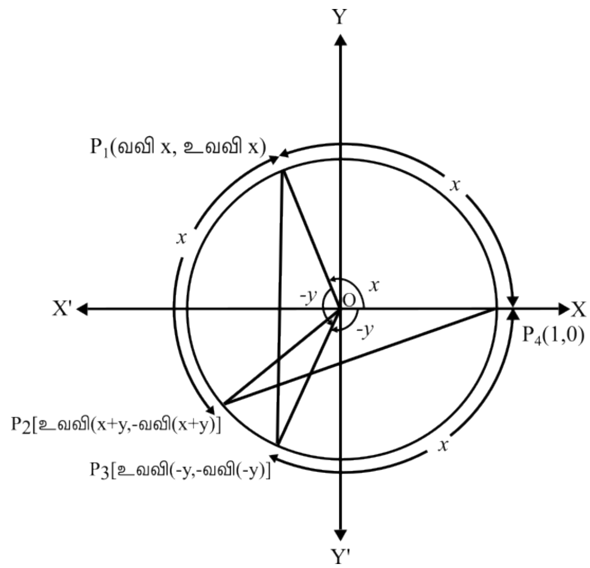
$=$ [உவவி $x -$ உவவி $y]^2 +$ [வவி $x +$ வவி $y]^2$

$=$ உவவி$^2 x +$ உவவி$^2 y - 2$ உவவி x உவவி y

$+$ வவி$^2 x +$ வவி$^2 y + 2$ வவி x வவி y

$= 2 - 2$ (உவவி x உவவி $y -$ வவி x வவி y)

(எப்படி?)



படம் 3.14

$(P_2P_4)^2 = [1 -$ உவவி $(x+y)]^2$

$+[0 -$ வவி $(x+y)]^2$

$= 1 - 2$ உவவி $(x+y) +$ உவவி$^2(x+y)$

$+$ வவி$^2(x+y)$

$= 2 - 2$ உவவி $(x+y)$

இவை சமம் என்பதால்,

$2 - 2$ (உவவி x உவவி $y -$ வவி x வவி y)

$= 2 - 2$உவவி $(x+y)$

எனவே,

உவவி $(x+y) =$ உவவி x உவவி $y -$ வவி x வவி y

4. உவவி $(x-y)$

$=$ உவவி x உவவி $y +$ வவி x வவி y

*3*ஆம் முற்றொருமையில், yஐ $-y$ ஆல் மாற்றிட்டு உவவி $[(x+(-y)] =$ உவவி x உவவி $(-y) -$ வவி x வவி $(-y)$

என்று பெறுகிறோம். அதாவது,

உவவி $(x-y) =$ உவவி x உவவி $y +$ வவி x வவிy.

5. உவவி $(\pi/2 - x) =$ வவி x

நான்காம் முற்றொருமையில், xஐ $\pi/2$ஆலும், yஐ xஆலும் மாற்றிட்டு விடையை பெறுகிறோம்.

உவவி $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$ உவவி $\frac{\pi}{2}$ உவவி x

$+$வவி $\frac{\pi}{2}$ வவி x

6. வவி $(\pi/2 - x) =$ உவவி x

ஐந்தாம் முற்றொருமையிலிருந்து

$$வவி\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=உவவி\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=உவவி\ x$$

7. வவி $(x+y)$

$$=வவி\ x\ .\ உவவி\ y+உவவி\ x.\ வவி\ y$$

$$வவி\ (x+y)=உவவி\left[\frac{\pi}{2}-(x+y)\right]$$

$$=உவவி\left[\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-y\right]$$

$$=உவவி\left(\frac{\pi}{2}-x\right)உவவி\ y+வவி\left(\frac{\pi}{2}-x\right)வவி\ y$$

$$=வவி\ x\ உவவி\ y+உவவி\ x\ வவி\ y$$

8. வவி $(x-y)$

$$=வவி\ x.\ உவவி\ y-உவவி\ x.\ வவி\ y$$

ஏழாம் முற்றொருமையில், yஐ $-y$ஆல், மாற்றிட்டு *(8)*இன் விளைவை பெறுகிறோம்.

9. *3, 4, 7, 8* ஆகிய முற்றொருமைகளில் $x\ y$க்கும் பொருத்தமான மதிப்புகளை இட்டு கீழ்க்காணும் விளைவுகளை பெறலாம்.

$$உவவி\left(\pi/_2+x\right)=-வவி\ x$$

$$உவவி(\pi-x)=-உவவி\ x$$

$$உவவி(\pi+x)=-உவவி\ x$$

$$உவவி(2\pi-x)=உவவி\ x$$

$$வவி\left(\pi/_2+x\right)=உவவி\ x$$

$$வவி(\pi-x)=வவி\ x$$

$$வவி(\pi+x)=-வவி\ x$$

$$வவி(2\pi-x)-வவி\ x$$

தொவி x, உதொவி x, வெவி x, உவெவி x ஆகியவற்றுக்கும் இதுபோன்ற விளைவுகளை வவி x, உவவி x ஆகியவற்றின் விளைவுகளிலிருந்து பெறலாம்.

10. x, y, $(x+y)$ ஆகிய கோணங்களுள் எதுவுமே $\pi/2$இன் ஒற்றைப்படைமடங்காக இல்லை எனில்,

$$தொவி\ (x+y)=\frac{தொவி\ x+தொவி\ y}{1-தொவி\ x\ தொவி\ y}$$

என்று காணலாம். x, y, $(x+y)$ ஆகியவற்றுள் எதுவுமே $\pi/2$இன் ஒற்றைப்படைமடங்காக இல்லாததால், உவவி x, உவவி y, உவவி$(x+y)$ ஆகியவை சுழியமற்ற மதிப்புகளுள்ளவை. எனவே,

$$தொவி\ (x+y)=\frac{வவி(x+y)}{உவவி(x+y)}$$

$$=\frac{வவி(x)\ உவவி\ y+உவவி\ x\ வவி\ y}{உவவி\ x\ உவவி\ y-வவி\ x\ வவி\ y}$$

மேற்காரணியையும் கீழ்க்காரணியையும் உவவி x உவவி yஆல் வகுக்க நமக்கு கிடைப்பது

$$தொவி\ (x+y)=\frac{தொவி\ x+தொவி\ y}{1-தொவி\ x\ தொவி\ y}$$

11. x, y, $(x+y)$ ஆகிய கோணங்களுள் எதுவுமே $\pi/2$இன் ஒற்றைப்படைமடங்காக இல்லை எனில்,

$$தொவி\ (x-y)=\frac{தொவி\ x-தொவி\ y}{1+தொவி\ x\ தொவி\ y}$$

பத்தாம் முற்றொருமையில், yஐ $-y$ஆல், மாற்றிட்டுப்பெறுவது

$$தொவி\ (x-y)=தொவி\ [x+(-y)]$$

$$=\frac{தொவி\ x+தொவி\ (-y)}{1-தொவி\ x\ தொவி\ (-y)}$$

$$=\frac{தொவி\ x-தொவி\ y}{1+தொவி\ x\ தொவி\ y}$$

12. x, y, $(x+y)$ ஆகிய கோணங்களுள் எதுவுமே $\pi/2$இன் ஒற்றைப்படைமடங்காக இல்லை எனில்,

$$உதொவி\ (x+y)=\frac{உதொவி\ x\ உதொவி\ y-1}{உதொவி\ y+உதொவி\ x}$$

x, y, $(x+y)$ ஆகிய கோணங்களில் எதுவுமே $\pi/2$இன் ஒற்றைப்படைமடங்காக இல்லாததால், வவி (x), வவி (y), வவி $(x+y)$ ஆகியவற்றுக்கு சுழியமற்ற மதிப்புகள் உள்ளன. இப்போது

$$உதொவி\ (x+y)=\frac{உவவி\ (x+y)}{வவி\ (x+y)}$$

$$=\frac{உவவி\ x\ உவவி\ y-வவி\ x\ வவி\ y}{வவி\ x\ உவவி\ y+உவவி\ x\ வவி\ y}$$

மேற்காரணியையும் கீழ்க்காரணியையும் வவி x வவி y ஆல் வகுத்துப்பெறுவது

$$உதொவி\ (x+y)=\frac{உதொவி\ x\ உதொவி\ y-1}{உதொவி\ y+உதொவி\ x}$$

13. x, y, $(x+y)$ ஆகிய கோணங்களில் எதுவுமே $\pi/2$இன் ஒற்றைப்படைமடங்காக இல்லை எனில்,

$$உதொவி\ (x-y)=\frac{உதொவி\ x\ உதொவி\ y+1}{உதொவி\ y-உதொவி\ x}$$

பன்னிரண்டாம் முற்றொருமையில், yஐ $-y$ஆல் மாற்றிட்டு இந்த விளைவை பெறுகிறோம்.

14.

$$உவவி\ 2x=உவவி^2x-வவி^2x=2\ உவவி^2x-1$$

$$=1-2\ வவி^2x=\frac{1-தொவி^2x}{1+தொவி^2x}$$

இதைக்காண, நாமறிந்த

$$உவவி\ (x+y)=உவவி\ (x)உவவி\ (y)-வவி\ (x)வவி\ (y)$$

என்பதில் தொடங்குவோம். yஐ xஆல் மாற்றிடுக.

$$உவவி\ 2x=உவவி^2x-வவி^2x$$

$$=உவவி^2x-\left(1-உவவி^2x\right)$$

$$=2உவவி^2x-1$$

மீண்டும், $உவவி\ 2x=உவவி^2x-வவி^2x=\left(1-வவி^2x\right)-வவி^2x=1-2வவி^2x$

மேலும்,

$$உவவி\ 2x=உவவி^2x-வவி^2x$$

$$=\frac{உவவி^2x-வவி^2x}{உவவி^2x+வவி^2x}$$

மேற்காரணியையும் கீழ்க்காரணியையும் உவவி^2xஆல் வகுக்கும்போது

உவவி $2x = \dfrac{1 - \text{தொவி}^2 x}{1 + \text{தொவி}^2 x}$, $x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$

என்று பெறுகிறோம். இங்கு, n ஒரு முழுவெண்.

15.

$$\text{வவி } 2x = 2 \text{ வவி } x \text{ உவவி } x$$

$$= \frac{2 \text{ தொவி } x}{1 + \text{தொவி}^2 x}, \qquad x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$$

இங்கு, n ஒரு முழுவெண்.

வவி $(x + y)$ = வவி x உவவி y + உவவி x வவி y என்பதை அறிவோம்.

yஐ xஆல் மாற்றிட்டுப்பெறுவது

வவி $2x = 2$ வவி x உவவி $x = \dfrac{2\text{வவி } x \text{ உவவி } x}{\text{உவவி}^2 x + \text{வவி}^2 x}$

ஒவ்வொரு உருபையும் உவவி^{2} xஆல் வகுக்கும்போது

வவி $2x = \dfrac{2 \text{ தொவி } x}{1 + \text{தொவி}^2 x}$

16.

தொவி $2x = \dfrac{2 \text{ தொவி } x}{1 - \text{தொவி}^2 x}$, $\qquad 2x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$

இங்கு, n ஒரு முழுவெண்.

தொவி $(x + y) = \dfrac{\text{தொவி } x + \text{தொவி } (y)}{1 - \text{தொவி } x \text{ தொவி } (y)}$

என்பதை அறிவோம்.

yஐ xஆல் மாற்றிட்டுப்பெறுவது

தொவி $2x = \dfrac{2 \text{ தொவி } x}{1 - \text{தொவி}^2 x}$

17. வவி $3x = 3$ வவி $x - 4$ வவி$^3 x$

வவி $3x$ = வவி $(2x + x)$

= வவி $2x$ உவவி $x -$ உவவி $2x$ வவி x

$= 2$வவி x உவவி x உவவி $x + (1 - 2\text{வவி}^2 x)$வவி x

$= 2$வவி x உவவி$^2 x + (1 - 2\text{வவி}^2 x)$வவி x

$= 2$வவி x $(1 - \text{வவி}^2 x)$ + வவி $x - 2$வவி$^3 x$

$= 2$வவி $x - 2$வவி$^3 x$ + வவி $x - 2$ வவி$^3 x$

$= 3$வவி $x - 4$ வவி^{3} x

18. உவவி $3x = 4$ உவவி$^3 x - 3$ உவவி x

உவவி $3x$ = உவவி $(2x + x)$

= உவவி $2x$ உவவி x − வவி $2x$ வவி x

$= (2\text{உவவி}^2 x - 1)$உவவி $x -$ 2வவி x உவவி x வவி x

$= (2\text{உவவி}^2 x - 1)$ உவவி $x - 2$ உவவி $x (1 - \text{உவவி}^2 x)$

$= 2$உவவி$^3 x$ − உவவி $x - 2$ உவவி $x + 2$ உவவி$^3 x$

$= 4$ உவவி$^3 x - 3$ உவவி x

19.

தொவி $3x = \dfrac{3 \text{ தொவி } x - \text{தொவி}^3 x}{1 - 3 \text{ தொவி}^2 x}$,

$3x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$

இங்கு, n ஒரு முழுவெண்.

தொவி $3x$ = தொவி $(2x + x)$

$$= \frac{\text{தொவி } 2x + \text{தொவி } x}{1 - \text{தொவி } 2x \text{ தொவி } x}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{2 \text{ தொவி } x}{1 - \text{தொவி}^2 x} + \text{தொவி } x\right]}{\left[1 - \dfrac{2 \text{ தொவி } x \text{ தொவி } x}{1 - \text{தொவி}^2 x}\right]}$$

$$= \frac{2 \text{ தொவி } x + \text{தொவி } x - \text{தொவி}^3 x}{1 - \text{தொவி}^2 x - 2\text{தொவி}^2 x}$$

$$= \frac{3 \text{ தொவி } x - \text{தொவி}^3 x}{1 - 3 \text{ தொவி}^2 x}$$

20.

(i) உவவி x + உவவி y

$= 2$ உவவி $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ உவவி $\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

(ii) உவவி $x -$ உவவி y

$= -2$ வவி $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ வவி $\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

(iii) வவி x + வவி y

$= 2$ வவி $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ உவவி $\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

(iv) வவி $x -$ வவி y

$= 2$ உவவி $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ வவி $\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

நாம் ஏற்கனவே அறிந்தவை

உவவி$(x + y)$ = உவவி x உவவி y − வவி x வவி y (1)

உவவி $(x - y)$ = உவவி x உவவி y + வவி x வவி y (2)

இவற்றை கூட்டியும் கழித்தும்

உவவி $(x + y)$ + உவவி $(x - y)$

$= 2$ உவவி x உவவி y (3)

உவவி $(x + y)$ − உவவி $(x - y)$

$= -2$ வவி x வவி y (4)

ஆகியவற்றை பெறுகிறோம். மேலும்,

வவி $(x + y)$ = வவி x உவவி y + உவவி x வவி (y) (5)

வவி $(x - y)$ = வவி x உவவி y உவவி x வவி (y) − (6)

*(5)*ஐயும் *(6)*ஐயும் கூட்டியம் கழித்தும்

வவி $(x + y)$ + வவி $(x - y)$ = 2வவி x உவவி y (7)

வவி $(x + y)$ − வவி $(x - y)$ = 2 உவவி x வவி y (8)

ஆகியவற்றை பெறுகிறோம்.

$x + y = \theta, x - y = \phi$ எனக. அதாவது,

$$x=\frac{\theta+\phi}{2}; y=\frac{\theta-\phi}{2}$$

இந்த x, yஇன் மதிப்புகளை *(3), (4), (7), (8)* ஆகிய சமன்பாடுகளில் மாற்றிட்டு

உவவி $\theta+$ உவவி ϕ

$= 2$ உவவி $\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)$ உவவி $\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$

உவவி $\theta-$ உவவி ϕ

$= -2$ வவி $\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)$ வவி $\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$

வவி $\theta+$ வவி $\phi = 2$ வவி $\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)$ உவவி $\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$

வவி $\theta-$ வவி $\phi = 2$ உவவி $\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)$ வவி $\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$

என்று பெறுகிறோம். θ, ϕ ஆகியன எந்தவொரு மெய்யெண்ணையும் ஏற்கலாம். எனவே,

உவவி $x+$ உவவி y

$= 2$ உவவி $\left(\frac{x+y}{2}\right)$ உவவி $\left(\frac{x-y}{2}\right)$

உவவி $x-$ உவவி $y = -2$ வவி $\left(\frac{x+y}{2}\right)$ வவி $\left(\frac{x-y}{2}\right)$

வவி $x+$ வவி $y = 2$ வவி $\left(\frac{x+y}{2}\right)$ உவவி $\left(\frac{x-y}{2}\right)$

வவி $x-$ வவி $y = 2$ உவவி $\left(\frac{x+y}{2}\right)$ வவி $\left(\frac{x-y}{2}\right)$

குறிப்பு *20* இல் தரப்பட்டுள்ள முற்றொருமைகளின் மற்றொரு வடிவமாக, கீழ்க்காணும் விளைவுகளை நிறுவலாம்.

21.

(i) 2உவவி x உவவி y

$=$ உவவி $(x+y)+$ உவவி $(x-y)$

(ii) -2வவி x வவி y

$=$ உவவி $(x+y)-$ உவவி $(x-y)$

(iii) 2வவி x உவவி y

$=$ வவி $(x+y)+$ வவி $(x-y)$

(iv) 2உவவி x வவி $y =$ வவி $(x+y)-$ வவி $(x-y)$

சான்று 10 நிறுவுக

$$3 \text{ வவி} \frac{\pi}{3} \text{வெவி} \frac{\pi}{3} - 4 \text{ வவி} \frac{5\pi}{6} \text{உதொவி} \frac{\pi}{4} = 1$$

தீர்வு

3வவி $\frac{\pi}{3}$ வெவி $\frac{\pi}{3} - 4$வவி $\frac{5\pi}{6}$ உதொவி $\frac{\pi}{4}$

$= 3\times\frac{1}{2}\times 2 - 4$ வவி $\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\times 1$

$= 3 - 4$ வவி $\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 - 4\times\frac{1}{2} = 1$

சான்று 11 வவி 15°இன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு வவி $15^\circ =$ வவி $(45^\circ - 30^\circ)$

$=$ வவி 45° உவவி $30^\circ -$ உவவி 45° வவி 30°

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$$

சான்று 12 தொவி $\left({}^{13}/_{12}\pi\right)$ இன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு

தொவி $\left(\frac{13\pi}{12}\right) =$ தொவி $\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right) =$ தொவி $\frac{\pi}{12}$

$=$ தொவி $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\frac{\left(\text{தொவி } \left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{தொவி}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)}{1+\text{தொவி } \left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ தொவி } \left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

சான்று 13 நிறுவுக

$$\frac{\text{வவி } (x+y)}{\text{வவி } (x-y)} = \frac{\text{தொவி } x + \text{தொவி } y}{\text{தொவி } x - \text{தொவி } y}$$

தீர்வு

$$\frac{\text{வவி } (x+y)}{\text{வவி } (x-y)}$$

$$=\frac{\text{வவி } x \text{ உவவி } y + \text{உவவி } x \text{ வவி } y}{\text{வவி } x \text{ உவவி } y - \text{உவவி } x \text{ வவி } y}$$

மேற்காரணியையும் கீழ்க்காரணியையும் உவவி x உவவி yஆல் வகுத்துப்பெறுவது

$$\frac{\text{வவி } (x+y)}{\text{வவி } (x-y)} = \frac{\text{தொவி } x + \text{தொவி } y}{\text{தொவி } x - \text{தொவி } y}$$

சான்று 14 காட்டுக

தொவி $3x$ தொவி $2x$ தொவி x

$=$ தொவி $3x -$ தொவி $2x -$ தொவி x

தீர்வு

தொவி $3x =$ தொவி $(2x+x)$

$$=\frac{\text{தொவி } 2x + \text{தொவி } x}{1 - \text{தொவி } 2x \text{ தொவி } x}$$

தொவி $3x -$ தொவி $3x$ தொவி $2x$ தொவி x

$=$ தொவி $2x +$ தொவி x

தொவி $3x -$ தொவி $2x -$ தொவி x

$=$ தொவி $3x$ தொவி $2x$ தொவி x

இதுவே நாம் காட்டவேண்டியது.

சான்று *15* நிறுவுக

உவவி $\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+$ உவவி $\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \sqrt{2}$ உவவி x

தீர்வு முற்றொருமை *20(i)*ஐ பயன்படுத்துவோம்.

உவவி $\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+$ உவவி $\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$$= 2 \text{ உவவி} \left(\frac{\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}-x}{2}\right)$$

$$\times \text{ உவவி} \left(\frac{\frac{\pi}{4}+x-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{2}\right)$$

$$= 2 \text{ உவவி} \frac{\pi}{4} \text{ உவவி } x = 2\times\frac{1}{\sqrt{2}} \text{உவவி } x$$

$= \sqrt{2}\ \text{உவவி}\ x$

சான்று 16 நிறுவுக.

$$\frac{\text{உவவி}\ 7x + \text{உவவி}\ 5x}{\text{உவவி}\ 7x - \text{உவவி}\ 5x} = \text{உதொவி}\ x$$

தீர்வு *20(i)*, *20(iv)* ஆகிய முற்றொருமைகளை பயன்படுத்துவோம்.

$$\frac{\text{உவவி}\ 7x + \text{உவவி}\ 5x}{\text{உவவி}\ 7x - \text{உவவி}\ 5x}$$

$$= \frac{\text{உவவி}\left(\frac{7x+5x}{2}\right)\text{உவவி}\left(\frac{7x-5x}{2}\right)}{\text{உவவி}\left(\frac{7x+5x}{2}\right)\text{வவி}\left(\frac{7x-5x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\text{உவவி}\ x}{\text{வவி}\ x} = \text{உதொவி}\ x$$

சான்று 17 நிறுவுக

$$\frac{\text{வவி}\ 5x - 2\text{வவி}\ 3x + \text{வவி}\ x}{\text{உவவி}\ 5x - \text{உவவி}\ x} = \text{தொவி}\ x$$

தீர்வு

$$\frac{\text{வவி}\ 5x - 2\ \text{வவி}\ 3x + \text{வவி}\ x}{\text{உவவி}\ 5x - \text{உவவி}\ x}$$

$$= \frac{\text{வவி}\ 5x + \text{வவி}\ x - 2\text{வவி}\ 3x}{\text{உவவி}\ 5x - \text{உவவி}\ x}$$

$$= \frac{2\text{வவி}\ 3x\,.\,\text{உவவி}\ 2x - 2\text{வவி}\ 3x}{-2\ \text{வவி}\ 3x\ \text{வவி}\ 2x}$$

$$= -\frac{\text{வவி}\ 3x\ (\text{உவவி}\ 2x - 1)}{\text{வவி}\ 3x\ \text{வவி}\ 2x}$$

$$= \frac{1 - \text{உவவி}\ 2x}{\text{வவி}\ 2x} = \frac{2\text{வவி}^2 x}{2\text{வவி}\ x\ \text{உவவி}\ x}$$

$= \text{தொவி}\ x$

பயிற்சி 3.3

ஒன்றிலிருந்து நான்குவரையானவற்றை நிறுவுக

$\text{வவி}^2\ \frac{\pi}{6} + \text{உவவி}^2\ \frac{\pi}{3} - \text{தொவி}^2\ \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$

$2\text{வவி}^2\ \frac{\pi}{6} + \text{உவெவி}^2\left(\frac{7\pi}{6}\right)\ \text{உவவி}^2\ \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$

$\text{உதொவி}^2\frac{\pi}{6} + \text{உவெவி}\ \frac{5\pi}{6} + 3\ \text{தொவி}^2\frac{\pi}{6} = 6$

$2\ \text{வவி}^2\ \frac{3\pi}{4} + 2\ \text{உவவி}^2\ \frac{\pi}{4} + 2\ \text{வெவி}^2\ \frac{\pi}{3} = 10$

மதிப்பறிக:

(அ) வவி 75° (ஆ) தொவி 15°

கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக.

$\text{உவவி}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\text{உவவி}\left(\frac{\pi}{4} - y\right) - \text{வவி}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\text{வவி}\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = \text{வவி}\ (x+y)$

$\frac{\text{தொவி}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\text{தொவி}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} = \left[\frac{1+\text{தொவி}\ x}{1-\text{தொவி}\ x}\right]^2$

$\frac{\text{உவவி}\ (\pi+x)\ \text{உவவி}\ (-x)}{\text{வவி}\ (\pi-x)\ \text{உவவி}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \text{உதொவி}^2 x$

$\text{உவவி}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\text{உவவி}\ (2\pi+x)\left[\text{உதொவி}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) + \text{உதொவி}(2\pi+x)\right] = 1$

$\text{வவி}\ (n+1)x\ \text{வவி}\ (n+2)x + \text{உவவி}\ (n+1)x\ \text{உவவி}\ (n+2)x = \text{உவவி}\ x$

$\text{உவவி}\left(\frac{3\pi}{4}+x\right) - \text{உவவி}\left(\frac{3\pi}{4}-x\right) = -\sqrt{2}\ \text{வவி}\ x$

$\text{வவி}^2\ 6x - \text{வவி}^2\ 4x = \text{வவி}\ 2x\ \text{வவி}\ 10x$

$\text{உவவி}^2 2x - \text{உவவி}^2 6x = \text{வவி}\ 4x\ \text{வவி}\ 8x$

$\text{வவி}\ 2x + 2\text{வவி}\ 4x + \text{வவி}\ 6x = 4\ \text{உவவி}^2 x\ \text{வவி}\ 4x$

உதொவி $4x$ (வவி $5x+$ வவி $3x$) $=$ உதொவி(x) (வவி $5x-$ வவி $3x$)

$$\frac{\text{உவவி } (9x) - \text{உவவி } (5x)}{\text{வவி } (17x) - \text{வவி } (3x)} = -\frac{\text{வவி } 2x}{\text{உவவி } 10x}$$

$\frac{\text{வவி } 5x+\text{வவி } 3x}{\text{உவவி } 5x+\text{உவவி } 3x} =$ தொவி $4x$

$\frac{\text{வவி } x - \text{வவி } y}{\text{உவவி } x+\text{உவவி } y} =$ தொவி $\frac{x-y}{2}$

$\frac{\text{வவி } x+\text{வவி } 3x}{\text{உவவி } x+\text{உவவி } 3x} =$ தொவி $2x$

$\frac{\text{வவி } x - \text{வவி } 3x}{\text{வவி}^2 x - \text{உவவி}^2 x} = 2$ வவி x

$\frac{\text{உவவி } 4x+\text{உவவி } 3x+\text{உவவி } 2x}{\text{வவி } 4x+\text{வவி } 3x+\text{வவி } 2x} =$ உதொவி $3x$

உதொவி x உதொவி $2x-$ உதொவி $2x$ உதொவி $3x-$ உதொவி $3x$ உதொவி $x=1$

தொவி $4x = \frac{4 \text{ தொவி } x\left(1-\text{தொவி}^2 x\right)}{1-6 \text{ தொவி}^2 x+\text{தொவி}^4 x}$

உவவி $4x = 1-8$ வவி$^2 x$ உவவி$^2 x$

உவவி $6x = 32$ உவவி$^6 x - 48$ உவவி$^4 x + 18$ உவவி$^2 x - 1$

3.5 முக்கோணவிய சமன்பாடுகள்

ஒரு மாறியின் முக்கோணவியச்சார்பன்கள் அடங்கிய சமன்பாடுகளை முக்கோணவியச் சமன்பாடுகள் என்கிறோம். இவ்வாறான சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைப்பற்றி இப்பகுதியில் காணலாம். வவி x, உவவி x ஆகியவற்றின் மதிப்புகள், 2π எனும் இடைவெளிக்குப்பின்னும், தொவி xஇன் மதிப்புகள் π எனும் இடைவெளிக்குப் பின்னும் மீள்வருகின்றனவென நாம் ஏற்கனவே கற்றுள்ளோம். $0 \le x < 2\pi$ எனும் xஇன் மதிப்புகளுக்கான முக்கோணவியச்சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை *முதன்மைத்தீர்வு*கள் என்கிறோம். n எனும் முழுவெண் பங்குபெறும் தீர்வுகளை *பொதுவத்தீர்வு*கள் என்கிறோம். முழுவெண்களின் கணத்தை $\mathbb{Z}$ என்று குறிக்கிறோம்.

கீழ்க்காணும் சான்றுகள் முக்கோணவிச் சமன்பாடுகளை தீர்ப்பதில் உதவுகின்றன.

சான்று18

வவி $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

எனும் சமன்பாட்டுக்கான முதன்மைத் தீர்வுகளை காண்க.

தீர்வு

வவி $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ என்பதையும்

வவி $\frac{2\pi}{3} =$ வவி $\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) =$ வவி $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

என்பதையும் நாம் அறிவோம்.

எனவே, முதன்மைத்தீர்வுகள்

$$x = \frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3}$$

சான்று 19

தொவி $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ எனும் சமன்பாட்டுக்கான

முதன்மைத்தீர்வுகளை காண்க.

தீர்வு

தொவி $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

என்பதை அறிவோம். இதனால்,

$$\text{தொவி } \left[\pi - \frac{\pi}{6}\right] = -\text{தொவி } \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

மேலும்,

$$\text{தொவி } \left[2\pi - \frac{\pi}{6}\right] = -\text{தொவி } \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

அதாவது,

$$\text{தொவி } \left[\frac{5\pi}{6}\right] = \text{தொவி } \left[\frac{11\pi}{6}\right] = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

எனவே, முதன்மைத்தீர்வுகள்

$$\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

இனி நாம் முக்கோணவியச்சமன்பாடுகளின் பொதுத்தீர்வுகளை காணலாம். வவி $x = 0$ எனும் சமன்பாடு $x = n\pi$ என்ற தீர்வுகளை தருகிறது; இங்கு, $n \in \mathbb{Z}$

உவவி $x = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $x = (2n+1)\,{}^{\pi}/_{2}$ என்பதையும் அறிவோம்.

இப்போது நாம், கீழ்க்காணும் விளைவுகளை நிறுவலாம்.

தேற்றம் 1 எந்த x, y என்ற மெய்யெண்களுக்கும் வவி $x =$ வவி y எனும் சமன்பாடு $x = n\pi + (-1)^n y$ என்பதை உள்ளுரைக்கிறது; இங்கு, $n \in \mathbb{Z}$.

நிறுவல்

வவி $x =$ வவி y எனில், வவி $x -$ வவி $y = 0$. அதாவது,

$$2\text{உவவி}\ \frac{x+y}{2}\ \text{வவி}\ \frac{x-y}{2} = 0$$

இதிலிருந்து

$$\text{உவவி}\ \frac{x+y}{2} = 0\text{ஓ} \qquad \text{வவி}\ \frac{x-y}{2} = 0\text{ஓ}$$

என்று பெறுகிறோம். இங்கு ஒன்றோ மற்றதோ என்பது இவற்றுள் ஒன்றாவது மெய் என்பதை குறிக்கிறது. எனவே,

$\frac{x+y}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ஓ $\frac{x-y}{2} = n\pi$ஓ; இங்கு, $n \in \mathbb{Z}$)

அதாவது, $x = (2n+1)\pi - y$ஓ $x = 2n\pi + y$ஓ;

$x = (2n+1)\pi + (-1)^{2n+1}y$ஓ

$x = (2n)\pi + (-1)^{2n}y$ஓ

இவ்விரு விளைவுகளையும் இணைத்து

$x = n\pi + (-1)^n y;$ இங்கு, $n \in \mathbb{Z}$

என்று பெறுகிறோம்.

தேற்றம் 2 எந்த x, y என்ற மெய்யெண்களுக்கும், உவவி $x =$ உவவி y எனும் சமன்பாடு $x = 2n\pi \pm y$ என்பதை உள்ளுரைக்கிறது; இங்கு, $n \in \mathbb{Z}$.

நிறுவல் உவவி $x =$ உவவி y எனில்,

உவவி $x -$ உவவி $y = 0$. அதாவது,

$$2\text{வவி}\ \frac{x+y}{2}\ \text{வவி}\ \frac{x-y}{2} = 0$$

இதிலிருந்து,

வவி $\frac{x+y}{2} = 0$ஓ வவி $\frac{x-y}{2} = 0$ஓ

என்பதை பெறுகிறோம். எனவே,

$\frac{x+y}{2} = n\pi$ஓ $\frac{x-y}{2} = n\pi$ஓ; இங்கு, $n \in \mathbb{Z}$

அதாவது,

$x = 2n\pi - y$ஓ $x = 2n\pi + y$ஓ; இங்கு, $n \in \mathbb{Z}$

எனவே, $x = 2n\pi \pm y;$ இங்கு, $n \in \mathbb{Z}$

தேற்றம் 3 x, y ஆகிய மெய்யெண்களுள் எதுவும் ${}^{\pi}/_{2}$இன் ஒறைப்படை மடங்காக இல்லை எனில், தொவி $x =$ தொவி y எனும் சமன்பாடு $x = n\pi + y$ என்பதை உள்ளுரைக்கிறது; இங்கு, $n \in \mathbb{Z}$.

நிறுவல் தொவி $x =$ தொவி y எனில், தொவி $x -$ தொவி $y = 0$. அதாவது,

$$\frac{\text{வவி}\ (x)\text{உவவி}\ (y) - \text{உவவி}\ (x)\text{வவி}\ (y)}{\text{உவவி}\ (x)\text{உவவி}\ (y)} = 0$$

மேற்கண்ட சமன்பாடு வவி $(x - y) = 0$ என்பதை தருகிறது. (எவ்வாறு?)

எனவே, $(x - y) = n\pi;$ அதாவது, $x = n\pi + y$ இங்கு, $n \in \mathbb{Z}$.

சான்று 20

வவி $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

எனும் சமன்பாட்டுக்கான தீர்வை காண்க.

தீர்வு

வவி $x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -$வவி $\frac{\pi}{3} =$ வவி $\left[\pi + \frac{\pi}{3}\right]$

$=$ வவி $\frac{4\pi}{3}$

எனவே, வவி $x =$ வவி $\frac{4\pi}{3}$; இது தருவது

$x = n\pi + (-1)^n\ \frac{4\pi}{3},$ இங்கு, $n \in \mathbb{Z}$

குறிப்பு $4\pi/3$ என்பது, வவி $x = -{}^{\sqrt{3}}/_{2}$ என்றவாறான xஇன் மதிப்புகளுள் ஒன்றே. இவ்வாறான மற்ற மதிப்புகளில் தொடங்கினாலும் இதே தீர்வுகளை பெறுவோம்; ஆனால், அவை வேறு வடிவங்களில் தோன்றலாம்.

சான்று 21 தீர்க்க: உவவி $x = {}^{1}/_{2}$

தீர்வு உவவி $x = {}^{1}/_{2} =$ உவவி ${}^{\pi}/_{3}$

எனவே, $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$

சான்று 22 தீர்க்க

தொவி $2x = -$உதொவி $\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

தீர்வு

தொவி $2x = -$உதொவி $\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$=$ தொவி $\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{3}\right)$

அதாவது, தொவி $2x =$ தொவி $\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$

எனவே, $2x = n\pi + x + \frac{5\pi}{6}, \quad n \in \mathbb{Z}$

அதாவது, $x = n\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad n \in \mathbb{Z}$

சான்று 23 தீர்க்க

வவி $2x -$ வவி $4x +$ வவி $6x = 0$

தீர்வு சமன்பாட்டை கீழ்க்காணுமாறு எழுதலாம்

வவி $6x +$ வவி $2x -$ வவி $4x = 0$

2வவி $4x$ உவவி $2x -$ வவி $4x = 0$

வவி $4x\ (2$ உவவி $2x - 1) = 0$

வவி $4x = 0$ஓ உவவி $2x = \frac{1}{2}$ஓ

$$\text{வவி } 4x = 0 \text{ஓ உவவி } 2x = \text{உவவி}\frac{\pi}{3}\text{ஓ}$$

$$4x = n\pi\text{ஓ} \quad 2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}\text{ஓ}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{அதாவது } x = \frac{n\pi}{4}\text{ ஓ } n\pi \pm \frac{\pi}{6}\text{ஓ}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

சான்று 24 தீர்க்க

$2\text{உவவி}^2 x + 3 \text{ வவி } x = 0$

தீர்வு சமன்பட்டை $2\left(1 - \text{வவி}^2 x\right) + 3 \text{ வவி } x = 0$ என்று எழுதலாம். அதாவது,

$$2\text{வவி}^2 x - 3 \text{ வவி } x - 2 = 0$$

இதை $(2 \text{ வவி } x + 1)(\text{வவி } x - 2) = 0$ என்று காரணியாக்கலாம். எனவே,

$\text{வவி } x = -\frac{1}{2}\text{ஓ வவி } x = 2\text{ஓ}$

ஆனால், $\text{வவி } x = 2$ சாத்தியமன்று. (ஏன்?). எனவே,

$\text{வவி } x = -\frac{1}{2} = \text{வவி}\frac{7\pi}{6}$

எனவே, தீர்வு

$$x = n\pi + \frac{(-1)^n 7\pi}{6}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

பயிற்சி 3.4

1 கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளின் முதன்மைத்தீர்வுகளையும் பொதுவத்தீர்வுகளையும் காண்க

2 $\text{தொவி } x = \sqrt{3}$

3 $\text{வெவி } x = 2$

4 $\text{உதொவி } x = -\sqrt{3}$

5 $\text{உவெவி } x = -2$

6 கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளுக்கான பொதுவத்தீர்வுகளை காண்க.

7 $\text{உவவி } 4x = \text{உவவி } 2x$

8 $\text{உவவி } 3x + \text{உவவி } x - \text{உவவி } 2x = 0$

9 $\text{வவி } 2x + \text{உவவி } x = 0$

10 $\text{வெவி}^2 2x = 1 - \text{தொவி } 2x$

11 $\text{வவி } x + \text{வவி } 3x + \text{வவி } 5x = 0$

பலவகைச்சான்றுகள்

சான்று 25 x, y ஆகியன இரண்டாம் காற்பகுதியிலும், $\text{வவி } x = {}^{3}/_{5}$, $\text{உவவி } y = -{}^{12}/_{13}$ என்றும் இருந்தால், $\text{வவி } (x+y)$ இன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு

$$\text{வவி } (x+y) = \text{வவி } x \text{ உவவி } y + \text{உவவி } x \text{ வவி } y \qquad (1)$$

என நாமறிவோம். இப்போது,

$$\text{உவவி}^2 x = 1 - \text{வவி}^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

எனவே, $\text{உவவி } x = \pm\frac{4}{5}$

x இரண்டாம் காற்பகுதியில் உள்ளதால், உவவி x எதிர்மம். அதாவது,

$\text{உவவி } x = -\frac{4}{5}$

$$\text{வவி}^2 y = 1 - \text{உவவி}^2 y = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$$

$\text{வவி } y = \pm\frac{5}{13}$

y இரண்டாம் காற்பகுதியில் உள்ளதால், உவவி y நேர்மம். எனவே,

$\text{வவி } y = \frac{5}{13}$

வவி x, உவவி y, உவவி x, வவி y ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை *(1)*ஆம் சமன்பாட்டில் மாற்றிட்டு

$$\text{வவி } (x+y) = \frac{3}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{5}{13}$$

$$= -\frac{36}{65} - \frac{20}{65} = -\frac{56}{65}$$

என்ற இறுதிவிடையை பெறுகிறோம்.

சான்று 26 நிறுவுக

$$\text{உவவி } 2x \text{ உவவி}\frac{x}{2} - \text{உவவி } 3x \text{ உவவி}\frac{9x}{2} = \text{வவி } 5x \text{ வவி}\frac{5x}{2}$$

தீர்வு

இடப்பக்கம்

$$= \frac{1}{2}\left(2 \text{ உவவி } 2x \text{ உவவி}\frac{x}{2} - 2 \text{ உவவி}\frac{9x}{2}\text{உவவி } 3x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\text{உவவி }\left(2x + \frac{x}{2}\right) + \text{உவவி }\left(2x - \frac{x}{2}\right) - \text{உவவி }\left(\frac{9x}{2} + 3x\right) - \text{உவவி }\left(\frac{9x}{2} - 3x\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\text{உவவி}\frac{5x}{2} + \text{உவவி}\frac{3x}{2} - \text{உவவி}\frac{15x}{2} - \text{உவவி}\frac{3x}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\text{உவவி}\frac{5x}{2} - \text{உவவி}\frac{15x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-2 \text{ வவி}\left(\frac{\frac{5x}{2} + \frac{15x}{2}}{2}\right)\text{வவி}\left(\frac{\frac{5x}{2} - \frac{15x}{2}}{2}\right)\right\}$$

$$= -\text{வவி } 5x \text{ வவி}\left(-\frac{5x}{2}\right) = \text{வவி } 5x \text{ வவி}\frac{5x}{2}$$

சான்று 27 தொவி $\left[{}^{\pi}/_{8}\right]$ இன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு $x = {}^{\pi}/_{8}$ என்க. அப்படியெனில், $2x = {}^{\pi}/_{4}$

$$தொவி\ 2x = \frac{2தொவி\ x}{1 - தொவி^2 x}$$

$$தொவி\ \frac{\pi}{4} = \frac{2\ தொவி\ \frac{\pi}{8}}{1 - தொவி^2 \frac{\pi}{8}}$$

$y =$ தொவி $\pi/8$ என்க. அப்படியெனில்,

$$1 = \frac{2y}{1 - y^2}$$

அதாவது, $y^2 + 2y - 1 = 0$

$$y = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$\pi/8$ முதற்காற்பகுதியில் உள்ளதால்,
$y =$ தொவி $\pi/8$ நேர்மம்.

$$எனவே, தொவி \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

சான்று 28

$$தொவி\ x = \frac{3}{4}, \quad \pi < x < \frac{3\pi}{2}$$

எனில்,

$$வவி \frac{x}{2}, \quad உவவி \frac{x}{2}, \quad தொவி \frac{x}{2}$$

ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை காண்க.

தீர்வு

$$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$$

என்பதால் உவவி x எதிர்மம். மேலும்,

$$\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$$

என்பதால், வவி $x/2$ நேர்மம்; உவவி $x/2$ எதிர்மம்.

$$வெவி^2 x = 1 + தொவி^2 x = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

$$உவவி^2 x = \frac{16}{25}$$

$$உவவி\ x = -\frac{4}{5}\ (ஏன்?)$$

$$2வவி^2 \frac{x}{2} = 1 - உவவி\ x = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$$

$$வவி^2 \frac{x}{2} = \frac{9}{10}$$

$$வவி \frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}} (ஏன்?)$$

$$2உவவி^2 \frac{x}{2} = 1 + உவவி\ x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$உவவி^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{10}$$

$$உவவி \frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\ (ஏன்?)$$

$$தொவி \frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}\left(-\frac{\sqrt{10}}{1}\right) = -3$$

சான்று 29 நிறுவுக.

$$உவவி^2 x + உவவி^2 \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + உவவி^2 \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

தீர்வு இடப்பக்கம்

$$= \frac{1 + உவவி\ 2x}{2} + \frac{1 + உவவி\ \left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)}{2} + \frac{1 + உவவி\ \left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{3 + உவவி\ 2x + உவவி\ \left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + உவவி\ \left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(3 + உவவி\ 2x + 2உவவி\ 2x\ உவவி \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3 + உவவி\ 2x + 2\ உவவி\ 2x\ உவவி\ \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3 + உவவி\ 2x - 2\ உவவி\ 2x\ உவவி \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(3 + உவவி\ 2x - உவவி\ 2x) = வலப்பக்கம்$$

மூன்றாம் படலத்தில் பலவகைப்பயிற்சிகள்

நிறுவுக

1. $2\ உவவி\ \pi/13\ உவவி\ 9\pi/13 + உவவி\ 3\pi/13 + உவவி\ 5\pi/13 = 0$
2. $(வவி\ 3x + வவி\ x)வவி\ x + (உவவி\ 3x - உவவி\ x)உவவி\ x = 0$
3. $(உவவி\ x + உவவி\ y)^2 + (வவி\ x - வவி\ y)^2 = 4\ உவவி^2 \left((x+y)/2\right)$
4. $(உவவி\ x - உவவி\ y)^2 + (வவி\ x - வவி\ y)^2 = 4\ வவி^2 \left((x-y)/2\right)$
5. $வவி\ x + வவி\ 3x + வவி\ 5x + வவி\ 7x = 4\ உவவி\ x\ உவவி\ 2x\ வவி\ 4x$
6.
7. $\frac{(வவி\ 7x + வவி\ 5x) + (வவி\ 9x + வவி\ 3x)}{(உவவி\ 7x + உவவி\ 5x) + (உவவி\ 9x + உவவி\ 3x)} = தொவி\ 6x$
8. $வவி\ 3x + வவி\ 2x - வவி\ x = 4\ வவி\ x\ உவவி\ (x/2)\ உவவி\ (3x/2)$

கீழ்க்காணும் ஒவ்வொன்றிலும் வவி $x/2$, உவவி $x/2$, தொவி $x/2$ ஆகியவற்றை காண்க

9 இரண்டாம் காற்பகுதியிலுள்ள xக்கு தொவி $x = -4/3$
10 மூன்றாம் காற்பகுதியிலுள்ள xக்கு உவவி $x = -1/3$
11 இரண்டாம் காற்பகுதியிலுள்ள xக்கு வவி $x = 1/4$

சுருக்கவுரை

r ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்தில் l நீளமுள்ள ஒரு வில் தாங்கும் கோணம் θ ஆரையன் எனில், $l = r\,\theta$.

π ஆரையன் $= 180$ பாகை (எனவே, 1 ஆரையன் $= \frac{180}{\pi}$ பாகை; 1 பாகை $= \frac{\pi}{180}$ ஆரையன்)

சீரொழுங்கு:

வவி $(2n\pi + x) =$ வவி x; உவவி $(2n\pi + x) =$ உவவி x; இங்கு n முழுவெண்

சமச்சீர்மை:

வவி $(-x) = -$வவி x (எதிர்); உவவி $(-x) =$ உவவி x (நேர்)

வவி $(2\pi - x) = -$வவி (x); உவவி $(2\pi - x) =$ உவவி x

வவி $(\pi - x) =$ வவி (x); உவவி $(\pi - x) = -$உவவி x

வவி $(\pi + x) = -$வவி (x); உவவி $(\pi + x) = -$உவவி x

வவி $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$ உவவி x; உவவி $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$ வவி x

வவி $\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$ உவவி x; உவவி $\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -$வவி x

பித்தாகரசுறவு: வவி$^2\, x +$ உவவி$^2\, x = 1$

(எனவே, தொவி$^2\, x + 1 =$ வெவி$^2\, x$; $1 +$ உதொவி$^2\, x =$ உவெவி$^2\, x$)

கூட்டற்கோணவுறவுகள்:

வவி $(x + y) =$ வவி x உவவி $y +$ உவவி x வவி y

(எனவே, வவி $(x - y) =$ வவி x உவவி $y -$ உவவி x வவி y)

உவவி $(x + y) =$ உவவி x உவவி $y -$ வவி x வவி y

(எனவே, உவவி $(x - y) =$ உவவி x உவவி $y +$ வவி x வவி y)

$x, y, (x \pm y)$ ஆகிய கோணங்களுள் எதுவுமே $\pi/2$இன் ஒற்றைப்படைமடங்கன்று எனில்,

$$\text{தொவி}\,(x+y) = \frac{\text{தொவி}\,x + \text{தொவி}\,y}{1 - \text{தொவி}\,x\ \text{தொவி}\,y}$$

$$\left(\text{எனவே, தொவி}\,(x-y) = \frac{\text{தொவி}\,x - \text{தொவி}\,y}{1 + \text{தொவி}\,x.\,\text{தொவி}\,y}\right)$$

$x, y, (x \pm y)$ ஆகிய கோணங்களுள் எதுவுமே πஇன் மடங்கன்று எனில்,

$$\text{உதொவி}\,(x+y) = \frac{\text{உதொவி}\,x\ \text{உதொவி}\,y - 1}{\text{உதொவி}\,y + \text{உதொவி}\,x}$$

$$\left(\text{எனவே, உதொவி}\,(x-y) = \frac{\text{உதொவி}\,x\ \text{உதொவி}\,y + 1}{\text{உதொவி}\,y - \text{உதொவி}\,x}\right)$$

மடங்குக்கோணவுறவுகள்:

$$\text{உவவி}\,2x = \text{உவவி}^2 x - \text{வவி}^2 x = 2\text{உவவி}^2 x - 1 = 1 - 2\,\text{வவி}^2 x = \frac{1 - \text{தொவி}^2 x}{1 + \text{தொவி}^2 x}$$

$$\text{வவி}\,2x = 2\,\text{வவி}\,x\ \text{உவவி}\,x = \frac{2\,\text{தொவி}\,x}{1 + \text{தொவி}^2 x}$$

தொவி $2x = \frac{2 \text{ தொவி } x}{1 - \text{ தொவி}^2 x}$

வவி $3x = 3$ வவி $x - 4$ வவி$^3 x$

உவவி $3x = 4$ உவவி$^3 x - 3$ உவவி x

தொவி $3x = \frac{3 \text{ தொவி } x - \text{தொவி}^3 x}{1 - 3\text{தொவி}^2 x}$

கூட்டல்வாய்ப்பாடுகள்*:*

உவவி $x +$ உவவி $y = 2$ உவவி $\frac{(x+y)}{2}$ உவவி $\frac{(x-y)}{2}$

உவவி $x -$ உவவி $y = -2$ வவி $\frac{(x+y)}{2}$ வவி $\frac{(x-y)}{2}$

வவி $x +$ வவி $y = 2$ வவி $\frac{(x+y)}{2}$ உவவி $\frac{(x-y)}{2}$

வவி $x -$ வவி $y = 2$ உவவி $\frac{(x+y)}{2}$ வவி $\frac{(x-y)}{2}$

பெருக்கல்வாய்ப்பாடுகள்*:*

2 உவவி x உவவி $y =$ உவவி $(x+y) +$ உவவி $(x-y)$

-2 வவி x வவி $y =$ உவவி $(x+y) -$ உவவி $(x-y)$

2 வவி x உவவி $y =$ வவி $(x+y) +$ வவி $(x-y)$

2 உவவி x வவி $y =$ வவி $(x+y) -$ வவி $(x-y)$

சமன்பாடுகளின் பொதுத்தீர்வுகள்*:*

வவி $x = 0$ எனில், $x = n\pi$, $(n \in \mathbb{Z})$

உவவி $x = 0$ எனில், $x = (2n+1)\pi/2$, $(n \in \mathbb{Z})$

வவி $x =$ வவி y என்பதன் உள்ளுரை $x = n\pi + (-1)^n y$*;* இங்கு, $n \in \mathbb{Z}$

உவவி $x =$ உவவி y என்பதன் உள்ளுரை $x = 2n\pi \pm y$*;* இங்கு, $n \in \mathbb{Z}$

தொவி $x =$ வவி y என்பதன் உள்ளுரை $x = n\pi + y$*;* இங்கு, $n \in \mathbb{Z}$