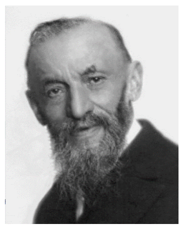
படலம் 4

கணிதத்தூண்டலின் கொள்கை

4.1 அறிமுகம்



பீனோ (1858-1932)

தருவித்தல் எனும் ஏரணம் கணிதத்தில் ஒரு முக்கிய அடிப்படை. இந்த ஏரணத்தை விளங்கிக்கொள்ள, பின்வரும் சான்றை கருதுக.

(அ) எல்லா பாலூட்டிகளும் விலங்குகள்

(ஆ) ஆடு ஒரு பாலூட்டி

எனவே,

(இ) ஆடு ஒரு விலங்கு.

(அ), (ஆ) என்ற கூற்றுகள் மெய் எனில், (இ) மெய் என்று நிறுவுகிறோம். ஒரு எளிய கணிதச்சான்றை உருவாக்க

(i) எட்டு இரண்டால் வகுபடுகிறது

(ii) இரண்டால் வகுபடும் எந்த எண்ணும் இரட்டைப்படை

எனவே,

(iii) எட்டு இரட்டைப்படை.

என்று நாம் எழுதலாம்.

இங்கு, (அ)வும் (ii)உம் பொதுவான கூற்றுகள். அவற்றை முறையே ஆடு, எட்டு என்ற தனிப்பொருள்களுக்கு பயனாக்கிறோம். இவ்வாறு, *தருவித்தல் என்பது ஒரு பொதுவமான வேற்றுவத்தை ஒரு தனித்துவ வேற்றுவத்துக்கு பயனாக்குவது.* என்று சுருங்கச்சொல்லலாம். அதாவது, ஒரு கூற்றை நிறுவும் தேவை இருக்கும்போது, ஏற்கத்தகு வருவித்தல்களை படிப்படியாக மேற்கொள்வதை தருவித்தல் என்கிறோம். கணிதத்தில், நிறுவவேண்டிய கூற்றை உய்மானம் என்றோ தேற்றம் என்றோ அழைக்கிறோம்.

தருவித்தலுக்கு மாறாக, தூண்டல் எனும் ஏரணித்தலில் ஒரு கூற்றை எல்லா தனித்துவங்களிலும் சரிபார்த்தபின் பொதுவமான உய்மானத்தையோ தேற்றத்தையோ நிறுவுகிறோம். இது கணிதத்தில் அடிக்கடி பயன்படுகிறது அறிவியலிலும் சேகரித்த தகவலை பகுப்பாய்ந்து அதிலிருந்து முடிவுகளை பெறுவதில் தூண்டல் முக்கியப்பங்கை வகிக்கிறது.

குறிக்கணிதத்திலும் கணிதத்தின் பிற துறைகளிலும் n என்ற நேர்ம முழுவெண்ணின்வழி வாய்ப்பாடாகும் சில முடிவுகளோ கூற்றுகளோ உள்ளன. இவ்வாறான கூற்றுகளை நிறுவ பயன்படும் பொருத்தமான செய்நுட்பம் கணிதத்தூண்டல் என்ற கொள்கையின் அடிப்படையிலானது.

4.2 செயலுந்தல்

கணிதத்தில், கணிதத்தூண்டல் எனப்படும் ஒரு முழுமையான தூண்டல்வடிவத்தை பயன்படுத்து கிறோம். கணிதத்தூண்டலின் அடிப்படைக் கொள்கைகளை புரிந்துகொள்ள படம் 4.1இல் காட்டியபடி அடுக்கிவைத்த செவ்வக ஓடுகளின் ஒரு தொகுப்பை கருதுக.

படம் 4.1

முதல் ஓட்டை படத்தில் காட்டிய திசையில் தள்ளினால் எல்லா ஓடுகளும் விழுகின்றன. எல்லா ஓடுகளும் விழுவதை உறுதிசெய்ய

(அ) முதல் ஓடு விழுகிறது

(ஆ) எந்த ஓடு விழுந்தாலும் அதற்கடுத்த ஓடு விழுவது கட்டாயம்

ஆகிவற்றை அறிவது போதுமானது. இதுவே கணிதத் தூண்டலின் அடிப்படைக்கொள்கை.

இயலெண்களின் கணமான N மெய்யெண் களின் கணமான Rஇன் ஒரு தனித்துவ உட்கணம் என்பது நாமறிந்ததே. உண்மையில், Rஇல் கீழ்க்காணும் பண்புள்ள மீச்சிறிய உட்கணம் N.

S என்ற கணத்துக்கு, $1 \in S$ என்றும் $x \in S$ எனில் $x+1 \in S$ என்றுமிருந்தால், Sஐ ஒரு தூண்டற்கணம் என்கிறோம்.

Rஇன் மீச்சிறு தூண்டற்கணம் N என்பதால் Rஇன் எல்லாத்தூண்டற்கணங்களிலும் N ஒரு உட்கணமாக இருக்கவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு

1இலிருந்து nவரையான நேர்ம முழவெண்களின் கூட்டுத்தொகையை தரும் ஒரு வாய்ப்பாட்டை காணவிரும்புகிறோம் என்க. அதாவது, $n = 3$ என்றபோது இந்த வாய்ப்பாடு $1 + 2 + 3$இன் மதிப்பை தரவேண்டும்; $n = 4$ என்றபோது $1 + 2 + 3 + 4$இன் மதிப்பை தரவேண்டும்; இவ்வாறே. ஏதோ ஒரு வழியில்

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

என்ற வாய்ப்பாட்டை கண்டுபிடித்துவிட்டதாக கொள்வோம்.

இந்த வாய்ப்பாட்டை எப்படி நிறுவலாம்? இந்த கூற்றை nஇன் மிகப்பல மதிப்புகளுக்கு சரிபார்க்கலாம். எனினும் அது nஇன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் வாய்ப்பாட்டை நிறுவாது. நமக்கு தேவையானது ஒரு தொடுப்பவினை. அதாவது வாய்ப்பாடு nஇன் ஒரு குறிப்பிட்ட நேர்ம மதிப்புக்கு சரியானால் அதற்கடுத்த மதிப்புக்கும் அதனால் அதற்கடுத்ததற்கும் என்றவாறே முடிவில்லாமல் சரியாகிறது என்ற விளைவை வேண்டுகிறோம். இவ்வாறான வினையை கணிதத்தூண்டலால் உண்டாக்கலாம்.

4.3 கணிதத்தூண்டலின் கோட்பாடு

n என்ற இயலெண் ஈடுபடும் $P(n)$ என்ற ஒரு கூற்றுக்கு கீழ்க்காணும் பண்புகள் உள்ளதாக கொள்வோம்.

(i) $n = 1$க்கு கூற்று மெய்; அதாவது, $P(1)$ மெய்;

(ii) கூற்று $n = k$ (k ஒரு நேர்ம முழுவெண்) மெய் எனில், இந்த கூற்று $n = k + 1$க்கும் மெய்; அதாவது, $P(k)$ மெய் என்பது $P(k+1)$ மெய் என்பதை உள்ளுரைக்கிறது.

அப்படியெனில், nஇன் எல்லா இயலெண் மதிப்புகளுக்கும் $P(n)$ மெய்.

(i)ஆம் பண்பு ஒரு எளிய உண்மையை உரைக்கும் கூற்று. சில சூழ்நிலைகளில் கூற்று $n \geq 4$ என்றவாறான எல்லா n மதிப்புகளுக்கும் பொருந்துமாறு இருக்கலாம். இந்த வேற்றுவத்தில், முதற்படியை $n = 4$இலிருந்து தொடங்க $n = 4$க்கான முடிவை சரிபார்க்கலாம், அதாவது, $P(4)$இல் தொடங்குகிறோம்.

(ii)ஆம் பண்பு ஒரு வரைக்கட்டுக்கூற்று. அது $n = k$க்கு கூற்று சரியானது என்று உரைக்கவில்லை. அது $n = k$க்கு மெய்யானால் $n = k + 1$க்கும் மெய்யாகிறது என்றே உரைக்கிறது, எனவே இந்த பண்பு இருப்பதைக்காட்ட வரைக்கட்டுடனான முன்மொழிதலையே நிறுவவேண்டும்.

கூற்று $n = k$க்கு மெய் எனில், இது $n = k + 1$க்கும் மெய் என்பதை *தூணடற்படி* என்கிறோம். தூண்டற்படியிலுள்ள $n = k$க்கு கூற்று மெய் எனும் எடுகோளை *தூண்டற்கருதுகோள்* என்கிறோம்.

ஒரு பாங்கில் பொருந்துவதுபோல் தோன்றும் ஒரு வாய்ப்பாட்டை கண்டுபிடிப்பது கணிதத்தில் அடிக்கடி நிகழ்வது. சான்றாக

$$1 = 1^2 = 1$$

$$4 = 2^2 = 1 + 3$$

$$9 = 3^2 = 1 + 3 + 5$$

$$16 = 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$$

இன்ன பிற

அதாவது, முதல் இரண்டு ஒற்றைப்படை இயலெண்களின் கூட்டுத்தொகை இரண்டாவது இயலெண்ணின் வர்க்கம், முதல் மூன்று ஒற்றைப்படை இயலெண்களின் கூட்டுத்தொகை மூன்றாம் இயலெண்ணின் வர்க்கம், என்றிவ்வாறே. எனவே, இந்த வடிவத்திலிருந்து

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

என்ற வாய்பாடு தோன்றுகிறது. அதாவது, முதல் n ஒற்றைப்படை இயலெண்களின் கூட்டுத்தொகை nஇன் வர்க்கம். இதனால்,

$$P(n): 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

என்று எழுதுவோம். எல்லா nக்கும் $P(n)$ மெய் என்பதை நிறுவ விரும்புகிறோம்.

கணிதத்தூண்டலை பயன்படுத்துவதன் முதல் படி $P(1)$ஐ நிறுவுவது. இதை *அடிப்படைப்படி* என்கிறோம். வெளிப்படையாக

$1 = 1^2$. எனவே, $P(1)$ மெய்.

அடுத்த படியை *தூண்டற்படி* என்று அழைக்கிறோம். இங்கு, k என்ற நேர்ம முழுவெண்ணுக்கு $P(k)$ மெய் என்று எடுகொண்டு, $P(k+1)$ மெய் என்பதை நிறுவவேண்டும். $P(k)$ மெய் என்பதால்

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) = k^2 \quad (4.1)$$

இதை பயன்படுத்தி $P(k+1)$இன் இடப்பக்கத்தை மதிப்பறிவோம்.

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) + \{2(k + 1) - 1\}$$
$$= k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2 \quad (4.2)$$

என்று பெறுகிறோம். எனவே, $P(k+1)$ மெய். இத்துடன் தூண்டலால் நிறுவல் முற்றுப்பெற்றது.

எனவே, n என்ற எல்லா இயலெண்களுக்கும் $P(n)$ மெய்.

சான்று *1* எல்லா $n \geq 1$க்கும்

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

என்பதை நிறுவுக.

தீர்வு நிறுவவேண்டிய கூற்று $P(n)$ என்க. அதாவது,

$$P(n):\ 1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n = 1$க்கு, $P(1): 1=(1(1+1)(2+1))/6=(1\times2\times3)/6= 1$ இது மெய்.

k என்ற நேர்ம முழுவெண்ணுக்கு $P(k)$ மெய் என்று கொள்வோம். அதாவது,

$$1^2+2^2+4^2+5^2+\cdots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

அப்படியெனில்,

$$1^2+2^2+4^2+5^2\ldots.k^2+(k+1)^2$$
$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$
$$=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$
$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$
$$=\frac{(k+1)(k+1+1)\{2(k+1)+1\}}{6}$$

எனவே $P(k)$ மெய்யாகும்போதெல்லாம் $P(k+1)$ மெய்.

எனவே, கணிதத்தூண்டலின் கொள்கையிலிருந்து, $P(n)$ என்ற கூற்று அனைத்து n என்ற இயலெண்களுக்கும் மெய்.

சான்று *2* n என்ற அனைத்து நேர்ம முழுவெண்களுக்கும் $2^n > n$ என்பதை நிறுவுக.

தீர்வு $P(n): 2^n > n$

$n = 1$ என்றபோது, $2^1 > 1$. எனவே $P(1)$ மெய்.

k என்ற எந்த நேர்ம முழுவெண்ணுக்கும் $P(k)$ மெய் என்று கொள்வோம், அதாவது,

$$2^k > k \qquad (4.3)$$

$P(k)$ மெய்யாக இருக்கும் போதெல்லாம் $P(k+1)$ மெய் என்பதை இப்போது நிறுவுவோம்.

(4.3)இன் இரு பக்கங்களையும் 2ஆல் பெருக்கினால்

$$2.2^k > 2k$$

என்பது கிடைக்கிறது. அதாவது, $2^{k+1} > 2k = k+k > k+1$

எனவே, $P(k)$ மெய் எனில், $P(k+1)$ மெய். எனவே, கணிதத்தூண்டலின்படி, n என்ற ஒவ்வொரு நேர்ம முழுவெண்ணுக்கும் $P(n)$ மெய்.

சான்று *3* அனைத்து $n \geq 1$ க்கும்

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

என்று நிறுவுக.

தீர்வு

$$P(n): \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

என்க. $P(1)$ஐ கருதி,

$$P(1): \frac{1}{1.2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$$

அது மெய் என்று காண்கிறோம். எனவே, $n = 1$க்கு $P(n)$ மெய்.

kயின் ஏதோவொரு இயலெண் மதிப்புகளுக்கு $P(k)$ மெய் என்று எடுகொள்வோம்.

அதாவது,

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1} \quad (4.4)$$

$P(k)$ மெய் எனும்போது $P(k+1)$ மெய் என்பதை நாம் நிறுவவேண்டும்.

$$P(k+1)=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right]+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{(k^2+2k+1)}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$$

எனவே $P(k)$ மெய்யாகும்போதெல்லாம் $P(k+1)$ மெய். எனவே, கணிதத்தூண்டலின்படி, $P(n)$ எல்லா இயலெண்களுக்கும் மெய்.

சான்று *4* n என்ற ஒவ்வொரு நேர்ம முழுவெண்ணுக்கும் $7^n - 3^n$ என்பது 4ஆல் வகுபடுகிறது என்று நிறுவுக.

தீர்வு

$P(n): 7^n - 3^n$ என்பது 4 ஆல் வகுபடுகிறது.

$P(1)$ஐ கருதி, $7^1 - 3^1 = 4$ என்பது 4 ஆல் வகுபவதால் $P(1)$ மெய் என்று காண்கிறோம்.

k என்ற இயலெண்ணுக்கு $P(k)$ மெய் என்க. அதாவது $P(k): 7^k - 3^k$ 4ஆல் வகுபடுகிறது. இதை $7^k - 3^k = 4d, d \in N$ என்று எழுதலாம்.

இப்போது, $P(k)$ மெய்யாகும்போதெல்லாம் $P(k+1)$ மெய் என்பதை நிறுவ விரும்புகிறோம்.

$$7^{(k+1)} - 3^{(k+1)}$$
$$= 7^{(k+1)} - 7\times3^k + 7\times3^k - 3^{(k+1)}$$
$$= 7(7^k - 3^k) + (7-3)3^k$$
$$= 7(4d) + (7-3)3^k$$
$$= 7(4d) + 4\times3^k$$
$$= 4(7d + 3^k)$$

இதிலிருந்து $4(7d + 3^k)$ 4ஆல் வகுபடுவது தெளிவு. எனவே, $P(k)$ மெய்யாகும்போது $P(k+1)$ மெய். இவ்வாறு, கணிதத்தூண்டலின்படி nஇன் ஒவ்வொரு நேர்ம முழுவெண்மதிப்புக்கும் கூற்று மெய்.

சான்று 5 n என்ற எல்லா இயலெண்களுக்கும் $x > -1$ என்ற மெய்யெண்ணுக்கும் $(1+x)^n \geq (1+nx)$ என்று நிறுவுக.

தீர்வு கூற்றை $P(n)$ என்று குறிப்போம். அதாவது

$$P(n): (1+x)^n \geq (1+nx), \qquad x > -1$$

$(1+x) \geq (1+x)$ மெய்யாவதால், $P(1)$ மெய்.

$P(k): (1+x)^k \geq (1+kx),\ x > -1$ மெய் எனக்கொள்வோம்.

$x > -1$ என்ற எடுகோளுடன்,

$P(k)$ மெய்யாகும்போதெல்லாம் $P(k+1)$ மெய் (4.5)

என்பதை நிறுவ விரும்புகிறோம்.

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x)$$

என்ற முற்றொருமையை கருதுக.

$x > -1$ என்பதால் $(1+x) > 0$.

எனவே, $(1+x)^k \geq (1+kx)$ஐ பயன்படுத்துவதன்மூலம்

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x)$$

என்று பெறலாம். அதாவது

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+x+kx+kx^2) \qquad (4.6)$$

இங்கு k ஒரு இயலெண்; $x^2 \geq 0$. என்பதால் $kx^2 \geq 0$. எனவே

$$(1+x+kx+kx^2) \geq (1+x+kx)$$

அதனால்

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+x+kx)$$

என்று பெறுகிறோம். அதாவது

$$(1+x)^{k+1} \geq [1+(1+k)x]$$

இவ்வாறு, (4.5)இலுள்ள கூற்றை நிறுவினோம். எனவே, கணிதத்தூண்டலின்படி $P(n)$ எல்லா இயலெண்களுக்கும் மெய்.

சான்று 6 $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ எல்லா $n \in N$களுக்கும் 24 ஆல் வகுபடுகிறது என்று நிறுவுக.

தீர்வு $P(n)$: $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ஐ 24 வகுக்கிறது என்பதை நிறுவவேண்டும்.

$2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 - 5 = 24$ என்பதால், $n = 1$க்கு $P(n)$ மெய்யாவது தெளிவு.

$P(k)$ மெய் என்க. அதாவது

$$2 \cdot 7^k + 3 \cdot 5^k - 5 = 24q, \qquad q \in N \qquad (4.7)$$

இப்போது, $P(k)$ மெய் எனில் $P(k+1)$ மெய் என்பதை நிறுவ விரும்புகிறோம்.

$2 \cdot 7^{k+1} + 3 \cdot 5^{k+1} - 5$

$= 2 \cdot 7^k \cdot 7 + 3 \cdot 5^k \cdot 5 - 5$

$= 7[2 \cdot 7^k + 3 \cdot 5^k - 5 - 3 \cdot 5^k + 5] + 3 \cdot 5^k \cdot 5 - 5$

$= 7[24q - 3 \cdot 5^k + 5] + 15 \cdot 5^k - 5$

$= 7 \cdot 24q - 21 \cdot 5^k + 35 + 15 \cdot 5^k - 5$

$= 7 \cdot 24q - 6 \cdot 5^k + 30$

$= 7 \cdot 24q - 6(5^k - 5)$

$= 7 \cdot 24q - 6(4p)$ $(5^k - 5)$ஐ 4 வகுக்கிறது (ஏனென்று விளங்குகிறதா?)

$= 7 \cdot 24q - 24p$

$= 24(7q - p) = 24r,$

$r = 7q - p$ ஒரு இயலெண் (4.8)

(4.8)இன் வலப்பக்கம் 24ஆல் வகுபடுவதால் $P(k)$ மெய்யாகும்போது $P(k+1)$ மெய்யாகிறது. எனவே, கணிதத்தூண்டலின்படி, எல்லா $n \in N$களுக்கும் $P(n)$ மெய்.

சான்று 7 நிறுவுக

$$1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2 > \frac{n^3}{3}, \qquad n \in N$$

தீர்வு நிறுவவேண்டியதை $P(n)$ என்க. அதாவது

$$P(n): 1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2 > \frac{n^3}{3}, \qquad n \in N$$

$1^2 > 1^3/3$ என்பதால் $n = 1$க்கு $P(n)$ மெய்.

$P(k)$ மெய் எனக்கொள்வோம். அதாவது

$$P(k): (1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + k^2) > \frac{k^3}{3} \qquad (4.9)$$

$P(k)$ மெய்யெனில் $P(k+1)$ மெய் என்பதை இப்போது நிறுவுவோம்.

$1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + k^2 + (k+1)^2$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + k^2) + (k+1)^2$

$> \frac{k^3}{3} + (k+1)^2$ (4.9) இலிருந்து

$= \frac{1}{3}[k^3 + 3k^2 + 6k + 3]$

$= \frac{1}{3}[(k+1)^3 + 3k + 2] > \frac{1}{3}(k+1)^3$

எனவே, $P(k)$ மெய்யாகும்போது $P(k+1)$ மெய். எனவே, கணிதத்தூண்டல்மூலம் $P(n)$ அனைத்து $n \in N$க்கும் மெய்.

சான்று 8 ஒவ்வொரு இயலெண்ணுக்கும் கணிதத்தூண்டலை பயன்படுத்தி. $(ab)^n = a^n b^n$ என்ற அடுக்கெண்விதியை நிறுவுக.

தீர்வு $P(n): (ab)^n = a^n b^n$ என்க.

$(ab)^1 = ab = a^1 b^1$ என்பதால் $n = 1$ க்கு $P(n)$ மெய்.

$P(k)$ மெய் என்க. அதாவது,

$$(ab)^k = a^k b^k \qquad (4.10)$$

$P(k)$ மெய்யாகும்போதெல்லாம் $P(k+1)$ மெய் என்பதை இப்போது நிறுவுவோம்.

$(ab)^{k+1} = (ab)^k(ab)$

$= (a^k b^k)(ab)$ (4.10)இலிருந்து

$= (a^k . a^1)(b^k . b^1) = a^{k+1} . b^{k+1}$

இவ்வாறு, $P(k)$ மெய்யெனில் $P(k+1)$ மெய். எனவே, கணிதத்தூண்டலின்படி $P(n)$ அனைத்து $n \in N$க்கும் உண்மை.

பயிற்சி 4.1

அனைத்து $n \in N$க்கும் கணிததூண்டலின் கொள்கையை பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றை நிறுவுக:

1
$$1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{(3^n - 1)}{2}$$

2
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

3
$$1 + \frac{1}{(1+2)} + \frac{1}{(1+2+3)} + \cdots + \frac{1}{(1+2+3+\cdots+n)} = \frac{2n}{(n+1)}$$

4
$$1.2.3 + 2.3.4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

5
$$1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \cdots + n.3^n = \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{4}$$

6
$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + n.(n+1) = \left[\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right]$$

7
$$1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3}$$

8
$$1.2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \cdots + n.2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

9
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

10
$$\frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \cdots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{(6n+4)}$$

11
$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2..3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

12
$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

13
$$\left(1 + \frac{3}{1}\right)\left(1 + \frac{5}{4}\right)\left(1 + \frac{7}{9}\right) \ldots \left(1 + \frac{(2n+1)}{n^2}\right) = (n+1)^2$$

14
$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = (n+1)$$

15
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

16
$$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\ \dots\ +\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{(3n+1)}$$

17
$$\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+\ \dots\ +\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n}{3(2n+3)}$$

18 $1\ +\ 2\ +\ 3\ +\cdots+n\ <\ \frac{1}{8}(2n+1)^2$

19 $n(n+1)(n+5)$இன் மதிப்பு 3இன் மடங்கு.

20 $10^{2n-1}+1$என்பது 11இன் மடங்கு.

21 $x^{2n}-\ y^{2n}$இன் மதிப்பு $(x+y)$இன் மடங்கு

22 $3^{2n+2}-8n\ -9$இன் மதிப்பு 8இன் மடங்கு

23 $41^n-\ 14^n$ என்பது 27இன் மடங்கு.

24 $(2n\ +\ 7)\ <\ (n\ +\ 3)^2$

சுருக்கவுரை

கணிதச்சிந்தனைக்கான ஒரு முக்கிய அடிப்படை தருவித்தல். இந்த தருவித்தலுக்கு மா**றான** தூண்டலில், ஒவ்வொரு நிகழ்வையும் தனித்தனியாக கவனித்து ஒரு உய்மானத்தை உருவாக்குகிறோம். எனவே, எளிமையான மொழியில் 'தூண்டல்' என்பது குறிப்பிட்ட வேற்றுவங்களிலிருந்தோ உண்மைகளிலிருந்தோ பொதுவமாக்கல் என்று கூறலாம்.

கணிதத்தூண்டல் எனும் கொள்கையை பலவிதமான கணிதக்கூற்றுகளை நிறுவும் கருவியாக பயன்படுத்தலாம். அத்தகைய ஒவ்வொரு கூற்றையும் n என்ற ஒரு நேர்ம முழுவண்ணுடன் தொடர்புறுத்தி $P(n)$ எனலாம். $n=1$ என்ற வேற்றுவத்துக்கு இதை சரிபார்க்கிறோம். ஏதோவொரு k என்ற நேர்ம முழுவெண்ணுக்கு $P(k)$ மெய் என்று எடுத்து, அதனால் $P(k+1)$ மெய் என்று காட்டுகிறோம்.

வரலாற்றுக்குறிப்பு

மற்ற கருத்துகளையோ முறைகளையோ போலல்லாமல், கணிதத்தூண்டலை ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் ஒரு குறிப்பிட்டவர் கண்டுபிடிக்கவில்லை. கணிதத்தூண்டல் எனும் கொள்கையை பித்தகோரியர்கள் அறிந்திருந்தனர் என்று கூறப்படுகிறது.

பிரான்சியக்கணிதரான பிளேயிசு பாசுக்கல் கணிதத்தூண்டலை தொடங்கிவைத்தார். தூண்டல் என்ற பெயரை ஆங்கிலக்கணிதரான இயோவான் வாலிசு முதலில் பயன்படுத்தினார். பின்னர் ஈரடுக்குத்தேற்றத்தை நிறுவ இந்த கொள்கை பயன்பட்டது.

தி மார்கன் கணிதத்துறையின் பல்வேறு தலைப்புகளிலும் பல சாதனைகளை புரிந்தார். "கணிதத்தூண்டல்" என்ற பெயரை வரையறுத்து முதலில் பெயரிட்டவர் இவரே. இவர் ஒரு கணிதத்தொடரின் குவிபோகுமையை தீர்மானிக்க தி மார்கனின் விதியை வளராக்கினார்.

சூ. பியானோ வெளிப்படையாக உரைத்த எடுகோள்களின் தொகுப்பிலிருந்து இயலெண்களின் பண்புகளை கண்டறியும் பணியை மேற்கொண்டார். இப்போது இந்த எடுகோள்களை பியானோவின் அடிக்கோள்கள் என்று அழைக்கிறோம். கணிதத்தூண்டலின் கொள்கை பியானோவின் ஒரு அடிக்கோளின் மீட்கூற்று.