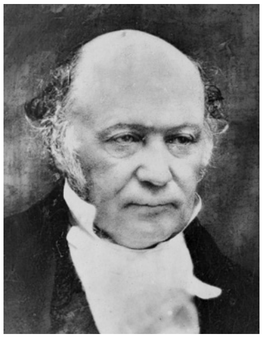
# படலம் 5

# கலப்பெண்களும் ஈரடுக்குச்சமன்பாடுகளும்

கணிதம் அறிவியல்களின் அரசி; எண்கணக்கு கணிதத்தின் அரசி – கவுசு

## 5.1 அறிமுகம்



வி. உ ரோ. ஆமிற்றன் (1805-1865)

முந்தைய வகுப்புகளில் ஒற்றைமாறியிலும் இரண்டு மாறிகளிலும் நேரியச்சமன் பாடுகளையும் ஒற்றைமாறியில் ஈரடுக்குச்சமன்பாட்டையும் படித்திருக்கிறோம். $x^2 + +1 = 0$ என்ற சமன் பாடு $x^2 = -1$ என்று தருவதாலும் எந்த மெய்யெண்ணின் வர்க்கமும் நேர்மமாவதாலும் இந்த சமன்பாட்டுக்கு மெய்யெண்ணான தீர்வு இல்லை என்று அறிந்தோம். ஆனால், $x^2 = -1$ என்பதற்கு பொருளிருக்கும்படி மெய்யெண்கணத்தை ஒரு விரிவான அமைப்புக்கு நீட்டலாம். உண்மையில் நம் குறிக்கோள் $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை $D = b^2 - 4ac < 0$ என்றிருக்கும்போது காண்பது. இது மெய்யெண்களின் அமைப்பில் சாத்தியமன்று.

## 5.2 கலப்பெண்கள்

$\sqrt{-1}$ஐ $i$ என்று குறியிடுவோம். அப்படியெனில், $i^2 = -1$ என்றும் $x^2 + 1 = 0$ என்பதன் தீர்வு $i$ என்றும் ஆகின்றன.

$a$யும் $b$யும் மெய்யெண்களாயிருக்கும்போது $a + ib$ என்ற வடிவான ஒரு எண்ணை கலப்பெண் என்று வரையறுக்கிறோம். சான்றாக, $2 + i3$, $(-1) + i\sqrt{3}$, $4 + i\left(-{}^{1}/_{11}\right)$ ஆகியவை கலப்பெண்கள். $a + i(-b)$ என்பதை சுருக்கமாக $a - ib$ என்றும் எழுதலாம்.

$z = a + ib$ என்ற கலப்பெண்ணில் $a$ மெய்ப்பகுதி என்றும் $b$ கற்பனைப்பகுதி என்றும் சொல்கிறோம். அவற்றை முறையே மெ $z$ என்றும் க $z$ என்றும் குறிக்கிறோம். சான்றாக, $z = 2 + i5$ எனில், மெ $z = 2$, க $z = 5$.

இரண்டு கலப்பெண்களின் மெய்ப்பகுதிகள் சமமாகவும் கற்பனைப்பகுதிகள் சமமாகவும் இருந்தால் அந்த இரண்டு எண்களும் சமம் என்கிறோம். அதாவது $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ ஆகிய இரண்டும் சமம் எனில், $a = c, b = d$.

சான்று 1 $4x + i(3x - y) = 3 + i(-6)$ எனில், $x, y$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை காண்க. இங்கு $x$உம் $y$உம் மெய்யெண்கள்.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் மெய்ப் பகுதிகளையும் கற்பனைப்பகுதிகளையும் தனித்தனியே சமமாக்கி

$$4x = 3, \qquad 3x - y = -6$$

என்ற சமன்பாட்டமைப்பை பெறுகிறோம். இதை தீர்த்து

$$x = \frac{3}{4}, \qquad y = \frac{33}{4}$$

என்று காண்கிறோம்.

## 5.3 கலப்பெண்களின் குறிக்கணிதம்

இந்தப்பகுதியில் கலப்பெண்களின் கூட்டல், பெருக்கல் போன்ற செயலங்களின் பண்புகளை காண்போம்.

### 5.3.1 இரண்டு கலப்பெண்களின் கூட்டல்

$z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ ஆகியவை இரண்டு கலப்பெண்கள் என்க. இவற்றின் $z_1 + z_2$ என்ற கூட்டுத்தொகையை

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$$

என்று வரையறுக்கிறோம். இதுவும் ஒரு கலப்பெண். சான்றாக, $(2 + i3) + (-6 + i5) = (2 - 6) + i(3 + 5) = -4 + i8$

கலப்பெண்களின் கூட்டல் கீழ்க்காணும் பண்புகளை நிறைவேற்றுகின்றன.

(அ) *அடைப்புவிதி* இரண்டு கலப்பெண்களின் கூட்டுத்தொகை ஒரு கலப்பெண். அதாவது, $z_1$, $z_2$ என்ற எந்த இரண்டு கலப்பெண்களுக்கும் $z_1 + z_2$ ஒரு கலப்பெண்.

(ஆ) *முறைமைமாற்றுவிதி* , $z_1$, $z_2$ என்ற எந்த இரண்டு கலப்பெண்களுக்கும் $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

(இ) *சேர்க்கைவிதி* $z_1, z_2, z_3$ என்ற எந்த மூன்று கலப்பெண்களுக்கும் $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

(ஈ) *கூட்டலின் முற்றொருமை.* $z$ என்ற எந்த கலப்பெண்ணுக்கும் $z + 0 = z$ என்றவாறு நாம் சுழியக்கலப்பெண் என்றழைத்து $0$ என்று குறிக்கும் $0 + i0$ என்ற ஒரு கலப்பெண் இருக்கிறது. இதை கூட்டலின் முற்றொருமை என்றும் அழைக்கிறோம்.

(உ) *கூட்டற்புரட்டு* $z = a + ib$ என்ற எந்த கலப்பெண்ணுக்கும் $z + (-z) = 0$ என்றவாறு நாம் $z$இன் எதிர்மம் என்றழைத்து $-z$ என்று குறிக்கும் $-a + i(-b)$ என்ற ஒரு கலப்பெண் இருக்கிறது. இதை $z$யின் கூட்டற்புரட்டு என்றும் அழைக்கிறோம்.

### 5.3.2 இரண்டு கலப்பெண்களின் வேறுபாடு (கழித்தல்)

$z_1$, $z_2$ என்ற எந்த இரண்டு கலப்பெண்களிடையும் $z_1 - z_2$ என்ற வேறுபாட்டை

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

என்று வரையறுக்கிறோம். சான்றாக,

$$(6 + 3i) - (2 - i) = (6 + 3i) + (-2 + i) = 4 + 4i$$

$$\begin{aligned}(2 - i) - (6 + 3i) &= (2 - i) + (-6 - 3i)\\ &= -4 - 4i\end{aligned}$$

### 5.3.3 இரண்டு கலப்பெண்களின் பெருக்கல்

$z_1 = a + ib,\ z_2 = c + id$ ஆகியவை இரண்டு கலப்பெண்கள் என்க. இவற்றை வழக்கமான வழியில் பெருக்கினால்

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= (a + ib)(c + id)\\ &= ac + a(id) + (ib)c + (ib)(id)\\ &= ac + iad + ibc - bd\\ &= (ac - bd) + i(ad + bc)\end{aligned}$$

என்று பெறுகிறோம். எனவே, $z_1 z_2$ என்ற பெருக்கலை

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

என்று வரையறுக்கிறோம். சான்றாக

$$\begin{aligned}(3 + i5)(2 + i6) &= (3 \times 2 - 5 \times 6)\\ &\quad + i(3 \times 6 + 5 \times 2) = -24 + i28\end{aligned}$$

கலப்பெண்பெருக்கலின் பண்புகளை நிறுவலின்றி கீழ் உரைக்கிறோம். (எனினும் நீங்கள் இவற்றை சரிபார்க்கலாம்).

(அ) அடைப்புவிதி இரண்டு கலப்பெண்களின் பெருக்குத்தொகை ஒரு கலப்பெண். அதாவது, $z_1, z_2$ என்ற எந்த இரண்டு கலப்பெண்களுக்கும் $z_1 z_2$ ஒரு கலப்பெண்.

(ஆ) முறைமைமாற்றுவிதி $z_1$, $z_2$ என்ற எந்த இரண்டு கலப்பெண்களுக்கும் $z_1 z_2 = z_2 z_1$

(இ) சேர்க்கைவிதி $z_1, z_2\ z_3$ என்ற எந்த மூன்று கலப்பெண்களுக்கும் $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$.

(ஈ) பெருக்கலின் முற்றொருமை $z$ என்ற எந்த கலப்பெண்ணுக்கும் $z.1 = z$ என்றவாறு நாம் ஒன்று என்றழைத்து $1$ என்று குறிக்கும் $1 + i0$ என்ற ஒரு கலப்பெண் இருக்கிறது. இதை பெருக்கலின் முற்றொருமை என்றும் அழைக்கிறோம்.

(உ) பெருக்கற்புரட்டு $z = a + ib\ (a \neq 0, b \neq 0)$ என்ற எந்த சுழியமற்ற கலப்பெண்ணுக்கும் $z.z^{-1} = 1$ என்றவாறு நாம் $z$இன் பெருக்கற்புரட்டு என்றழைத்து $z^{-1}$ என்று குறிக்கும் ஒரு கலப்பெண் இருக்கிறது. $z^{-1}$ஐ $1/z$ என்றும் குறிக்கிறோம். இதன் மதிப்பு

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2}$$

என்பதை வரையறையிலிருந்து நீங்கள் சரிபார்க்கலாம்.

(ஊ) பரவுமவிதி $z_1$, $z_2\ z_3$ என்ற எந்த மூன்று கலப்பெண்களுக்கும்

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$$

### 5.3.4 இரண்டு கலப்பெண்களின் வகுத்தல்

$z_1, z_2$ என்ற எந்த இரண்டு கலப்பெண்களுக்கும் $(z_2 \neq 0)$, $z_1/z_2$ என்ற ஈவை

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1.\frac{1}{z_2}$$

என்று வரையறுக்கிறோம். சான்றாக, $z_1 = 6 + 3i$, $z_2 = 2 - i$ எனில்,

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \left((6 + 3i) \times \frac{1}{2 - i}\right)\\ &= (6 + 3i)\left(\frac{2}{2^2 + (-1)^2} + i\frac{-(-1)}{2^2 + (-1)^2}\right)\\ &= (6 + 3i)\left(\frac{2 + i}{5}\right)\\ &= \frac{1}{5}\big(12 - 3 + i(6 + 6)\big)\\ &= \frac{1}{5}(9 + 12i)\end{aligned}$$

### 5.3.5 ***i*இன் அடுக்குகள்**

$i^2 = -1$ என்று வரையறுத்தோம். அப்படியெனில், $i^3 = i^2 i = (-1)i = -i,\ i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1,\ i^5 = (i^2)^2 i = (-1)^2 i = i,\ i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1$, என்றிவ்வாறே. மேலும்,

$$i^{-1} = \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{1} = i$$

$$i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1$$

பொதுவாக, $k$ என்ற எந்த முழுவெண்ணுக்கும்

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i$$

### 5.3.6 எதிர்ம மெய்யெண்ணின் வர்க்கமூலம்

$i^2 = -1$ என்பதால் $(-i)^2 = i^2 = -1$. எனவே $i$உம் $-i$உம் $-1$இன் வர்க்கமூலங்கள். ஆனால் $\sqrt{-1}$ என்ற குறியீட்டால் $i$ஐ மட்டுமே குறிக்கிறோம்.

இப்போது, $i$உம் $-i$ உம் $x^2 + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் தீர்வுகள் என்று காண்கிறோம். இதைப்போல்

$$\left(\sqrt{3}i\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 i^2 = 3(-1) = -3$$

$$\left(-\sqrt{3}i\right)^2 = \left(-\sqrt{3}\right)^2 i^2 = -3$$

எனவே, $-3$இன் வர்க்கமூலங்கள் $\sqrt{3}i$யும் $-\sqrt{3}i$யும். இங்கும் $\sqrt{-3}$ என்ற குறியீடு $\sqrt{3}i$யை மட்டுமே குறிக்கிறது என்பதை நினைவுகொள்வோம். அதாவது $\sqrt{-3} = \sqrt{3}i$.

பொதுவாக, $a$ ஒரு நேர்ம மெய்யெண் எனில், $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1} = \sqrt{a}\, i$.

$a, b$ என்ற எந்த நேர்ம மெய்யெண்களுக்கும் $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ என்பதை நாமறிவோம். இந்த விளைவு $a > 0, b < 0$ என்றபோதும் $a < 0, b > 0$ என்றபோதும் சரியாகிறது. ஆனால், $a < 0, b < 0$ என்றிருக்கும்போது என்னாகிறது? பார்ப்போம்.

எல்லா மெய்யெண்களுக்கும் $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ என்ற எடுகோளிலிருந்து

$$i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

என்பதை பெறுகிறோம். இது $i^2 = -1$ என்பதுடன் முரண்படுகிறது. எனவே நம் எடுகோள் தவறானது. அதாவது $a, b$ ஆகிய இரண்டுமே எதிர்மமாயிருக்கும்போது $\sqrt{a}\sqrt{b} \neq \sqrt{ab}$. மேலும், $a$யோ $b$யோ சுழியமாகும்போது $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab} = 0$ என்பது சரியாகிறது.

### 5.3.7 முற்றொருமைகள்

கீழ்க்காணும் முற்றொருமையை நிறுவுவோம். $z_1, z_2$ என்ற எந்த கலப்பெண்களுக்கும்

$$(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2$$

நிறுவல்

$(z_1 + z_2)^2 = (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)$

$= (z_1 + z_2)z_1 + (z_1 + z_2)z_2$ பரவுமவிதி

$= z_1z_1 + z_2z_1 + z_1z_2 + z_2z_2$ பரவுமவிதி

$= z_1^2 + z_1z_2 + z_1z_2 + z_2^2$

பெருக்கலின் முறைமைமாறல்

$= z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2$

இதைப்போலவே கீழ்க்காணும் முற்றொருமைகளையும் நிறுவலாம்

(அ) $(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2$

(ஆ) $(z_1 + z_2)^3 = z_1^3 + 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 + z_2^3$

(இ) $(z_1 - z_2)^3 = z_1^3 - 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 - z_2^3$

(ஈ) $z_1^2 - z_2^2 = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)$

உண்மையில், மெய்யெண்களுக்கு மெய்யாகும் பல முற்றொருமைகளும் எல்லா கலப்பெண்களுக்கும் மெய்யாவதை நிறுவலாம்.

சான்று 2 கீழ்க்கண்டவற்றை $a + ib$ என்ற வடிவில் எழுதுக.

(அ) $(-5i)\left(\frac{1}{8}i\right)$ (ஆ) $(-i)(2i)\left(\frac{1}{8}i\right)^3$

தீர்வு

(அ) $(5i)\left(\frac{1}{8}i\right) = \frac{-5}{8}i^2 = \frac{-5}{8}(-1) = \frac{5}{8}$

$= \frac{5}{8} + i0$

(ஆ) $(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3$

$= 2 \times \frac{1}{8 \times 8 \times 8} \times i^5$

$= \frac{1}{256}(i^2)^2 i = \frac{1}{256}i$

$= 0 + \frac{1}{256}i$

சான்று 3 $(5 - 3i)^3$ஐ $a + ib$வடிவில் எழுதுக.

தீர்வு

$(5 - 3i)^3 = 5^3 - 3 \times 5^2 \times (3i) + 3 \times 5(3i)^2 - (3i)^3 = 125 - 225i - 135 + 27i = -10 - 198i$

சான்று 4 $(-\sqrt{3} + \sqrt{-2})(2\sqrt{3} - i)$ஐ $a + bi$வடிவில் எழுதுக.

தீர்வு

$(-\sqrt{3} + \sqrt{-2})(2\sqrt{3} - i)$

$= \left(-\sqrt{3} + \sqrt{2}i\right)\left(2\sqrt{3} - i\right)$

$= -6 + \sqrt{3}i + 2\sqrt{6}i - \sqrt{2}i^2$

$= \left(-6 + \sqrt{2}\right) + \sqrt{3}\left(1 + 2\sqrt{2}\right)i$

## 5.4 கலப்பெண்ணின் மட்டுமதிப்பும் கலப்பிணைவமும்

$z = a + ib$ என்ற கலப்பெண்ணின் மட்டுமதிப்பை $\sqrt{a^2 + b^2}$ என்ற எதிர்மமற்ற மெய்யெண்ணாக வரையறுத்து அதை $|z|$ என்று குறிக்கிறோம். கலப்பெண்ணின் கலப்பிணைவத்தை $a - ib$ என்ற கலப்பெண்ணாக வரையறுத்து அதை $\overline{z}$ என்று குறிக்கிறோம். அதாவது

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \ \overline{z} = a - ib$

சான்றாக, $|3 + i| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$|2 - 5i| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$.

$$\overline{3 + i} = 3 - i, \quad \overline{2 - 5i} = 2 + 5i, \quad \overline{-3i - 5} = 3i - 5$$

சுழியமற்ற கலப்பெண்ணின் பெருக்கற்புரட்டை

$$z^{-1} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

என்று எழுதலாம் என்பதை நோக்குக. அதாவது

$$z\bar{z} = |z|^2$$

மேலும், கீழ்க்காணும் விளைவுகளையும் வருவிக்கலாம். $z_1$, $z_2$ என்ற எந்த இரண்டு கலப்பெண்களுக்கும்

(அ) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(ஆ) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $|z_2| \neq 0$ எனில்

(இ) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(ஈ) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

(உ) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$ எனில்

சான்று 5 $2-3i$இன் பெருக்கற்புரட்டை காண்க.

தீர்வு $z = 2-3i$ என்க. அப்படியெனில் $\bar{z} = 2+3i$, $|z|^2 = 2^2 + (-3)^2 = 13.$ எனவே, $z$யின் புரட்டு

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

இதை கீழ்க்காணுமாறும் கணக்கிடலாம்.

$$z^{-1} = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{2^2-(3i)^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

சான்று 6 கீழ்க்காண்பவற்றை $a+ib$வடிவில் எழுதுக.

(அ) $\frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}$ (ஆ) $i^{-35}$

தீர்வு

(அ) $$\frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} = \frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} \times \frac{1+\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i} = \frac{\left(5+5\sqrt{2}i+\sqrt{2}i-2\right)}{1-\left(\sqrt{2}i\right)^2} = \frac{3+6\sqrt{2}i}{1+2} = \frac{3\left(1+2\sqrt{2}i\right)}{3} = \left(1+2\sqrt{2}i\right)$$

(ஆ) $$i^{-35} = \frac{1}{i^{35}} = \frac{1}{(i^2)^{17}i} = \frac{1}{-i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{-i^2} = i$$

## பயிற்சி 5.1

1இலிருந்து 10வரையான பயிற்சிகளிலுள்ள ஒவ்வொரு கலப்பெண்ணையும் $a+ib$வடிவில் எழுதுக.

1 $$(5i)\left(-\frac{3}{5}i\right)$$

2 $i^9 + i^{19}$

3 $i^{-39}$

4 $3(7+i7) + i(7+i7)$

5 $(1-i) - (-1+i6)$

6 $$\left(\frac{1}{5}+i\frac{2}{5}\right) - \left(4+i\frac{5}{2}\right)$$

7 $$\left(\left(\frac{1}{3}+i\frac{7}{3}\right) + \left(4+i\frac{1}{3}\right)\right) - \left(-\frac{4}{3}+i\right)$$

8 $(1-i)^4$

9 $$\left(\frac{1}{3}+3i\right)^3$$

10 $$\left(-2-\frac{1}{3}i\right)^3$$

11முதல் 13வரையான பயிற்சிகளிலுள்ள ஒவ்வொரு கலப்பெண்ணின் பெருக்கற்புரட்டையும் காண்க.

11 $4-3i$

12 $\sqrt{5}+3i$

13 $-i$

14 கீழ்க்காணும் கோவையை $a+ib$வடிவில் எழுதுக.

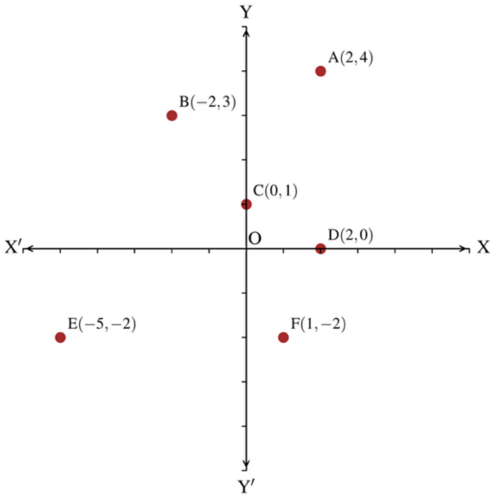
$$\frac{(3+i\sqrt{5})(3-i\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i) - (\sqrt{3}-i\sqrt{2})}$$

## 5.5 ஆர்கண்டுத்தளமும் முனையக்குறிப்பீடும்

மெய்யெண்களின் $(x,y)$ என்ற ஒவ்வொரு முறைமைச்சோடிக்கும் நிகராக $XY$தளத்தில் ஒரு புள்ளியை பெறுவதையும் திருப்பியவாறையும் நாம் ஏற்கனவே அறிவோம். இதற்காக, $x$அச்சு, $y$அச்சு எனப்படும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான நோக்கீட்டச்சுகளை பயன்படுத்துவதையும் அறிவோம். $x+iy$ என்ற கலப்பெண் $(x,y)$ என்ற முறைமைச்சோடிக்கு நிகராவதால், அதை $XY$தளத்தில் $P(x,y)$ என்ற ஒரு ஒருத்துவமான வடிவியற்புள்ளியாக குறிப்பிடலாம்; திருப்பிய வாறும்.

சில கலப்பெண்களை வடிவியற்புள்ளிகளாக படம் 5.1 காட்டுகிறது. இங்கு $2+4i, -2+3i, 0+1i,$ $2+0i,$ $-5-2i,$ $1-2i$ ஆகிய கலப்பெண்கள் முறையே $(2,4)$, $(-2,3)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(-5,-2)$,

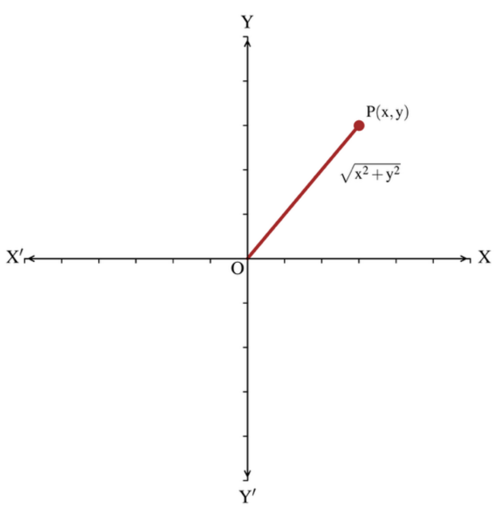
$(1,-2)$ ஆகிய முறைமைச்சோடிகளுக்கு நிகராகின்றன; இவற்றை படம் முறையே $A, B, C, D, E$ ஆகிய புள்ளிகளாக காட்டுகிறது.




படம் 5.1

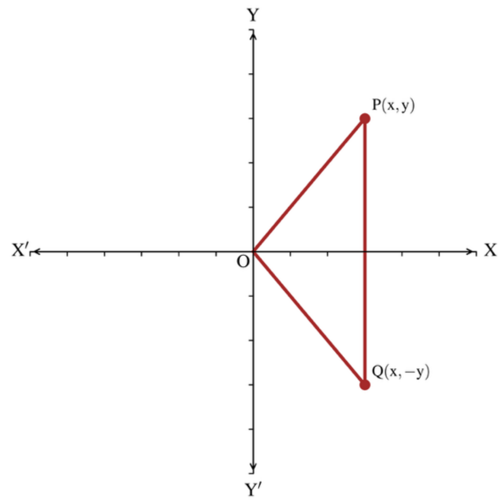
ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் ஒரு கலப்பெண் ஒப்படைக்கப்பட்ட தளத்தை *ஆர்கண்டின் தளம்* என்கிறோம்.

ஆர்கண்டுத்தளத்தில் $x+iy$ என்ற கலப்பெண்ணின் மட்டுமதிப்பான $\sqrt{x^2+y^2}$ மூலத்திலிருந்து $P(x,y)$ என்ற புள்ளியின் தொலைவை குறிப்பது தெளிவு (படம் 5.2). $x$அச்சிலுள்ள புள்ளிகள் $a+i0$வடிவான கலப்பெண்களுக்கும், $y$அச்சிலுள்ள புள்ளிகள் $0+ib$வடிவான கலப்பெண்களுக்கும் நிகரானவை. இதனால் ஆர்கண்டுத்தளத்தின் $x$அச்சை மெய்யச்சு எனவும் $y$அச்சை கற்பனையச்சு எனவும் சொல்கிறோம்.




படம் 5.2

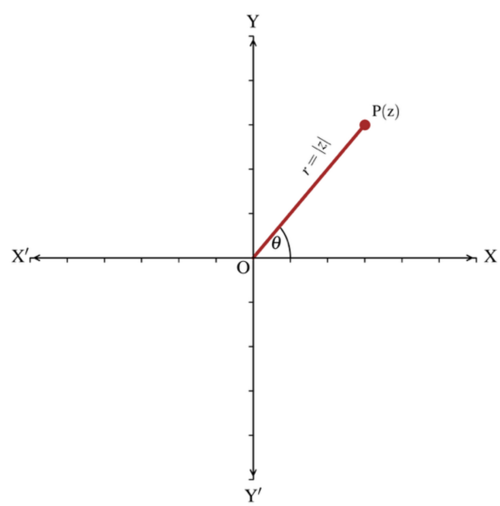
$z=x+iy$ என்ற கலப்பெண்ணையும் அதன் கலப்பிணைவமான $x-iy$ஐயும் ஆர்கண்டுத் தளத்தில் முறையே $P(x,y)$ , $Q(x,-y)$ என்ற புள்ளிகள் குறிக்கின்றன. வடிவியலின்படி, $(x,-y)$ என்ற புள்ளி மெய்யச்சில் $(x,y)$இன் ஆடிநிழலுரு; அதாவது மெய்யச்சில் எதிரொளிப்பு (படம் 5.3).




படம் 5.3

### 5.5.1 கலப்பெண்ணின் முனையக்குறிப்பீடு

$P$ என்ற புள்ளி $x+iy$ என்ற ஒரு சுழியமற்ற கலப்பெண்ணை குறிப்பதாக கொள்க. $OP$ என்ற திசையக்கோட்டுத்துண்டு $r$ நீளமானதும் $x$அச்சுடன் $\theta$ என்ற கோணத்தை உண்டாக்குவதும் என்க (படம் 5.4).



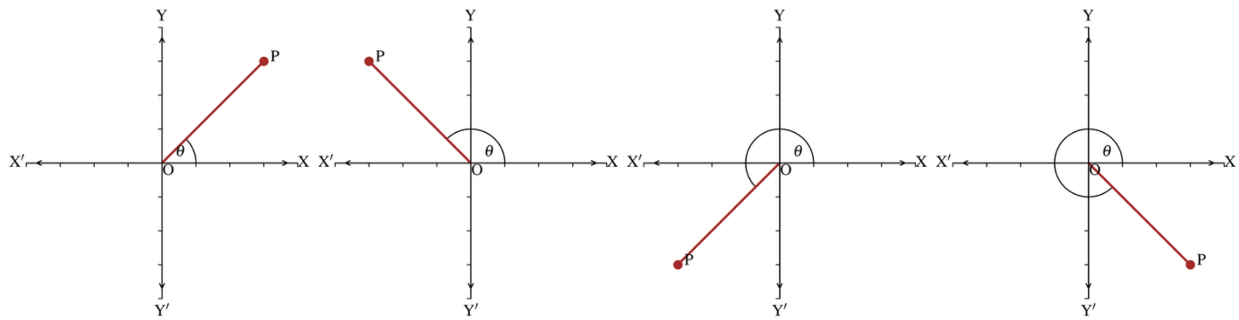

படம் 5.4

$P$ என்ற புள்ளியை $(r, \theta)$ என்ற மெய்யெண்களின் முறைமைச்சோடி ஒருத்துவமாக தீர்மானிக்கிறது என்பதை நோக்குக. இந்த மெய்யெண்களை $P$ என்ற புள்ளியின் முனையவொருங்களவுகள் என்கிறோம். மூலத்தை முனையமாகவும் $x$ அச்சின் நேர்மத்திசையை தொடக்கக்கோடாகவும் கருதுகிறோம்.

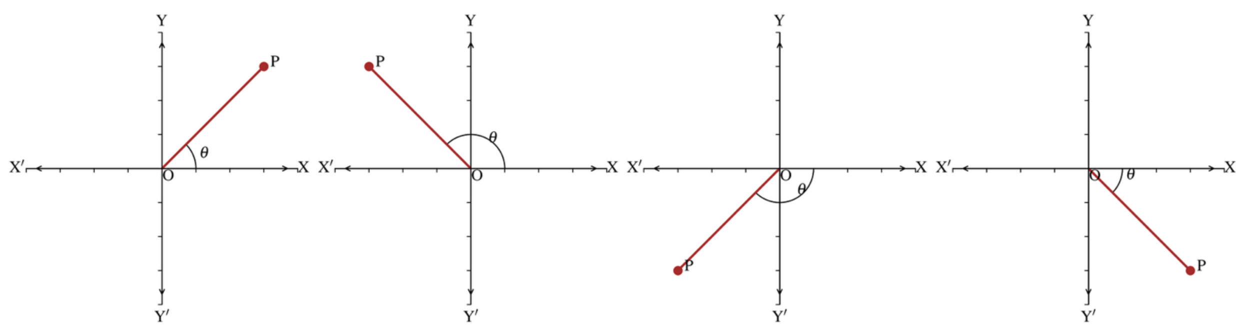
இந்த ஒருங்களவுகளில் $x = r\,\text{உவவி}\,\theta,\ \ y = r\,\text{வவி}\,\theta$; எனவே, $z = r\,(\text{உவவி}\,\theta + i\,\text{வவி}\,\theta)$. இது $z$ என்ற கலப்பெண்ணின் முனையவடிவம். இங்கு $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ மட்டுமதிப்பு என்பது தெளிவு.

$\theta$வை $z$யின் கோணம் என்கிறோம். இதை $\angle z$ என்று குறிக்கிறோம்.

எந்தவொரு $z \neq 0$ என்ற கலப்பெண்ணுக்கும், $0 \leq \theta < 2\pi$ என்ற இடைவெளியில் $\theta$வின் ஒரே ஒரு மதிப்பு நிகராகிறது. ஆனால், $2\pi$ நீளமுள்ள வேறெந்த இடைவெளியை எடுத்தாலும், சான்றாக $-\pi < \theta \leq \pi,$ இந்தக்கூற்று சரியாகும். வேறுவிதமாக சொல்லாவிட்டால், நாம் $\theta$வை $-\pi < \theta \leq \pi$ என்றிருக்குமாறு எடுப்போம். $\theta$வின் இந்த மதிப்பை முதன்மைக்கோணம் என்கிறோம் (படம் 5.5, படம் 5.6).



படம் 5.5 $(0 \leq \theta <\backslash 2\pi)$



படம் 5.6 $(-\pi < \theta < -\pi)$

சான்று 7 $z = 1 + i\sqrt{3}$ என்ற கலப்பெண்ணை முனையவடிவில் குறிப்பிடுக.

தீர்வு $1 = r\,\text{உவவி}\,\theta,\quad \sqrt{3} = r\,\text{வவி}\,\theta$ என்க. வர்க்கமாக்கி கூட்டி

$$r^2\left(\text{உவவி}^2\,\theta + \text{வவி}^2\,\theta\right) = 4$$

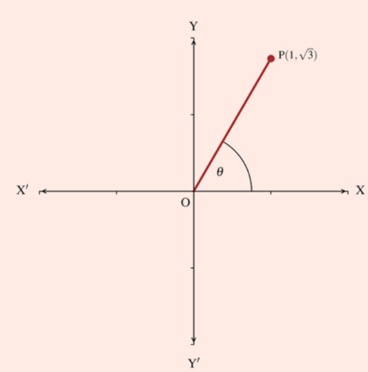
என்று பெறுகிறோம். அதாவது

$$r = \sqrt{4} = 2\ (r > 0\ \text{வழக்கேற்பு})$$

எனவே,

$$\text{உவவி}\,\theta = \frac{1}{2}, \qquad \text{வவி}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{இது}\ \theta = \frac{\pi}{3}\ \text{என்று தருகிறது.}$$



படம் 5.7

எனவே, தேவையான முனையவடிவம்

$$z = 2\left(\text{உவவி}\frac{\pi}{3} + i\ \text{வவி}\frac{\pi}{3}\right)$$

$z = 1 + i\sqrt{3}$ என்ற கலப்பெண்ணை படம் 5.7இல் காட்டியபடி குறிப்பிடுகிறோம்.

சான்று 8

$$\frac{-16}{1 + i\sqrt{3}}$$

என்ற கலப்பெண்ணை முனையவடிவுக்கு மாற்றுக.

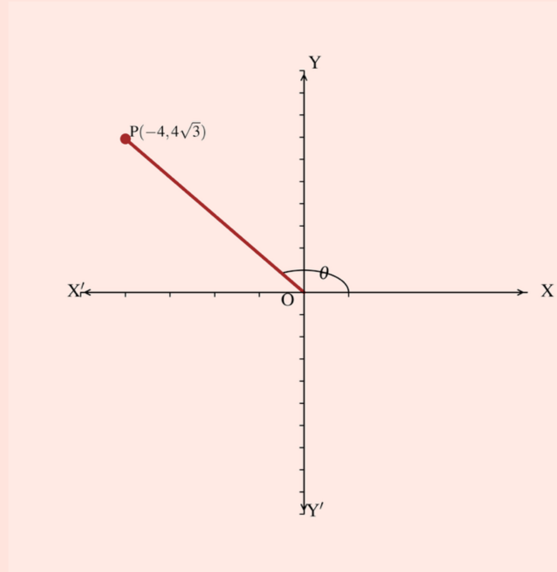
தீர்வு முதலில் $a + ib$வடிவில் எழுதிக்கொள்வோம். பிறகு முனையவடிவுக்கு மாற்றலாம் (படம் 5.8).

$$\frac{-16}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{-16}{1 + i\sqrt{3}} \times \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{-16(1 - i\sqrt{3})}{1 - \left(i\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \frac{-16(1 - i\sqrt{3})}{1 + 3} = -4\left(1 - i\sqrt{3}\right) = -4 + i4\sqrt{3}$$

எனவே, தேவையான முனையவடிவம்

$$8\left(\text{உவவி}\frac{2\pi}{3} + i\ \text{வவி}\frac{2\pi}{3}\right)$$




படம் 5.8

## பயிற்சி 5.2

ஒவ்வொரு கலப்பெண்ணுக்கும் மட்டுமதிப்பையும் கோணத்தையும் காண்க.

1 $z = -1 - i\sqrt{3}$

2 $z = -\sqrt{3} + i$

ஒவ்வொரு கலப்பெண்ணையும் முனையவடிவுக்கு மாற்றுக.

3 $1 - i$

4 $-1 + i$

5 $-1 - i$

6 $-3$

7 $\sqrt{3} + i$

8 $i$

## 5.6 ஈரடுக்குச்சமன்பாடு

ஈரடுக்குச்சமன்பாடுகளை நாம் ஏற்கனவே அறிவோம். வேற்றுமைகாட்டி எதிர்மமாயில்லாத போது $(\geq 0)$ அவற்றை மெய்யெண்கணத்தில் தீர்த்திருக்கிறோம்.

இப்போது $a, b, c$ ஆகியவை மெய்யெண்களாக வுள்ள

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0$$

என்ற ஈரடுக்குச்சமன்பாட்டை கருதுக. $b^2 - 4ac < 0$ என்றும் கொள்வோம். எதிர்மமெய்யெண்களின் வர்க்கமூலத்தை கலப்பெண்கணத்தில் காணலாம் என்பதை இப்போது நாம் அறிவதால், இந்த சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் கீழ்க்கண்ட கலப்பெண்களாக கிடைக்கின்றன.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

இப்போது, ஒரு சமன்பாட்டுக்கு எத்தனை தீர்வுகள் இருக்கலாம் என்ற கேள்வியில் நீங்கள் ஆர்வமடையலாம். இந்த சூழமைவில் முக்கியமானதும் குறிக்கணிதத்தில் அடிப்படையானதுமான கீழ்க்காணும் தேற்றத்தை நிறுவலின்று உரைக்கிறோம்.

தேற்றம் $n$அடுக்குள்ள ஒரு பல்லுறுப்புச்சமன்பாட்டுக்கு $n$ தீர்வுகள் உள்ளன.

சான்று 9 $x^2 + 2 = 0$ஐ தீர்க்க.

தீர்வு

$$x^2 = -2, \qquad \text{அதாவது } x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}i$$

சான்று 10 $x^2 + x + 1 = 0$ஐ தீர்க்க.

தீர்வு இங்கு $b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$. எனவே

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

சான்று 11 $\sqrt{5}x^2 + x + \sqrt{5} = 0$ஐ தீர்க்க.

தீர்வு இங்கு, சமன்பாட்டில் வேற்றுமைகாட்டி $1^2 - 4 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 1 - 20 = -19.$ எனவே தீர்வுகள்

$$\frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2\sqrt{5}} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}i}{2\sqrt{5}}$$

## பயிற்சி 5.3

கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளை தீர்க்க.

1 $x^2+3=0$
2 $2x^2+x+1=0$
3 $x^2+3x+9=0$
4 $-x^2+x-2=0$
5 $x^2+3x+5=0$
6 $x^2-x+2=0$
7 $\sqrt{2}/\,x^2+x+\sqrt{2}=0$
8 $\sqrt{3}x^2-\sqrt{2}x+3\sqrt{3}=0$
9 $x^2+x+{}^{1}/_{\sqrt{2}}=0$
10 $x^2+{}^{x}/_{\sqrt{2}}+1=0$

## பலவகைச்சான்றுகள்

சான்று 12 கலப்பிணைவத்தை காண்க;

$$\frac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$$

தீர்வு

$$\frac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}=\frac{6+9i-4i+6}{2-i+4i+2}$$
$$=\frac{12+5i}{4+3i}\times\frac{4-3i}{4-3i}=\frac{48-36i+20i+15}{16+9}$$
$$=\frac{63-16i}{25}=\frac{63}{25}-\frac{16}{25}i$$

இதன் கலப்பிணைவம் $\frac{63}{25}+\frac{16}{25}i$

சான்று 13 கீழ்க்காண்பவற்றின் மட்டுமதிப்புகளையும் கோணங்களையும் காண்க.

(அ) $\frac{1+i}{1-i}$ (ஆ) $\frac{1}{1+i}$

தீர்வு

(அ) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{(1-1+2i)}{1+1}=i$

$r$ உவவி $\theta=0,\quad r$ வவி $\theta=1$

$r^2\big($உவவி$^2\,\theta+$வவி$^2\,\theta\big)=1$

$r^2=1,\quad r=1$

உவவி $\theta=0,$ வவி $\theta=1,\quad \theta=\frac{\pi}{2}$

எனவே, இந்த எண் துருவவடிவில் $(1,{}^{\pi}/_{2})$; அதாவது மட்டுமதிப்பு 1, கோணம் ${}^{\pi}/_{2}$.

(ஆ) $\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{1+1}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$

$r$ உவவி $\theta=\frac{1}{2},\quad r$ வவி $\theta=-\frac{1}{2}$

வழக்கமான முறையை பின்பற்றி

$r=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad$ உவவி $\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

வவி $\theta=\frac{-1}{\sqrt{2}},\quad \theta=\frac{-\pi}{4}$

என்று மட்டுமதிப்பையும் கோணத்தையும் பெறுகிறோம்.

சான்று 14

$$x+iy=\frac{a+ib}{a-ib}$$

எனில், $x^2+y^2=1$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$x+iy=\frac{a+ib}{a-ib}=\frac{(a+ib)(a+ib)}{(a-ib)(a+ib)}$$
$$=\frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i$$
$$x-iy=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\frac{2ab}{a^2+b^2}i$$

எனவே

$$x^2+y^2=\frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}$$
$$=\frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2}=1$$

சான்று 15

$$\frac{3+2i\text{ வவி }\theta}{1-2i\text{ வவி }\theta}$$

முற்றிலும் மெய்யாயிருக்கும்படி $\theta$வை காண்க.

தீர்வு

$$\frac{3+2i\text{ வவி }\theta}{1-2i\text{ வவி }\theta}=\frac{(3+2i\text{ வவி }\theta)(1+2i\text{ வவி }\theta)}{(1-2i\text{ வவி }\theta)(1+2i\text{ வவி }\theta)}$$
$$=\frac{3+6i\text{ வவி }\theta+2i\text{ வவி }\theta-4\text{ வவி}^2\,\theta}{1+4\text{ வவி}^2\,\theta}$$
$$=\frac{3-4\text{ வவி}^2\,\theta}{1+4\text{ வவி}^2\,\theta}+\frac{8i\text{ வவி }\theta}{1+4\text{ வவி}^2\,\theta}$$

இந்த எண் முற்றிலும் மெய்யெனில் அதன் கற்பனைப்பகுதி சுழியமாகவேண்டும். அதாவது

$$\frac{8\text{ வவி }\theta}{1+4\text{ வவி}^2\,\theta}=0$$

அதாவது வவி $\theta=0,\quad \theta=n\pi, n\in Z$

சான்று 16 கீழ்க்காணும் கலப்பெண்ணை முனையவடிவுக்கு மாற்றுக.

$$z=\frac{i-1}{\text{உவவி }\frac{\pi}{3}+i\text{ வவி }\frac{\pi}{3}}$$

தீர்வு

$$z=\frac{i-1}{\text{உவவி }\frac{\pi}{3}+i\text{ வவி }\frac{\pi}{3}}=\frac{i-1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$
$$=\frac{2(i-1)}{1+\sqrt{3}i}\times\frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{2\left(i+\sqrt{3}-1+\sqrt{3}i\right)}{1+3}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2} i$$
$$r \text{ உவவி } \theta = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \qquad r \text{ வவி } \theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$
$$r^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 = \frac{2\left(\left(\sqrt{3}\right)^2+1\right)}{4}$$

$$= \frac{2\times 4}{4} = 2;\ r = \sqrt{2},$$
$$\text{உவவி } \theta = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}};\ \text{வவி } \theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$
$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12} \text{ (எப்படி?)}$$
எனவே, முனையவடிவம்
$$\sqrt{2}\left(\text{உவவி } \frac{5\pi}{12} + i \text{ வவி } \frac{5\pi}{12}\right)$$

## ஐந்தாம் படலத்தின் பலவகையான பயிற்சிகள்

1 மதிப்பறிக:
$$\left(i^{18} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right)^3$$

2 $z_1,\ z_2$ என்ற எந்த இரண்டு கலப்பெண்களுக்கும் மெ $(z_1z_2) =$ மெ $z_1$ மெ $z_2 -$ க $z_1$ க $z_2$ என்று நிறுவுக.

3 செந்தரவடிவுக்கு குறைக்க:
$$\left(\frac{1}{1-4i} - \frac{2}{1+i}\right)\left(\frac{3-4i}{5+i}\right)$$

4
$$x - iy = \sqrt{\frac{a-ib}{c-id}} \text{ எனில், } (x^2+y^2)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} \text{ என்று நிறுவுக.}$$

5 கீழ்க்காண்பவற்றை முனையவடிவுக்கு மாற்றுக.
$$(\text{அ}) \frac{1+7i}{(2-i)^2} \qquad (\text{ஆ}) \frac{1+3i}{1-2i}$$

6இலிருந்து 9வரையான பயிற்சிகளில் ஒவ்வொரு சமன்பாட்டையும் தீர்க்க.

6
$$3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$$

7 $x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$

8 $27x^2 - 10x + 1 = 0$

9 $21x^2 - 28x + 10 = 0$

10
$$z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + i \text{ எனில், } \left|\frac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+1}\right| \text{ ஐ காண்க.}$$

11
$$a + ib = \frac{(x+i)^2}{2x^2+1} \text{ எனில், } a^2 + b^2 = \frac{(x^2+1)^2}{(2x^2+1)^2} \text{ என்று நிறுவுக.}$$

12 $z_1 = 2 - i, z_2 = -2 + i$ என்க.
$$(\text{அ}) \text{ மெ } \left(\frac{z_1z_2}{\overline{z_1}}\right) \quad (\text{ஆ}) \text{ க } \left(\frac{1}{z_1\overline{z_1}}\right) \quad \text{ஆகியவற்றை காண்க.}$$

13
$$\frac{1+2i}{1-3i} \text{ என்ற கலப்பெண்ணின் மட்டுமதிப்பையும் கோணத்தையும் காண்க.}$$

14 $(x-iy)(3+5i)$ என்ற எண் $-6-24i$இன் கலப்பிணைவம் எனில் $x,\ y$ என்ற மெய்யெண்களை காண்க.

15 மட்டுமதிப்பை காண்க:
$$\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}$$

16
$$(x+iy)^3 = u + iv \text{ எனில், } \frac{u}{x} + \frac{v}{y} = 4(x^2-y^2) \text{ என்று காட்டுக.}$$

**17**

$\alpha$வும் $\beta$வும் வெவ்வேறு கலப்பெண்கள், $|\beta| = 1$ எனில், $\left|\dfrac{\beta-\alpha}{1-\overline{\alpha}\beta}\right|$ ஐ காண்க.

**18** $|1-i|^x = 2^x$ என்ற சமன்பாட்டின் சுழியமற்ற முழுவெண்களான தீர்வுகளின் எண்ணிக்கையை காண்க.

**19** $(a+ib)(c+id)(e+if)(g+ih) = A+iB$ எனில், $(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)(g^2+h^2) = A^2+B^2$ எனக்காட்டுக.

**20**

$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$ எனில், $m$இன் மீக்குறைந்த நேர்மமுழுவெண்மதிப்பை காண்க.

## சுருக்கவுரை

$a$யும் $b$யும் மெய்யெண்களாயிருக்கும்போது $a+ib$ என்ற வடிவான ஒரு எண்ணை கலப்பெண் என்கிறோம்; $a$யை கலப்பெண்ணின் மெய்ப்பகுதி எனறும் $b$யை கற்பனைப்பகுதி என்றும் சொல்கிறோம்.

$z_1 = a+ib,\ z_2 = c+id$ என்க. அப்படியெனில், (அ) $z_1+z_2 = (a+c)+i(b+d)$ (ஆ) $z_1z_2 = (ac-bd)+i(ad+bc)$.

$z = a+ib$ என்ற எந்த சுழியமற்ற $(a \neq 0, b \neq 0)$ கலப்பெண்ணுக்கும் நிகராக $z\,z^{-1} = 1$ என்றவாறு பெருக்கற்புரட்டு என்று நாம் அழைக்கும் $z^{-1}$ என்ற மற்றொரு கலப்பெண் உள்ளது. அதாவது

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$$

$k$ என்ற எந்தவொரு முழுவெண்ணுக்கும், $i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i.$

$z = a+ib$ என்ற கலப்பெண்ணின் கலப்பிணைவம் $\overline{z} = a-ib.$

$z = x+iy$ என்ற கலப்பெண்ணின் முனையவடிவம் $r$ (உவவி $\theta + i$ வவி $\theta$); இங்கு, $r = \sqrt{z^2+y^2}$ ($z$இன் மட்டுமதிப்பு), உவவி $\theta = x/r,$ வவி $\theta = y/r$ ($\theta$ கலப்பெண்ணின் கோணம்). $-\pi < \theta \leq \pi$ என்ற இடைவெளியிலுள்ள கோணத்தின் மதிப்பை கலப்பெண்ணின் முதன்மைக்கோணம் என்கிறோம்.

ஒரு $n$னடுக்குச்சமன்பாட்டுக்கு $n$ தீர்வுகள் உள்ளன.

$ax^2+bx+c = 0, a, b, c \in R, a \neq 0$ என்ற ஈரடுக்குச்சமன்பாட்டுக்கு $b^2-4ac < 0$ என்றபோது

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

என்ற இரண்டு தீர்வுகள் உள்ளன.

## வரலாற்றுக்குறிப்பு

எதிர்ம எண்களுக்கு மெய்யெண்கணத்தில் வர்க்கமூலம் இல்லை என்ற உண்மையை பண்டைய கிரேக்கர்கள் அறிந்திருந்தனர். மகாவீரர் (850) என்ற இந்தியக்கணிதர் தன் கணிதசார சங்கிரகம் என்ற நூலில் எதிர்ம எண்கள் வர்க்கங்கள் அல்ல என்பதால் அவற்றுக்கு வர்க்கமூலங்கள் இல்லை என்கிறார். பாசுக்கரன் என்ற மற்றொரு இந்தியக்கணிதரும் 1150இல் இதையே சொல்கிறார்.

காருடன் (1545) $x+y = 10,\ xy = 40$ என்ற சிக்கலை தீர்க்க முயன்றபோது $x = 5+\sqrt{-15}, y = 5-\sqrt{-15}$ என்ற தீர்வுகளை பெற்று அவற்றை 'பயனற்றவை' என்று சொல்லி நிராகரித்தார். ஆல்பட்டு கிராருடு (சுமார் 1625) எதிர்ம எண்களின் வர்க்கமூலத்தை ஏற்று இது $n$அடுக்குச்சமன்பாட்டுக்கு $n$ தீர்வுகளை தரும் என்றார். ஆயிலர் முதன்முதலில் $\sqrt{-1}$க்கு $i$ என்ற குறியீட்டை அறிமுகமாக்கினார். வி. உரோ. ஆமிற்றன் (சுமார் 1830) $a+ib$ என்ற கலப்பெண்களை மெய்யெண்களின் முறைமைச்சோடிகளாக கருதி தூய கணிதவரையறையை வழங்கி 'கற்பனை'யெண்களின் பயன்பாட்டை தவிர்த்தார்.