படலம் 7

எடுத்தலும் எடுத்தடுக்கலும்

ஒவ்வொரு துறையின் கண்டுபிடிப்புகளும் கணித வடிவில் இருக்கின்றன, ஏனெனில் அதைத்தவிர வேறு வழிமுறை இல்லை – தார்வின்

7.1 அறிமுகம்

யா. பெருனூலி

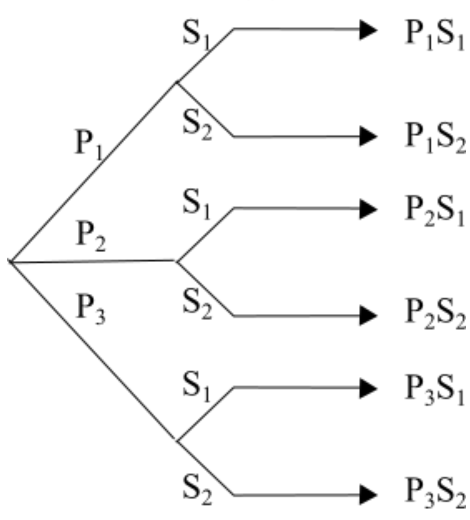
நம்மிடம் எண்பூட்டுள்ள ஒரு பெட்டி இருப்பதாக கொள்வோம். அப்பூட்டில் நான்கு எண்சக்கரங்களும், ஒவ்வொன்றிலும் *0* முதல் 9 வரையான 10 இலக்கங்களும் உள்ளன. அப்பூட்டை ஒரு குறிப்பிட்ட 4 இலக்க எண்ணால் மட்டுமே திறக்க வியலும். அந்த எண்ணில் ஒவ்வொரு இலக்கமும் மீண்டும் வராதபடி இருக்க வேண்டும். நீங்கள் அந்த பூட்டுக்கான எண்ணை மறந்து விட்டீர்கள்; ஆனால் முதல் எண்ணான 7 மட்டும் நினைவிருக்கிறது என்று வைத்துக்கொள்வோம். அப்படியென்றால் அப்பூட்டை திறப்பதற்கு எத்தனை மூன்று இலக்க எண்களை முயலவேண்டும்? இக்கேள்விக்கு விடையளிக்க நீங்கள் ஒவ்வொரு எண்ணாக எழுத முயலக்கூடும். ஆனால் இதற்கு நீண்ட நேரம் ஆகும். அவ்வாறு செய்யாமல் எளிதாக கணக்கிடும் ஒரு கணித முறையை விளக்குவதே இந்த அலகின் நோக்கம். இம் முறையை எங்கெல்லாம் பொருள்களை அடுக்கு கிறோமோ, மாற்றி அமைக்கிறோமோ அங்கெல் லாம் பயன்படுத்தலாம். பல பொருள்களிலிருந்து சில பொருள்களை தேர்ந்தெடுக்கும் எடுத்தற் கணக்கீடுகளிலும் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கை யான பொருள்களை மாற்றடுக்கும் அடுக்கற் கணக்கீடுகளிலும் இதுபோன்ற முறைகள் பயனாகின்றன.

7.2 எண்ணுவதன் அடிப்படைத்தத்துவம்

கீழ்வரும் சிக்கலை கருதுவோம். மோகனுக்கு 3 காற்சட்டைகளும் இரண்டு மேற்சட்டைகளும் இருக்கின்றன. இவற்றை எத்தனை விதமான சோடிகளாக அணியலாம்? மூன்று காற்சட்டைகள் இருப்பதால் மூன்று வழிகளில் காற்சட்டையை தேர்ந்தெடுக்கலாம். அதே போல இரண்டு வழிகளில் மேற்சட்டையை தேர்ந்தெடுக்கலாம். ஒவ்வொரு காற்சட்டைக்கும் இரண்டு மேற்சட்டை வாய்ப்புகள் உள்ளன. அதனால் மொத்தத்தில் $3 \times 2 = 6$ சோடிகளாக மேற்சட்டையும் காற்சட்டையும் அணியவியலும்.

மூன்று காற்சட்டைகளை P_1, P_2, P_3 என்றும் மேற்சட்டைகளை S_1, S_2 என்றும் பெயரிடுவோம். அப்படியென்றால் அவை இணைந்து உருவாக்கும் 6 சோடிகளை படம் 7.1இல் காணலாம்.

6 சாத்தியங்கள்

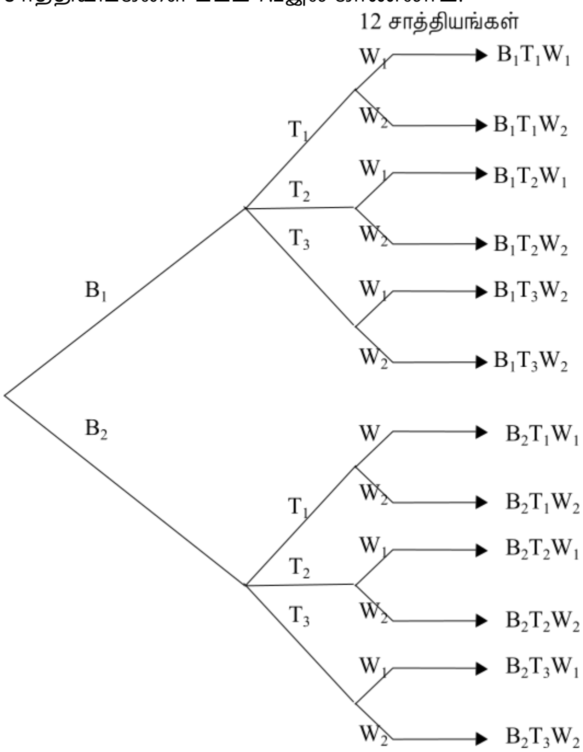


படம் 7.1

இதைப்போன்ற இன்னொரு சிக்கலை எடுத்துக்கொள்வோம். சுதாவுக்கு இரண்டு புத்தகப்பைகளும், மூன்று சாப்பாட்டுப் பெட்டிகளும், இரண்டு நீர்ப்புட்டில்களும் உள்ளன. ஒவ்வொரு வகையிலும் ஒவ்வொன்றாக எடுத்து எத்தனை வழிகளில் அவள் பள்ளிக்கு கொண்டுசெல்லலாம்?

புத்தகப்பையை இரண்டு வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம். ஒரு பையை தேர்ந்தெடுத்தபின், அதனுடன் சேர்க்க மூன்று வழிகளில் சாப்பாட்டுப் பெட்டியை தேர்ந்தெடுக்கலாம். அதனால் மொத்தமாக $2 \times 3 = 6$ வழிகளில் புத்தகப்பையையும் சாப்பாட்டுப்பெட்டியையும் எடுக்கலாம். ஒவ்வொரு சோடிக்கும் இரண்டு வழிகளில் நீர்ப்புட்டிலை தேர்ந்தெடுக்கலாம். அதனால் $6 \times 2 = 12$ வழிகளில் இந்த பொருள்களை சுதா பள்ளிக்கு எடுத்துச்செல்லவியலும்.

இரண்டு புத்தகப்பைகளை B_1, B_2 என்றும், மூன்று சாப்பாட்டுபெட்டிகளை T_1, T_2 , T_3 என்றும், இரண்டு நீர்ப்புட்டில்களை W_1, W_2 என்றும் எடுத்துக்கொண்டால், அவை உருவாக்கும் 12 சாத்தியங்களை படம் 7.2இல் காணலாம்.



படம் 7.2

மேற்கண்டவைபோன்ற சிக்கல்களில் *எண்ணுவதன் அடிப்படைக்கொள்கை* எனப்படும் கீழ்க்காணும் கொள்கையை பயன்படுத்துகிறோம். இதை *பெருக்கற்கொள்கை* எனவும் அழைக்கிறோம். இதன் கூற்று பின்வருமாறு:

"ஒரு நிகழ்வு m வழிகளில் நடைபெறலாம் என்றும், அதனைத்தொடர்ந்து இன்னொரு நிகழ்வு n வழிகளில் நடைபெறலாம் என்றுமிருந்தால், அவை இரண்டும் அதே முறைமையில் நிகழும் வழிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $m \times n$".

மேலுள்ள கொள்கையை பொதுவமாக்கி எத்தனை வழியான நிகழ்வுகளுக்கும் பயன்படுத்தலாம். சான்றாக மூன்று நிகழ்வுகளுக்கு இவ்வாறு கூறலாம்: ஒரு நிகழ்வு m வழிகளில் நடைபெற்று, அதனைத்தொடர்ந்து இன்னொரு நிகழ்வு n வழிகளில் நடைபெற்று, அதனைததொடர்ந்து இன்னொரு நிகழ்வு p வழிகளில் நடைபெற்றால், அவை அதே முறைமையில் நிகழ்வதன் மொத்த எண்ணிக்கை $m \times n \times p.$

முதற்சான்றில், கால்சட்டைகளை தேர்ந்தெடுப்பதையும், மேற்சட்டைகளை தேர்ந்தெடுப்பதையும் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக நடக்கும் இரு நிகழ்வுகளாக எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

1. காற்சட்டையை தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்வு

2. மேற்சட்டையை தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்வு

அதைப்போல இரண்டாவது சான்றில் மூன்று நிகழ்வுகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக நிகழ்கின்றன.

1. புத்தகப்பையை தேர்ந்தல்

2. சாப்பாட்டுப்பெட்டியை தேர்ந்தெடுத்தல்

3. நீர்ப்புட்டிலை தேர்ந்தெடுத்தல்

மேலே பார்த்த சான்றுகளில் நிகழ்வுகள் எந்த முறைமையிலும் நிகழலாம். சான்றாக, காற்சட்டையை முதலில் தேர்ந்தெடுப்பதற்கு பதிலாக, மேற்சட்டையை முதலில் தேர்ந்தெடுக்கலாம். அவ்வாறு மாற்றி தேர்ந்தெடுத்தாலும் விடை மாறாது. எந்த முறைமையில் தேர்ந்தெடுத்தாலும் சரியானதே.

சான்று 1 "முருகன்" என்ற ஒரு சொல்லை எடுத்துக்கொள்வோம். இதிலுள்ள எழுத்துகளை மாற்றியமைத்து எத்தனை வழிகளில் புதிய சொற்களை உருவாக்கவியலும்*?* அவ்வாறு உருவாக்கும் சொற்களுக்கு பொருளோ இலக்கணமோ இருக்கவேண்டியதில்லை. ஒரு எழுத்து ஒருமுறைதான் வரவேண்டும்.

தீர்வு நாம் உருவாக்கும் சொற்களில் நான்கு எழுத்துக்கள் உள்ளன. நான்கு காலி இடங்களில் எத்தனை வழிகளில் "முருகன்" என்ற சொல்லிலுள்ள நான்கு எழுத்துக்களை இடலாம் என்பதே கேள்வி. முதலிடத்தில் நான்கு எழுத்துக்களில் எதை வேண்டுமானாலும் பயன்படுத்தலாம்; அதனால் நான்கு வழிகளில் இவ்விடத்தை நிரப்பலாம். இரண்டாமிடத்தில் எஞ்சிய மூன்று எழுத்துக்களில் எதை வேண்டுமானாலும் பயன்படுத்தலாம் என்பதால், இவ்விடத்தை மூன்று வழியில் நிரப்பலாம். இதைத்தொடர்ந்தால் மூன்றாம் இடத்தை இரண்டு வழிகளிலும், நான்காம் இடத்தை ஒரு வழியிலும் நிரப்பலாம். பெருக்கற்கொள்கையின்படி, மொத்தம் $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ வழிகளில் நான்கு இடங்களை நிரப்பலாம். அதாவது 24 சொற்களை "முருகன்" என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களால் உருவாக்கலாம்.

குறிப்பு பயன்படுத்திய எழுத்தை மீண்டும் பயன்படுத்தலாம் என்றால் என்னவாகும்*?* ஒவ்வொரு காலி இடத்திலும் நான்கு எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தலாம் என்பதால் $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ வழிகளில் சொற்களை

உருவாக்கலாம். இதில் 'முமுமுமு', 'ருருருரு', 'முருமுரு' போன்ற சொற்களும் அடங்குகின்றன.

சான்று 2 வெவ்வேறு வண்ணங்களுள்ள நான்கு கொடிகள் உள்ளன. அவற்றை ஒன்றன்மேலொன்றாக வைத்து ஒரு சமிக்கையை உண்டாகலாம். இரண்டு கொடிகளால் எத்தனை சமிக்கைகளை உண்டாகலாம்?

தீர்வு மேலுள்ள கொடியை நான்கு வழிகளிலும், கீழுள்ள கொடியை மூன்று வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம் என்பதால், மொத்தம் $4 \times 3 = 12$ வழிகளில் சமிக்கைகளை உருவாக்கவியலும்.

சான்று 3 $1, 2, 3, 4, 5$ ஆகிய ஐந்து எண்களால் எத்தனை இரண்டிலக்க இரட்டைப்படை எங்களை உருவாக்கலாம்? பயன்படுத்திய எண்ணை மீண்டும் பயன்படுத்தலாம்.

தீர்வு இரண்டு காலி இடங்களில் (_ _) எண்களால் நிரப்பவேண்டும். முதல் இடத்தில் எந்த எண்ணை வேண்டுமானாலும் பயன்படுத்தலாம் என்பதால் ஐந்து வழிகளில் இவ்விடத்தை நிரப்பலாம். இரண்டாம் இடத்தில் இரட்டைப் படை எண்ணால் மட்டுமே நிரப்பவியலும். நமக்கு அளிக்கப்பட்ட எண்களில் இரண்டு இரட்டைப்படை எண்கள் மட்டுமே உள்ளதால், இவ்விடத்தை இரண்டு வழிகளில் மட்டுமே நிரப்பலாம். அதனால் மொத்மாக $5 \times 2 = 10$ வழிகளில் இரட்டைப்படை எண்களை உருவாக்கலாம்.

சான்று 4 நம்மிடம் ஐந்து கொடிகள் உள்ளன. அவற்றால் மீச்சிறுமமாக இரு கொடிகளை ஒன்றன்கீழொன்றாக அடுக்கி ஒரு சமிக்கையை உருவாக்கவேண்டும் எனில், எத்தனை வழிகளில் சமிக்கையை உருவாக்கலாம்?

தீர்வு மீச்சிறுமமாக இரண்டு கொடிகள் என்பதால், சமிக்கையில் 2இலிருந்து 5வரை இருக்கலாம்.

இரண்டு கொடிகளுள்ள சமிக்கையில், இரண்டு காலி இடங்களை நிரப்ப வேண்டும். முதல் இடத்தை 5 வழிகளிலும், இரண்டாம் இடத்தை நான்கு வழிகளிலும் நிரப்பலாம் என்பதால் மொத்தம் $5 \times 4 = 20$ வழிகளில் சமிக்கையை உருவாக்கலாம்.

மூன்று கொடிகளுள்ள சமிக்கையில், முதலிடத்தை 5 வழிகளிலும், இரண்டாமிடத்தை 4 வழிகளிலும், மூன்றாமிடத்தை 3 வழிகளிலும் நிரப்பலாம் என்பதால், மொத்தம் $5 \times 4 \times 3 = 60$ வழிகளில் நிரப்பலாம்.

அதைப்போல நான்கு கொடிகளுள்ள சமிக்கையை $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ வழிகளில் உருவாக்கலாம்,

ஐந்து கொடிகளுள்ள சமிக்கையை $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$வழிகளில் உருவாக்கலாம்.

மொத்தமாக $20 + 60 + 120 + 120 = 320$ வெவ்வேறு சமிக்கைகளை உருவாக்கலாம்.

பயிற்சி 7.1

1. $1, 2, 3, 4, 5$ ஆகிய ஐந்து எண்களால் (அ) ஒரு எண்ணை ஒரு முறைக்கு மேல் பயன்படுத்தலாம் (ஆ) பயன்படுத்திய எண்ணை மீண்டும் பயன்படுத்தக்கூடாது என்ற எடுகோளுடன் எத்தனை மூன்றிலக்க எண்களை உருவாக்கலாம்?
2. 1,2,3,4,5,6 ஆகிய எண்களிலிருந்து எத்தனை மூன்றிலக்க இரட்டைப்படையெண்களை உருவாக்கலாம்?பயன்படுத்திய எண்ணை மீண்டும் பயன்படுத்தலாம்.
3. பத்து எழுத்துக்களிலிருந்து எத்தனை நான்கெழுத்துச்சரங்களை உருவாக்கலாம்? பயன்படுத்திய எழுத்தை மீண்டும் பயன்படுத்தக்கூடாது.
4. 0த்திலிருந்து 9வரையான எண்களை பயன்படுத்தி ஐந்திலக்க தொலைபேசியெண்களை உருவாக்க வேண்டும். ஆனால் ஒவ்வொரு தொலைபேசியெண்ணும் 67இல் தொடங்கவேண்டும். பயன்படுத்திய எண்களை பயன்படுத்தக்கூடாது. இதன் அடிப்படையில் எத்தனை தொலைபேசியெண்களை உருவாக்கலாம்?
5. ஒரு நாணயத்தை மூன்று முறை சுண்டிவிட்டு விளைவுகளை குறித்துக்கொண்டால், எத்தனை வழிகளில் விளைவுகள் வெளிப்பட வாய்ப்புள்ளது?
6. வெவ்வேறு வண்ணங்களுள்ள ஐந்து கொடிகள் உள்ளன. இரண்டு வண்ணங்கள் கொண்ட ஒரு சமிக்கையை எத்தனை வழிகளில் உருவாக்கலாம்?

7.3 எடுத்தடுக்கல்கள்

முந்தைய பகுதியின் சான்று 1இல், "முருகன்" என்ற சொல்லின் எழுத்துக்களை பயன்படுத்தி எத்தனை வழிகளில் "ருமுகன்", "ன்ருமுக" போன்ற நான்கெழுத்துள்ள சொற்களை உருவாக்கலாம் என்று பார்த்தோம். இந்த பட்டியலில் ஒவ்வொரு சொல்லும் மற்றவற்றிலிருந்து வேறுபட்டது எவ்வாறெனின், எழுத்துகளின் முறைமை ஒவ்வொன்றிலும் வேறுபட்டது. இந்த சொற்களை

நான்கு வெவ்வேறு எழுத்துகளின் எடுத்தடுக்கல்கள் என்கிறோம்.

இப்போது "முருகன்" என்ற சொல்லிலுள்ள நான்கு எழுத்துக்களால் ஒரெழுத்து ஒருமுறையே வரும்படி "ருக" "கன்" "ருன்" "ருமு" போன்று எத்தனை ஈரெழுத்துச்சொற்களை உருவாக்கலாம்? இங்கு 4 எழுத்துகளில் இரண்டிரண்டாக எடுத்து முறைமைமாற்றுகிறோம். முதலெழுத்து நான்கில் எதுவாகவும் இரண்டாமெழுத்து எஞ்சிய மூன்றில் எதுவாகவும் இருக்கலாம் என்பதால், இதனால் விளையும் சொற்களின் எண்ணிக்கை $4 \times 3 = 12$ என்பதை பெருக்கற்கொள்கையால் பெறுகிறோம். நான்கில் இரண்டு எழுத்துகளை எடுத்து அவற்றை வெவ்வேறு முறைமைகளில் அடுக்குவதால் இந்த செயலை எடுத்தடுக்கல் என்கிறோம்.

ஒரெழுத்து பலமுறை வரலாம் எனில், சொற்களின் எண்ணிக்கை $4 \times 4 = 16$.

வரையறை 1 எடுத்தடுக்கல் என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையான பொருள்களுள் எல்லாவற்றையுமோ சிலவற்றையோ தேர்ந்தெடுத்து ஒரு முறைமையில் அடுக்குவது.

n பொருள்களிலிருந்து r பொருள்களின் எடுத்தடுக்கல்களை பட்டியலிட அவற்றிலிருந்து r பொருள்களை தேர்ந்தெடுத்து ஒவ்வொரு தேர்வையும் சாத்தியமான எல்லா வழிகளிலும் முறைமைமாற்றுகிறோம்.

இனி கீழ்வரும் பகுதிகளில் இதுபோன்ற கேள்விகளுக்கு பொதுவான வாயப்பாடுகளை வருவிப்போம்.

7.3.1 தனிப்பட்ட பொருள்களின் எடுத்தடுக்கல்

தேற்றம் 1 n தனிப்பட்ட பொருள்களிலிருந்து $r\,(0 < r \leq n)$ பொருள்களை மீட்செயலின்றி எடுத்தடுக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை $n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)$; இதை ${}^{n}P_{r}$ என்கிறோம்.

விளக்கம் பொருள்கள் தனிப்பட்டவை என்று சொல்வதன் பொருள் ஒன்றிலிருந்து மற்றதை நாம் பிரித்தறியலாம். பொருள்கள் நிறத்தாலோ வடிவாலோ வேறொரு பண்பாலோ ஒன்றுக்கொன்று வேறுபடுகின்றன. மீட்செயலின்றி என்று சொல்வதன் பொருள் எடுத்த பொருளை மீண்டும் எடுக்கவியலாது. அதாவது ஒரு எடுத்தடுக்கலில் ஒரு பொருள் ஒருமுறையே வரலாம்.

நிறுவல் r காலியிடங்களை n பொருள்களால் *எத்தனை* வழிகளால் நிரப்பவியலுமோ அதுவே எடுத்தடுக்கல்களின் எண்ணிக்கை.

r காலி இடங்கள்

முதல் இடத்தை n வழிகளில் நிரப்பலாம்; பிறகு இரண்டாம் இடத்தை $(n-1)$ வழியில் நிரப்பலாம்; அதனைத்தொடர்ந்து மூன்றாம் இடத்தை $(n-2)$ வழியில் நிரப்பலாம். கடைசியான rஆம் இடத்தை $(n-(r-1))$ வழிகளில் நிரப்பலாம். அதனால் r காலி இடங்களை $n\,(n-1)(\,n-2)\ldots(n-r+1)$ வழிகளில் நிரப்பலாம்.

${}^{n}P_{r}$க்கான கோவை வசதியில்லாமலிருப்பதால் இதன் அளவை குறைக்க $n!$ என்ற ஒரு சுருக்கமான குறியீட்டை பயன்படுத்துகிறோம். இது பல காரணிகளை ஈவதால் காரணீயம் என்று அழைக்கிறோம். இதன் பொருளை அடுத்து காண்போம்.

7.3.2 காரணீயக்குறியீடு

$n!$ என்ற குறியீடு முதல் n எண்களின் பெருக்கலை குறிக்கிறது. அதாவது $1 \times 2 \times 3 \times \ldots (n-1) \times n$ என்ற பெருக்கலை $n!$ என்று குறிக்கிறோம். அதனால் $1 \times 2 \times 3 \times \ldots (n-1) \times n = n!$

$$1 = 1!$$
$$1 \times 2 = 2!$$
$$1 \times 2 \times 3 = 3!$$
$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4!$$

என்றிவ்வாறே.

$0! = 1$ என்று வரையறுக்கிறோம். மேலும்,

$$\begin{aligned} 5! = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3! &= 5 \times 4 \times 3 \times 2! \\ &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1! \end{aligned}$$

என்று எழுதலாம்.

n என்ற ஒரு இயலெண்ணுக்கு

$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)!$

($n \geq 2$ எனும்போது)

$= n(n-1)(n-2)(n-3)!$

($n \geq 3$ எனும்போது)

என்றிவ்வாறே இருப்பது தெளிவு.

சான்று 5 மதிப்பிறுக (அ) $5!$ (ஆ) $7!$ (இ) $7! - 5!$

தீர்வு

(அ) $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

(ஆ) $7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$

(இ) $7! - 5! = 5040 - 120 = 4920$

சான்று 6 கணக்கிடுக: (அ) $7!/5!$ (ஆ) $12!/10!\,2!$

தீர்வு (அ)

$$\frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$$

(ஆ)

$$\frac{12!}{10!\,2!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{10!\,2!} = 6 \times 11 = 66.$$

சான்று 7 $n = 5,\ r = 2$ எனும்போது கீழ்வரும் கோவையை கணக்கிடுக.

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

தீர்வு

$$\frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

சான்று 8

$$\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}=\frac{x}{10!} \text{ எனில், } x\text{ஐ காண்க.}$$

தீர்வு

$$\frac{1}{8!}+\frac{1}{9\times 8!}=\frac{x}{10\times 9\times 8!}$$

$$1+\frac{1}{9}=\frac{x}{10\times 9}, \quad \text{அதாவது } \frac{10}{9}=\frac{x}{10\times 9},$$

$$x=100$$

பயிற்சி 7.2

1. மதிப்பறிக (அ) $8!$ (ஆ) $4!-3!$
2. $3!+4!=7!$ என்பது சரியா?
3. கணக்கிடுக
$$\frac{8!}{6!\times 2!}$$
4. $$\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}=\frac{x}{8!} \text{ எனில் } x \text{ என்ன?}$$
5. (அ) $n=6, r=2$ (ஆ) $n=9, r=5$ எனும்போது, $\frac{n!}{(n-r)!}$ ஐ மதிப்பறிக

7.3.3 ^nP_rக்கான வாய்ப்பாட்டை வருவித்தல்

இப்போது காரணீயத்தை பயன்படுத்தி

$$^nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}, \qquad 0\le r\le n$$

என்று சுருக்கமாக தோன்றும்படி எழுதலாம். முன்பு நாம்

$$^nP_r=n(n-1)(n-2)\ldots(n-r-1)$$

என்று கண்டிருக்கிறோம். இதன் மேற்காரணியை யும் கீழ்க்காரணியையும் $(n-r)(n-r-1)\ldots 3\times 2\times 1$ என்பதால் பெருக்கி

$$^nP_r=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r)\ldots 3\times 2\times 1}{(n-r)(n-r-1)\ldots 3\times 2\times 1}$$
$$=\frac{n!}{(n-r)!}$$

இவ்வாறு

$$^nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}, \qquad 0<r\le n$$

என்ற ஒரு வசதியான வாய்ப்பாட்டை பெறுகிறோம். குறிப்பாக, $r=n$ எனும்போது

$$^nP_n=\frac{n!}{0!}=n!$$

என்றாகிறது.

எடுத்தடுக்கல் என்பது சில பொருள்களை எடுத்து அடுக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை. சுழியப்பொருள்களின் எடுத்தடுக்கலான $^nP_0$ என்பதன் பொருள் எந்த பொருளையும் எடுக்காமலிருப்பது. இதற்கு ஒரு வழியே உள்ளது. அதை கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$^nP_0=1=\frac{n!}{n!}=\frac{n!}{(n-0)!} \qquad (7.1)$$

இவ்வாறு மேல் நாம் பெற்ற வாய்ப்பாடு $r=0$த்துக்கும் பொருந்துகிறது. எனவே

$$^nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}, \qquad 0\le r\le n$$

என்ற இறுதிவிடையை பெறுகிறோம்.

தேற்றம் 2 n தனிப்பட்ட பொருள்களிலிருந்து r பொருள்களை மீட்செயலுடன் எடுத்தடுக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை n^r.

இதன் நிறுவல் தேற்றம் 1இன் நிறைவலைப் போன்றது. உங்களுக்கு பயிற்சியாக விடுகிறோம்.

^nP_r என்ற வாய்ப்பாட்டின் பயன்பாட்டை எடுத்துக்காட்ட முந்தைய பகுதியின் சில சிக்கல்களை தீர்க்க அதை பயன்படுத்துவோம்.

சான்று 1இல் தேவையான சொற்களின் எண்ணிக்கை $^4P_4=4!=24$. இங்கு மீட்செயல் இல்லை. அதாவது ஒரே எழுத்து பலமுறை வருவதில்லை. மீள்வருதலை அனுமதித்தால் விடை $4^4=256$.

'முருகன்' என்ற சொல்லிலிருந்து உருவாக்கக்கூடிய ஈரெழுத்துச்சொற்களின் எண்ணிக்கை $^4P_2={}^{4!}/_{2!}=12$. வந்த எழுத்தே மீண்டும் வரலாமெனில், எண்ணிக்கை $4^2=16$.

12 உறுப்பினரடங்கிய அவையில் தலைவரை யும் துணைத்தலைவரையும் தேர்ந்தெடுக்க $^{12}P_2={}^{12!}/_{10!}=12\times 11=132$ வழிகள் உள்ளன.

7.3.4 எல்லாப்பொருள்களும் தனிப்பட்டவையாக இல்லாதபோது எடுத்தடுக்கல்கள்

'பம்பரம்' என்ற சொல்லின் எழுத்துகளை எடுத்தடுக்க எத்தனை வழிகள் உள்ளன என்ற கேள்வியை எடுப்போம். இங்கு எல்லா எழுத்துகளும் தனிப்பட்டவை அல்ல. ப என்ற எழுத்து இரண்டுமுறை வருகிறது. இந்த இரண்டு எழுத்துகளையும் $ப_1$, $ப_2$ என்றுவாறு வேறுபடுத்தலா மெனில், $ப_1$ம்$ப_2$ரம் என்ற சொல்லின் எடுத்தடுக்கல் களின் எண்ணிக்கை $^5P_5=5!$ என்பதை அறிவோம். இந்த எடுத்தடுக்கல்களுள் ஒன்றான $ப_2$ரம்$ப_1$ம் என்ற சொல்லை கருதுக. இரண்டு பகரங்களையும் வேறுபடுத்த இயலாதபோது இந்த சொல்லுக்கும் $ப_1$ரம்$ப_2$ம் என்ற சொல்லுக்கும்

வேறுபாடு காணவியலாது. அதாவது ஒரே சொல்லை இரண்டுமுறை சேர்த்திருக்கிறோம். இவ்வாறே ப$_1$ம்ப$_2$ம்ர ப$_2$ம்ப$_1$ம்ர என்றவாறு நாம் முன்பு கணக்கிட்ட 5! எடுத்தடுக்கல்களையும் சோடிகளாக சேர்க்கலாம். எனவே சரியான எடுத்தடுக்கல்களை காண அந்த எண்ணிக்கையை இரண்டால் வகுக்கவேண்டும். அதாவது நமக்கு தேவையான எண்ணிக்கை

$$\frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

இப்போது, 'திமிறிக்குதிக்குங்குதிரை' என்ற சொல்லின் எடுத்தடுக்கல்களை கருதுவோம். தீனா ('தி') மூன்றுமுறையும் இக்கன்னா ('க்') இரண்டுமுறையும் கூனா ('கு') மூன்றுமுறையும் வருகின்றன. இவற்றை வேறுபடுத்தினால் 12 வெவ்வேறு எழுத்துகளை முறைமைமாற்றும் எண்ணிக்கை $^{12}p_{12} = 12!$. இவற்றுள் மிதி$_1$றிக்$_1$கு$_1$தி$_2$க்$_2$கு$_2$ங்கு$_3$தி$_3$ரை போன்ற ஒரு சொல்லை கருதுக. இதிலுள்ள தீனாக்களை இடம்மாற்றினால் கிடைக்கும் சொற்களை ஒருமுறையே நாம் எண்ணவேண்டும். மூன்று இடங்களில் மூன்று தீனாக்களை வைக்க 3! வழிகள் உள்ளன. இவ்வாறே இரண்டு இக்கன்னாக்களை எடுத்தடுக்க 2! வழிகளும் மூன்று கூனாக்களை எடுத்தடுக்க 3! வழிகளும் உள்ளன. எனவே, நமக்கு வேண்டிய எண்ணிக்கை

$$\frac{12!}{3!\,2!\,3!}$$

என்றாகிறது. இதிலிருந்து கீழ்க்காணும் தேற்றங்களை நிறுவலின்றி உரைக்கிறோம்.

தேற்றம் 3 ஒரே வகையான p பொருள்கள் அடங்கிய n பொருள்களின் எடுத்தடுக்கல்களின் எண்ணிக்கை $n!/p!$

உண்மையில், மேலும் பொதுவான ஒரு தேற்றத்தை நாம் பெறலாம்.

தேற்றம் 4 ஒரு வகையான p_1 பொருள்களும் மற்றொரு வகையான p_2 பொருள்களும், இவ்வாறே kஆம் வகையான p_k பொருள்களும் அடங்கிய n பொருளகளின் முறைமைமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை

$$\frac{n!}{p_1!\,p_2!\ldots p_k!}$$

சான்று 9 வெற்றிடத்தையும் ஒரு வரியுருவாக கருதி, 'கற்க கசடற கற்றபின் நிற்க' என்ற தொடரின் முறைமைமாற்றல்களை கணக்கிடுக. (ஒவ்வோரெழுத்தும் ஒரு வரியுரு).

தீர்வு இங்கு, வெற்றிடங்களையும் சேர்த்து மொத்தம் 18 வரியுருக்கள் இருக்கின்றன. வரியுருவகைகளின் எண்ணிக்கைகள் பின்வருமாறு: க 5, ற் 3, ற 2, வெற்றிடம் 3, மற்றவை 1. எனவே, எடுத்தடுக்கல்கள்

$$\frac{18!}{5!\,3!\,2!\,3!} = \frac{6 \times 7 \times 8 \times \ldots \times 16 \times 17 \times 18}{3!\,2!\,3!}$$
$$= \frac{6 \times 7 \times 8 \times \ldots \times 16 \times 17 \times 18}{2^3 3^2}$$
$$= 6 \times 7 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18 = 741015475200$$

சான்று 10 இலக்கங்கள் மீள்வரலாம் எனில், 1முதல் 9வரையான இலக்கங்களை பயன்படுத்தி எத்தனை 4இலக்க எண்களை உருவாக்கலாம்?

தீர்வு இங்கு முறைமை முக்கியம். சான்றாக, 1234உம் 1324உம் வெவ்வேறான எண்கள். எனவே, 4இலக்க எண்களின் எண்ணிக்கை 9 இலக்கங்களிலிருந்து 4 வெவ்வேறு இலக்கங்களின் எடுத்தடுக்கல்களின் எண்ணிக்கைக்கு சமம். அதாவது

$$^9P_4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$$

சான்று 11 இலக்கங்கள் மீள்வரவியலாது எனில், $0, 1, 2, 3, 4, 5$ ஆகிய இலக்கங்களால் 100க்கும் 1000த்துக்குமிடையான எத்தனை எண்களை உருவாக்கலாம்?

தீர்வு 100க்கும் 1000த்துக்குமிடையான ஒவ்வொரு எண்ணும் 3இலக்க எண். முதலில் 6 இலக்கங்களில் 3 இலக்கங்களின் எடுத்தடுக்கல்களை எண்ணவேண்டும். அது $^6P_3$. ஆனால், இந்த எடுத்தடுக்கல்களுள் நூறின் மதிப்பிடத்தில் 0 இருக்கும் எண்களும் அடங்குகின்றன. 092, 043 போன்ற இவை உண்மையில் ஈரிலக்க எண்கள். இவற்றின் எண்ணிக்கையை நாம் $^6P_3$இலிருந்து கழிக்கவேண்டும். இவ்வாறான எண்களின் எண்ணிக்கையை காண, நூறின் மதிப்பிடத்தில் 0த்தை வைத்து, எஞ்சிய 5 இலக்கங்களிலிருந்து இரண்டை எடுத்தடுக்குகிறோம். இது $^5P_2$. எனவே நமக்கு வேண்டிய எண்ணிக்கை

$$^6P_3 - {}^5P_2 = \frac{6!}{3!} - \frac{5!}{3!} = 4 \times 5 \times 6 - 3 \times 4 \times 5$$
$$= 100$$

சான்று 12 கீழ்க்காண்பவற்றில் nஇன் மதிப்பை காண்க.

(அ) $^nP_5 = 42\,{}^nP_3, \qquad n > 4$

(ஆ) $\dfrac{^nP_4}{^{n-1}P_4} = \dfrac{5}{3}, \qquad n > 4$

தீர்வு (அ) $^nP_5 = 42\,{}^nP_3$ என்று கொடுத்திருக்கிறார்கள். அதாவது

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$
$$= 42\,n(n-1)(n-2)$$

$n > 4$ என்பதால், $n(n-1)(n-2) \neq 0$. இதை இருபக்கங்களிலும் நீக்கலாம். எனவே

$$(n-3)(n-4) = 42,$$
அதாவது $n^2 - 7n - 30 = 0$

இதன் தீர்வுகள் $n = -3, 10$.

n எதிர்மமன்று என்பதால், $n = 10$.

(ஆ) கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$$3n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$= 5(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

என்று எழுதலாம் $n > 4$ என்பதால் $(n-1)(n-2)(n-3)$ என்ற காரணியை நீக்கலாம்.

$3n = 5(n-4)$. எனவே $n = 10$.

சான்று 13 $5\ {}^4P_r = 6\ {}^5P_{r-1}$ எனில் rஐ காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிலிருந்து

$$5 \times \frac{4!}{(4-r)!} = 6 \times \frac{5!}{(5-r+1)!}$$

$$\frac{5!}{(4-r)!} = \frac{6 \times 5!}{(5-r+1)(5-r)(5-r-1)!}$$

$$(6-r)(5-r) = 6$$

$$r^2 - 11r + 24 = 0$$

$$(r-8)(r-3) = 0$$

$$r = 8, \quad 3$$

$r = 3$ பொருளுள்ள விடை.

சான்று 14 $DAUGHTER$ என்ற சொல்லின் எழுத்துகளிலிருந்து (அ) எல்லா உயிரெழுத்து களும் சேர்ந்து வருமாறும் (ஆ) எல்லா உயிரெழுத்துகளும் சேர்ந்து வராமலும் எத்தனை வெவ்வேறு 8எழுத்துச்சொற்களை உண்டாக்க லாம்? (A, E, I, O, U ஆகியவை உயிரெழுத்துகள்).

தீர்வு (அ) $DAUGHTER$ என்ற சொல்லில் 8 வெவ்வேறு எழுத்துகள் உள்ளன. அவற்றுள் A, U, E ஆகிய மூன்றும் உயிரெழுத்துகள். முதலில், சேர்ந்து வரவேண்டிய உயிரெழுத்து களை AUE என்ற ஒற்றையெழுத்தாக கருதலாம். இதுவும் எஞ்சிய ஐந்து எழுத்துகளும் சேர்ந்த ஆறெழுத்துகளிலிருந்து ஆறெழுத்துச்சொற் களை உண்டாக்கவேண்டும். இது ${}^6P_6$. ஒவ்வொரு எடுத்தடுக்கலிலும் சேர்ந்து வரும் A, U, E தங்களுக்குள் எந்த முறைமையிலும் வரலாம். அதாவது ஒவ்வொரு எடுத்தடுக்கலுக்கும் ${}^3P_3$ முறைமைமாற்றங்கள் உள்ளன. எனவே, மொத்த சொற்களின் எண்ணிக்கை ${}^6P_6 \times {}^3P_3 = 6! \times 3! = 4320$.

(ஆ) எல்லா உயிரெழுத்துகளும் சேர்ந்தில் லாத சொற்களை காண, முதலில் 8 எழுத்துகளா லான எல்லாச்சொற்களின் எண்ணிக்கையை காண்போம். இதிலிருந்து உயிரெழுத்துகள் சேர்ந்து வரும் சொற்களின் எண்ணிக்கையை கழிக்கவேண்டும். எல்லாச்சொற்களின் மொத்த எண்ணிக்கை ${}^8P_8 = 8!$. உயிரெழுத்துகள் சேர்ந்துவரும் எண்ணிக்கையை மேலே கண்டோம். எனவே இங்கு நமக்கு வேண்டிய விடை

$$\begin{aligned} 8! - 6! \times 3! &= 6!\,(7 \times 8 - 3!) = 6! \times 2\,(28-3) \\ &= 6! \times 50 = 720 \times 50 \\ &= 36000 \end{aligned}$$

சான்று 15 ஒரே நிறமுள்ள வட்டுகள் பிரித்தறியத்தகாதவை எனில், 4 சிவப்பு, 3 மஞ்சள், 2 பச்சை ஆகிய நிறமான வட்டுகளை ஒரு வரிசையில் எத்தனை வழிகளில் அடுக்கலாம்?

தீர்வு வட்டுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $4 + 3 + 2 = 9$. இந்த 9இல் 4 ஒருவகையானவை (சிவப்பு); 3 இரண்டாம்வகையானவை (மஞ்சள்); 2 மூன்றாம்வகையானவை (பச்சை). எனவே, எடுத்தடுக்கல்களின் எண்ணிக்கை

$$\frac{9!}{4!\,3!\,2!} = 1260$$

சான்று 16 $INDEPENDENCE$ என்ற சொல்லின் எழுத்துகளின் முறைமைமாற்றல்களின் எண்ணிக்கையை காண்க. இவற்றுள் எத்தனை அடுக்கல்களில்

(அ) சொற்கள் Pயில் தொடங்கு கின்றன?

(ஆ) எல்லா உயிரெழுத்துகளும் (A, E, I, O, U) சேர்ந்திருக்கின்றன?

(இ) உயிரெழுத்துகள் சேர்ந்தில்லை?

(ஈ) சொற்கள் Iயில் தொடங்கி Pயில் முடிகின்றன?

தீர்வு 12 எழுத்துகள் உள்ளன. N 3 முறையும் E 4 முறையும் D 2 முறையும் வருகின்றன. எஞ்சி யவை வெவ்வேறானவை. எனவே இவற்றை

$$\frac{12!}{3!\,4!\,21} = 1663200$$

வழிகளில் எடுத்தடுக்கலாம் (முறைமைமாற்ற லாம்).

(அ) Pயை முதலெழுத்தாக வைத்தபின் எஞ்சிய 11 எழுத்துகளையும்

$$\frac{11!}{3!\,4!\,2!} = 138600$$

வழிகளில் அடுக்கலாம்.

(ஆ) கொடுத்த சொல்லில் $4\,E, 1\,I$ என்ற 5 உயிரெழுத்துகள் உள்ளன. இவை சேர்ந்து வரவேண்டுமென்பதால், முதலில் அவற்றை $(EEEEI)$ என்ற ஒற்றையெழுத்தாக கருதுவோம். இதுவும் எஞ்சிய 7 எழுத்துகளுமாக 8 எழுத்துகள் உள்ளன. இவற்றுள் N மூன்றுமுறையும் D இரண்டுமுறையும் வருகின்றன. இவற்றை

$$\frac{8!}{3!\,2!}$$

வழிகளில் அடுக்கலாம். இவற்றுள் ஒவ்வொன்றிலும் E, E, E, E, I ஆகிய ஐந்து உயிரெழுத்துகளையும் முறைமைமாற்றலாம். இதற்கான வழிகள் $5!/4!$. எனவே, பெருக்கற்கொள்கையால் நமக்கு வேண்டியது

$$\frac{8!}{3!\,2!} \times \frac{5!}{4!} = 16800$$

அடுக்கல்கள்.

(இ) தேவையான அடுக்கல்களின் எண்ணிக்கை = (நெறிப்புறுத்தம் இல்லாத) மொத்த அடுக்கல்களின் எண்ணிக்கை – எல்லா உயிரெழுத்துகளும் சேர்ந்து வரும் அடுக்கல்களின் எண்ணிக்கை

$$1663200 - 16800 = 1646400$$

(ஈ) Iயையும் Pயையும் நுனிகளில் வைத்தபின், எஞ்சிய 10 எழுத்துகளை

$$\frac{10!}{3!\,2!\,4!} = 12600$$

வழிகளில் எடுத்தடுக்கலாம். எனவே தேவையான எண்ணிக்கை 12600.

பயிற்சி 7.3

1 எந்த இலக்கமும் மீள்வரலாகாது எனில், 1இலிருந்து 9வரையான இலக்கங்களால் எத்தனை 3இலக்க எண்களை உருவாக்கலாம்?

2 எந்த இலக்கமும் மீள்வராமல் எத்தனை 4இலக்க எண்கள் உள்ளன?

3 எந்த இலக்கமும் மீள்வராமல், 1,2,3,4,6,7 ஆகிய இலக்கங்களால் எத்தனை *3*இலக்க இரட்டைப்படையெண்களை உருவாக்கலாம்?

4 எந்த இலக்கமும் மீள்வலாகாது எனில், $1,2\ 3,4,5$ ஆகிய இலக்கங்களால் எத்தனை *4*இலக்க எண்களை உருவாக்கலாம்? இவற்றுள் எத்தனை இரடைப்படை?

5 ஒரு மனிதர் ஒன்றுக்குமேற்பட்ட பொறுப்பை வகிக்கவியலாது எனில், *8*பேர் அடங்கிய செயற்குழுவிலிருந்து ஒரு தலைவரையும் ஒரு துணைத்தலைவரையும் தேர்ந்தெடுக்க எத்தனை வழிகள் உள்ளன?

6 ${}^{n-1}P_3 : {}^{n}P_4 = 1:9$ எனில் nஐ காண்க.

7 (அ) ${}^{5}P_r = 2\ {}^{6}P_{r-1}$ (ஆ) ${}^{5}P_r = {}^{6}P_{r-1}$ எனில், rஐ காண்க.

8 $EQUATION$ என்ற சொல்லின் எல்லா எழுத்துகளுள் ஒவ்வொன்றையும் முழுச்சரியாக ஒருமுறை பயன்படுத்தி எத்தனை சரங்களை உண்டாக்கலாம்?

9 எந்த எழுத்தும் மீள்வராது என்ற எடுகோளுடன், $MONDAY$ என்ற சொல்லிலிருந்து கீழ்க்கண்ட நிலைமைகளில் உருவாகும் சரங்களின் எண்ணிக்கைகள் யாவை?

a. ஒரு சரத்தில் *4* எழுத்துகள் பயன்படுகின்றன

b. ஒரு சரத்தில் எல்லா எழுத்துகளும் பயன்படுகின்றன

c. ஒரு சரத்தில் எல்லா எழுத்துகளும் பயன்படுகின்றன; ஆனால் முதலெழுத்து உயிரெழுத்து. (A, E, I, O, U உயிரெழுத்துகள்).

10 $MISSISSIPPI$ என்ற சொல்லின் எழுத்துகளின் எத்தனை வெவ்வேறு முறைமைமாற்றல்களில் நான்கு Iகளும் சேர்ந்து வரவில்லை?

11 $PERMUTATIONS$ என்ற சொல்லின் எழுத்துகளை கீழ்க்காணும் நிலைமைகளில் எத்தனை வழிகளில் அடுக்கலாம்?

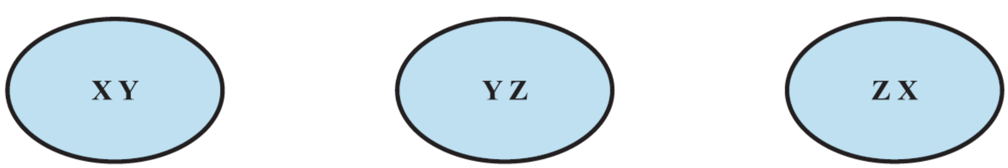
a. சரங்கள் Pயில் தொடங்கி Sஇல் முடிகின்றன

b. எல்லா உயிரெழுத்துகளும் சேர்ந்து இருக்கின்றன (A, E, I, O, U உயிரெழுத்துகள்)

c. Pக்கும் Sக்குமிடையில் எப்போதும் 4 எழுத்துகள் உள்ளன

7.4 எடுத்தல்கள்

X, Y, Z என்ற மூன்று பூப்பந்தாட்டர்கள் இருப்பதாக கொள்வோம். இவர்களிலிருந்து இரண்டுபேரடங்கிய ஒரு அணியை நாம் உருவாக்கவேண்டும். இதை எத்தனைவழிகளில் செய்யலாம்? Xஉம் Yஉம் அடங்கிய அணி Yஉம் Xஉம் அடங்கிய அணியிலிருந்து வேறுபட்டதா? இங்கு முறைமை முக்கியமன்று. உண்மையில் அணியை உருவாக்க மூன்று வழிகள் இருக்கின்றன. அவை XY, YZ, ZX ஆகியவை (படம் 7.3).



படம் 7.3

இங்கு, ஒவ்வொரு அணியும் மூன்று பேரிலிருந்து இரண்டுபேரை தேர்ந்தெடுத்து உருவாக்கியது. இவ்வாறு தேர்ந்தெடுப்பதை சுருக்கமாக எடுத்தல் என்கிறோம்.

மேலும் சில சான்றுகளை காண்போம்.

12 மனிதர்கள் ஒரு அறையில் சந்திக்கிறார்கள். ஒவ்வொருவரும் மற்ற ஒவ்வொருவரையும் சந்தித்துப்பேசுகிறார்கள். சந்திப்புகளின் எண்ணிக்கையை எவ்வாறு கணக்கிடலாம்? X Yயுடன் உரையாடுவதும் Y Xஉடன் உரையாடுவதும் வெவ்வேறு நிகழ்வுகளா? இங்கு முறைமை முக்கியமன்று. சந்திப்புகளின் எண்ணிக்கை 12 பொருள்களிலிருந்து ஒவ்வொரு முறையும் 2

பொருள்களை தேர்ந்தெடுக்கும் எடுத்தல்களின் எண்ணிக்கைக்கு சமம்.

ஒரு வட்டத்தில் ஏழு புள்ளிகள் இருக்கின்றன. இவற்றை ஒன்றுடனொன்று இணைப்பதன்மூலம் எத்தனை நாண்களை வரையலாம்? ஏழு பொருள் களிலிருந்து 2 பொருள்களை எத்தனைவழிகளில் எடுக்கலாமோ அத்தனை நாண்கள்.

இப்போது n பொருள்களிலிருந்து r பொருள் களை எடுப்பதற்கான வாய்ப்பாட்டை பெறுவோம். இதை ${}^nC_r$ என்று குறிக்கிறோம்.

A, B, C, D ஆகிய நான்கு வெவ்வேறு பொருள்களிலிருந்து இரண்டு பொருள்களை எடுக்க, AB, AC, AD, BC, BD, CD ஆகிய வழிகள் இருக்கின்றன. இங்கு ABயை எடுப்பதற்கும் BAவை எடுப்பதற்கும் வேறுபாடில்லை. இரண்டு நிகழ்வு களும் ஒரே சோடியை தருகின்றன. அதாவது எடுக்கும் முறைமை முக்கியமில்லை. இதனாலே நாம் மேற்கண்ட பட்டியலில் BA, CA, DA, CB, DB, DC ஆகியவற்றை சேர்க்கவில்லை. இவ்வாறு, நான்கு பொருள்களிலிருந்து இரண்டிரண்டாக எடுக்க 6 வழிகள் இருக்கின்றன. அதாவது ${}^6C_2 = 6$.

பட்டியலிலுள்ள ஒவ்வொரு எடுத்தலுக்கும் நிகராக $2!$ முறைமைமாற்றங்கள் இருக்கின்றன; ஏனெனில், ஒவ்வொரு எடுத்தலிலுமுள்ள இரண்டு பொருள்களையும் $2!$ வழிகளில் முறைமைமாற்ற லாம். எனவே, நான்கிலிருந்து இரண்டை எடுத்து அடுக்க ${}^4C_2 \times 2!$ வழிகள் உள்ளன.

மறுபக்கமாக, நான்கு பொருள்களிலிருந்து இரண்டு பொருள்களை எடுத்தடுக்கும் வழிகள் ${}^4P_2$ என்பதை நாம் ஏற்கனவே அறிவோம். எனவே,

$${}^4P_2 = {}^4C_2 \times 2!$$

அடுத்ததாக, A, B, C, D, E, F என்ற 5 பொருள்களிலிருந்து. மும்மூன்றாக எடுக்க $ABC, ABD, ABE, BCD, BCE, CDE, ACE, ACD, BDE$ ஆகிய வழிகள் இருக்கின்றன. இந்த ${}^5C_3$ எடுத்தல்களுள் ஒவ்வொன்றுக்கும் நிகராக $3!$ முறைமைமாற்றல்கள் உள்ளன; ஏனெனில், 3 பொருள்களை $3!$ வழிகளில் முறைமைமாற்றலாம். எனவே, மொத்த எடுத்தடுக்கல்கள் ${}^5C_3 \times 3!$. எனவே,

$${}^5P_3 = {}^5C_3 \times 3! \qquad \text{அதாவது } \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = {}^5C_3$$

இந்த சான்றுகள் எடுத்தலுக்கும் எடுத்தடுக்கலுக்கிமிடையில் கீழ்க்காணும் உறவை மொழிவுரைக்கின்றன.

தேற்றம் 5 ${}^nP_r = {}^nC_r\, r!\quad 0 < r \le n$

நிறுவல் ${}^nC_r$இலுள்ள ஒவ்வொரு எடுத்தலுக்கும் நிகராக $r!$ முறைமைமாற்றல்கள் இருக்கின்றன; ஏனெனில், ஒவ்வொரு எடுத்தலிலுமுள்ள r பொருள்களை $r!$ வழிகளில் முறைமைமாற்றலாம். எனவே, n தனிப்பட்ட பொருள்களிலிருந்து r பொருள்களை எடுத்து அடுக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை ${}^nC_r \times r!$. மறுபக்கமாக, இதுவே ${}^nP_r$. எனவே

$${}^nP_r = {}^nC_r \times r!, \qquad 0 < r \le n$$

குறிப்புரை 1. மேலுள்ளதிலிருந்து

$$\frac{n!}{(n-r)!} = {}^nC_r \times r!; \quad \text{அதாவது } {}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

என்று பெறுகிறோம். குறிப்பாக, $r = n$ எனில்

$${}^nC_n = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$$

2. ${}^0C_0 = 1$ என்று வரையறுக்கிறோம். அதாவது n பொருள்களிலிருந்து சுழியப்பொருள்களை எடுக்க ஒரே வழி உள்ளது; அதாவது எதையும் எடுக்காமலிருப்பது.

3. ${}^nC_r$க்கு நாம் வருவித்த வாய்ப்பாடு $r = 0$ என்றபோதும் சரியாகிறது.

$${}^nC_0 = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = 1$$

எனவே

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}, \qquad 0 \le r \le n$$

4. n பொருள்களிலிருந்து r பொருள்களை எடுப்பதும் $n-r$ பொருள்களை எடுப்பதும் சமானமானவை. இது எவ்வாறு என்று சிந்தித்துப்பாருங்கள். கணிதப்படியும் இது சரியாகிறது.

$${}^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,\big(n-(n-r)\big)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = {}^nC_r$$

5. ${}^nC_a = {}^nC_b \Rightarrow a = b$ஓ $a = n-b$ஓ

அதாவது ${}^nC_a = {}^nC_b$ எனில், $a = b$ என்பதோ $a = n-b$ என்பதோ மெய்.

தேற்றம் 6 ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

நிறுவல்

$${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!}{r \times (r-1)!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right)$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} \times \frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!\,(n-r+1)!} = {}^{n+1}C_r$$

சான்று 17 ${}^nC_9 = {}^nC_8$ எனில், ${}^nC_{17}$ஐ காண்க.

தீர்வு ${}^nC_9 = {}^nC_8$ என்பதால்

$$\frac{n!}{9!\,(n-9)!} = \frac{n!}{(n-8)!\,8!}$$

அதாவது $\frac{1}{9} = \frac{1}{n-8}, \quad n-8 = 9, \quad n = 17$

எனவே, ${}^nC_{17} = {}^{17}C_{17} = 1$

சான்று 18 2 ஆண்களும் 3 பெண்களும் அடங்கிய ஒரு குழுவிலிருந்து 3 மனிதர்கள் அடங்கிய ஒரு செயற்குழுவை உருவாக்க வேண்டும். இதை எத்தனை வழிகளில் செய்யலாம்? இவற்றுள் எத்தனை செயற்குழுக் களில் 1 ஆணும் 2 பெண்ணும் இருப்பார்கள்?

தீர்வு இங்கு முறைமை முக்கியமில்லை. எனவே நாம் எடுத்தல்களை எண்ணவேண்டும். செயற்குழுக்களின் எண்ணிக்கை 5 தனிப்பட்ட பொருள்களிலிருந்து 3 பொருள்களை எடுக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கைக்கு சமம். அதாவது

$${}^{5}C_3 = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{4 \times 5}{2} = 10$$

ஒரு ஆணை இரண்டு ஆண்களிலிருந்து எடுக்கும் வழிகள் ${}^{2}C_1$; இரண்டு பெண்களை மூன்று பெண்களிலிருந்து எடுக்கும் வழிகள் ${}^{3}C_2$. எனவே, இவ்வாறான செயற்குழுக்களின் எண்ணிக்கை

$${}^{2}C_1 \times {}^{3}C_2 = \frac{2!}{1!\,1!} \times \frac{3!}{2!\,1!} = 6$$

சான்று 19 சீட்டுக்கட்டின் 52 சீட்டுகளிலிருந்து 4 சீட்டுகளை உருவ எத்தனை வழிகள் உள்ளன? இவற்றுள் எத்தனையில்

(அ) நான்கு சீட்டுகளும் ஒரே வகையானவை?

(ஆ) நான்கு சீட்டுகளும் நான்கு வெவ்வேறு வகையானவை?

(இ) நான்கும் முகச்சீட்டுகள்?

(ஈ) இரண்டு சிவப்பும் இரண்டு கருப்பும்?

(உ) நான்கும் ஒரே நிறத்தவை?

தீர்வு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து 4 சீட்டுகளை உருவும் வழிகளின் எண்ணிக்கை 52 பொருள்களி லிருந்து 4 பொருள்களை எடுப்பதற்கு சமானம். எனவே

$${}^{52}C_4 = \frac{52!}{4!\,48!} = \frac{49 \times 50 \times 51 \times 52}{2 \times 3 \times 4} = 270725$$

(அ) நான்கு வகைகள் உள்ளன. அவை சதுரம், மூவிலை, வேல், இதயம் ஆகியவை. ஒவ்வொரு வகையிலும் 13 சீட்டுகள் உள்ளன. எனவே 4 சதுரங்களை எடுக்க ${}^{13}C_4$ வழிகள் உள்ளன. இதைப்போல், 4 மூவிலைகளை எடுக்க ${}^{13}C_4$ வழிகளும் 4 வேல்களை எடுக்க ${}^{13}C_4$ வழிகளும் 4 இதயங்களை எடுக்க ${}^{13}C_4$ வழிகளும் உள்ளன. எனவே, ஒரே வகையான 4 சீட்டுகள் எடுக்க

$${}^{13}C_4 + {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4 = 4 \times \frac{13!}{4!\,9!} = 2860$$

(ஆ) ஒவ்வொரு வகையிலும் 13 சீட்டுகள் உள்ளன. எனவே 13 சதுரங்களிலிருந்து ஒன்றை எடுக்க ${}^{13}C_1$ வழிகளும், 13 மூவிலைகளிலிருந்து ஒன்றை எடுக்க ${}^{13}C_1$ வழிகளும், 13 வேல்களிலிருந்து ஒன்றை எடுக்க ${}^{13}C_1$ வழிகளும், 13 இதயங்களிலிருந்து ஒன்றை எடுக்க ${}^{13}C_1$ வழிகளும் உள்ளன. எனவே பெருக்கற்கொள்கையால், ஒவ்வொரு வகையிலிருந்தும் ஒவ்வொரு சீட்டு எடுக்க

$${}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 = 13^4$$

வழிகள் உள்ளன.

(இ) சீட்டுக்கட்டில் ஒவ்வொரு வகையிலும் அரசன், அரசி, படைத்தலைவன் ஆகிய மூன்றாக மொத்தம் 12 முகச்சீட்டுகள் உள்ளன. இவற்றிலிருந்து 4 எடுக்க

$${}^{12}C_4 = \frac{12!}{4!\,8!} = 495$$

வழிகள் உள்ளன.

(ஈ) 26 சிவப்புச்சீட்டுகளும் 26 கருப்புச்சீட்டுகளும் இருப்பதால் இரண்டு சிவப்பையும் இரண்டு கருப்பையும் எடுக்க

$${}^{26}C_2 \times {}^{26}C_2 = 2 \times \frac{26!}{4!\,22!} = 29900$$

வழிகள் உள்ளன.

பயிற்சி 7.4

1. ${}^{n}C_8 = {}^{n}C_2$ எனில், ${}^{n}C_2$ஐ காண்க.
2. (அ) ${}^{2n}C_3 : {}^{n}C_3 = 12:1$ (ஆ) ${}^{2n}C_3 : {}^{n}C_3 = 11:1$ எனில், nஐ தீர்மானிக்க.
3. ஒரு வட்டத்தின் 21 புள்ளிகளின்வழியாக எத்தனை நாண்களை வரையலாம்?
4. 5 சிறுவன்களும் 4 சிறுமிகளும் அடங்கிய குழுவிலிருந்து 3 சிறுவன்களும் 3 சிறுமிகளும் அடங்கிய அணியை எத்தனை வழிகளில் எடுக்கலாம்?
5. 6 சிவப்புப்பந்துகள், 5 வெள்ளைப்பந்துகள், 5 நீலப்பந்துகள் ஆகியவற்றிலிருந்து ஒவ்வொரு நிறத்திலும் 3 பந்துகள் இருக்கும்படி 9 பந்துகளை எத்தனை வழிகளில் எடுக்கலாம்?
6. 52 சீட்டுகளடங்கிய கட்டிலிருந்து ஒவ்வொன்றிலும் முழுச்சரியாக ஒரு ஆசி இருக்கும்படி 5 சீட்டுகளுள்ள எத்தனை சேர்வுகளை எடுக்கலாம்?
7. 11 விளையாட்டர்கள் அடங்கிய ஒரு மட்டைப்பந்தணியில் முழுச்சரியாக 4 வீசுநர்கள் இருக்கும்படி 5 வீசுநர்கள் அடங்கிய 17 விளையாட்டாளர்களின் குழுவிலிருந்து எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?
8. ஒரு பையில் 5 கருப்புப்பந்துகளும் 6 சிவப்புப்பந்துகளும் உள்ளன. 2 கருப்புப்பந்துகளையும் 3 சிவப்புப்பந்துகளையும் தேர்ந்தெடுக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கையை தீர்மானிக்க.
9. ஒவ்வொரு மாணவருக்கும் குறிப்பிட்ட 2 பாடத்தொகுதிகள் கட்டாயம் எனில், 9 பாடத்தொகுதி களிலிருந்து ஒரு மாணவர் 5 பாடத்தொகுதிகளை தேர்ந்தெடுக்க எத்தனை வழிகள் உள்ளன?

10 ^nC_rக்கான வாய்ப்பாடு எப்போதும் முழுவெண்ணை விடையாக தருகிறதா? விளக்குக.

பலவகையான சான்றுகள்

சான்று 20 $INVOLUTE$ என்ற சொல்லிலிருந்து 3 உயிரெழுத்துகளும் 2 மெய்யெழுத்துகளுமுள்ள பொருளுள்ளதோ பொருளற்றதோவான எத்தனை சொற்களை உருவாக்கலாம்? (A, E, I, O, U உயிரெழுத்துகள்; மற்றவை மெய்யெழுத்துகள்).

தீர்வு $INVOLUTE$ என்ற சொல்லில் I, O, E, U ஆகிய 4 உயிரெழுத்துகளும் N, V, L, T ஆகிய 4 மெய்யெழுத்துகளும் உள்ளன. நான்கிலிருந்து மூன்று உயிரெழுத்துகளை எடுக்க $^4C_3 = 4$ வழிகளும் நான்கிலிருந்து இரண்டு மெய்யெழுத்துகளை எடுக்க $^4C_2 = 6$ வழிகளும் உள்ளன. எனவே 3 உயிரெழுத்துகளும் 2 மெய்யெழுத்துகளுமுள்ள சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை $4 \times 6 = 24$.

இந்த 24 சேர்வுகளுள் ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள 5 எழுத்துகளை அவற்றுக்குள்ளே முறைமை மாற்ற 5! வழிகள் உள்ளன. எனவே, நமக்குத் தேவையான வெவ்வேறு சொற்களின் எண்ணிக்கை $24 \times 5! = 2880$.

சான்று 22 'கங்கணம்' என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துகளால் பொருளுள்ளதோ பொருளற்றதோ, இலக்கணத்துக்குட்பட்டதோ உட்படாததோவான எத்தனை சொற்களை ஆக்கலாம்? இவற்றை அகரமுறைமையில் எழுதினால் 50ஆம் சொல் என்ன?

தீர்வு இந்த சொல்லில் 5 எழுத்துகள் உள்ளன. கானா (க) இரண்டுமுறை வருகிறது. எனவே சொற்களின் எண்ணிக்கை $5!/2! = 60$.

கானாவில் தொடங்கும் சொற்களை எண்ண, முதலெழுத்தாக கானாவை வைத்து எஞ்சிய 4 எழுத்துகளையும் மாற்றடுக்குகிறோம். இதற்கு $^4P_4$ வழிகள் உள்ளன. எனவே, கானாவில் தொடங்கும் சொற்களின் எண்ணிக்கை $4! = 24$. அடுத்து, இங்ஙன்னாவில் (ங்) தொடங்கும் சொற்கள் $4!/2! = 12$ இருக்கின்றன. இங்ஙன்னாவை எடுத்தபின் எஞ்சிய எழுத்துகளில் கானா இரண்டுமுறை வருவதை நோக்குக. இதைப்போலவே ணானாவில் தொடங்குபவையும் 12. இதுவரை பெற்ற சொற்களின் கூட்டுத்தொகை $24 + 12 + 12 = 48$. அடுத்த (49ஆம்) சொல் ம்ககங்ண என்றிருக்கும். 50ஆம் சொல் ம்ககணங்.

(இவற்றுக்கு பொருளில்லாததால் சொற்கள் என்று அழைப்பது தவறாகலாம். எழுத்துச் சரங்கள் என்று வேண்டுமெனில் சொல்லலாம்.)

சான்று 23 1, 2, 0, 2, 4, 2, 4 ஆகிய இலக்கங்களிலிருந்து 1000000ஐவிட அதிகமான எத்தனை எண்களை உருவாக்கலாம்?

தீர்வு 1000000 ஒரு 7இலக்க எண் என்பதாலும் 7 இலக்கங்களே கொடுக்கப்பட்டிருப்பதாலும் நாம் முழுச்சரியாக 7 இலக்கங்களை பயன்படுத்தவேண்டும். எண்கள் சுழியத்தில் தொடங்கவியலாது; அவ்வாறு தொடங்கினால் அது 6இலக்க எண்ணாகிவிடும். எனவே நம் எண்கள் $1, 2, 4$ ஆகியவற்றில் தொடங்கலாம். 1இல் தொடங்கும் எண்களின் எண்ணிக்கையை காண, 1ஐ முதலிடத்தில் வைத்து எஞ்சிய $0, 2, 2$, 2, 4, 4 ஆகியவற்றிலிருந்து 6 இலக்கங்களை எடுத்தடுக்குகிறோம். இவற்றுள் 2 மூன்றுமுறையும் 4 இரண்டுமுறையும் வருவதால்

$$\frac{^6P_6}{3!\,2!} = \frac{6!}{3!\,2!} = \frac{4 \times 5 \times 6}{2} = 60$$

எண்கள் 1இல் தொடங்குகின்றன. இதைப்போல, 2இல் தொடங்கும் எண்களின் எண்ணிக்கை $6!/2!\,2! = 180$ என்றும், 4இல் தொடங்குபவை $6!/3! = 120$ என்றும் அறிகிறோம். எனவே, மொத்த எண்கள் $60 + 180 + 120 = 360$.

மறுவழி

7இலக்க எண்களின் எண்ணிக்கை $7!/3!\,2! = 420$ என்பது தெளிவு. ஆனால் இதில் 0த்தில் தொடங்கும் எண்களும் அடங்குகின்றன. சுழியத்தில் தொடங்கும் எண்கள் $6!/3!\,2! = 60$. எனவே, எஞ்சியவை $420 - 60 = 360$.

குறிப்பு பட்டியலில் கொடுத்த ஒரு இலக்கமோ பலவோ மீண்டும் வந்தால், எந்த எண்ணிலும் ஒரு இலக்கத்தை அது பட்டியலில் எத்தனைமுறை வருகிறதோ அத்தனைமுறை பயன்படுத்தலாம் என்று புரிந்துகொள்கிறோம். மேலுள்ள சான்றில் 1ஐயும் 0த்தையும் ஒருமுறையே பயன்படுத்தவேண்டும்: ஆனால் 2ஐ 3 முறையும் 4ஐ இரண்டுமுறையும் பயன்படுத்தினோம்.

சான்று 24 5 சிறுமிகளையும் 3 சிறுவன்களையும் இரண்டு சிறுவன்கள் சேர்ந்திருக்காமல் எத்தனை வழிகளில் வரிசையாக அமரவைக்கலாம்?

தீர்வு முதலில் 5 சிறுமிகளை அமரவைப்போம். இதை 5! வழிகளில் செய்யலாம். இந்த ஒவ்வொரு அடுக்கத்துக்கும் மூன்று சிறுவன்களை x என்று குறித்த இடங்களில் அமர்த்தலாம். சிறுமிகள் இருக்குமிடங்களை மி என்று குறிக்கிறோம்.

x மி x மி x மி x மி x மி x

இப்போது, x என்று குறித்த 6 இடங்களில் 3 சிறுவன்களை அமர்த்தவேண்டும். இதை $^6P_3$ வழிகளில் செய்யலாம். எனவே பெருக்கற்கொள்கையால், மொத்த வழிகளை

$$5! \times {}^6P_3 = 5! \times \frac{6!}{3!} = 4 \times 5 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 14400$$

என்று காண்கிறோம்.

ஏழாம் படலத்தில் பலவகையான பயிற்சிகள்

1 $DAUGHTER$ என்ற சொல்லின் எழுத்துகளிலிருந்து 2 உயிரெழுத்துகளும் 3 மெய்யெழுத்துகளுமுள்ள பொருளுள்ளதோ பொருளற்றதோவான எத்தனை சொற்களை உண்டாக்கலாம்? (A, E, I, O, U உயிரெழுத்துகள்; மற்றவை மெய்யெழுத்துகள்).

2 $EQUATION$ என்ற சொல்லின் எழுத்துகளை பயன்படுத்தி உயிரெழுத்துகளும் மெய்யெழுத்துகளும் சேர்ந்து வருமாறு பொருளுள்ளதோ பொருளற்றதோவான எத்தனை சொற்களை உண்டாக்கலாம்?

3 9 சிறுவன்களும் 4 சிறுமிகளும் அடங்கிய குழுவிலிருந்து 7பேர் அடங்கிய ஒரு செயற்குழுவை உருவாக்கவேண்டும். கீழ்க்காணும் உள்ளடக்கமுள்ள செயற்குழுக்களை எத்தனை வழிகளில் உருவாக்கலாம்?

a. முழுச்சரியாக 3 சிறுமிகள் b. மீச்சிறுமமாக 3 சிறுமிகள் c. மீப்பெருமமாக 3 சிறுமிகள்

4 $EXAMINATION$ என்ற சொல்லின் எல்லா முறைமைமாற்றங்களையும் அகரமுறைமையில் பட்டியலிடுகிறோம். Eயில் தொடங்கும் முதற்சொல்லுக்குமுன் எத்தனை எழுத்துகள் இருக்கின்றன? (அகரமுறைமையில் A Eக்குமுன்னும் மற்றவை பின்னும் வருகின்றன).

5 $0, 1, 3, 5, 7, 9$ ஆகிய இலக்கங்களிலிருந்து எந்த இலக்கமும் மீள்வராதவாறும் 10ஆல் வகுபடுமாறும் எத்தனை 6இலக்க எண்களை உண்டாக்கலாம்?

6 ஒரு மொழியில் 5 வளியெழுத்துகளும் 21 திண்ணெழுத்துகளும் உள்ளன. இரண்டு வெவ்வேறு வளியெழுத்துகளும் இரண்டு வெவ்வேறு திண்ணெழுத்துகளுமுள்ள எத்தனை சொற்களை உருவாக்கலாம்?

7 ஒரு தேர்வாய்வின் கேள்வித்தாளில் 12 கேள்விகள் இரண்டு பகுதிகளில் உள்ளன. முதற்பகுதியில் 5 கேள்விகளும் இரண்டாம் பகுதியில் 7 கேள்விகளும் உள்ளன. ஒரு மாணவர் ஒவ்வொரு பகுதியிலிருந்தும் மீச்சிறுமமாக 3 கேள்விகளை எடுத்து மொத்தம் 8 கேள்விகளுக்கு விடையளிக்கவேண்டும். மாணவர் எத்தனை வழிகளில் கேள்விகளை தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

8 52 சீட்டுகளுள்ள கட்டிலிருந்து ஒவ்வொன்றிலும் முழுச்சரியாக ஒரு அரசன் இருக்குமாறு எத்தனை ஐந்துசீட்டுச்சேர்வுகளை எடுக்கலாம்?

9 5 மனிதன்களையும் 4 மனிதிகளையும் மனிதிகள் இரட்டைப்படையான இடங்களில் இருக்குமாறு எத்தனை வழிகளில் அமர்த்தலாம்?

10 25 மாணவர்களுள்ள ஒரு வகுப்பிலிருந்து 10பேரை ஒரு சுற்றுலாவுக்கு தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும். 3 மாணவர்கள் தாங்கள் அனைவரும் செல்வது அன்றேல் அவர்களுள் யாரும் செல்வதில்லை என்று முடிவெடுக்கின்றனர். சுற்றுலாக்குழுவை எத்தனை வழிகளில் எடுக்கலாம்?

11 $ASSASSINATION$ என்ற சொல்லின் எழுத்துகளை எல்லா Sகளும் சேர்ந்திருக்குமாறு எத்தனை வழிகளில் முறைமைமாற்றலாம்?

சுருக்கவுரை

- *எண்ணலின் அடிப்படைக்கொள்கை* ஒரு நிகழ்வு m வெவ்வேறு வழிகளில் நிகழலாம் என்றும் அதைத்தொடர்ந்து மற்றொரு நிகழ்வு n வெவ்வேறு வழிகளில் நிகழலாம் என்றுமிருந்தால், அவை நிகழ்வதன் மொத்த வழிகள் $m \times n$.
- n தனிப்பட்ட பொருள்களிலிருந்து r பொருள்களை மீட்செயலின்றி எடுத்தடுக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை
$$^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}, \qquad 0 \le r \le n$$
- $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$
- $n! = n \times (n-1)!$
- n தனிப்பட்ட பொருள்களிலிருந்து r பொருள்களை மீட்செயலுடன் எடுத்தடுக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை n^r.
- n பொருள்களுள் p_1 பொருள்கள் ஒரு வகையாகவும் p_2 பொருள்கள் மற்றொரு வகையாகவும் … p_k பொருள்கள் kஆம் வகையாகவும் இருந்தால் அவற்றை
$$\frac{n!}{p_1!\, p_2! \ldots p_k!}$$
வழிகளில் எடுத்தடுக்கலாம்.
- n தனிப்பட்ட பொருள்களிலிருந்து r பொருள்களை தேர்ந்தெடுக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை
$$^{n}C_{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$