படலம் 8

ஈருறுப்புத்தேற்றம்

கணிதம் மிகவும் துல்லியமான அறிவியல்; இதன் முடிவுகள் முழுமையான சான்றுகளை வழங்கும் திறனுள்ளவை – சா. பு. சுதைன்மெட்சு

8.1 அறிமுகம்

முந்தைய வகுப்புகளில், $a+b$, $a-b$ ஆகிய ஈருறுப்புகளின் வரக்கங்களையும் கனவங்களையும் எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பது என்று கற்றோம். அவற்றை பயன்படுத்தி, $(98)^2=(100-2)^2$, $(999)^3=(1000-1)^3$ போன்ற எண்களின் எண் மதிப்புகளை நாம் மதிப்பறியலாம். இருப்பினும், $(98)^5$, $(106)^6$ போன்ற உயர் அடுக்குகளுக்கு மீண்டும் மீண்டும் பெருக்குவதன் கணக்கீடுகள் கடினமாகின்றன. இந்த கணக்கீடுகளை ஈருறுப்புத் தேற்றம் எனப்படும் தேற்றம் எளிதாக்குகிறது. இது $(a+b)^n$ஐ விரிவாக்க ஒரு எளிய முறையை தருகிறது; இங்கு n முழுவெண்ணாகவோ விகித முறு எண்ணாகவோ இருக்கலாம். இந்த படலத்தில், நேர்ம முழுவெண்ணான அடுக்கெண்களுக்கு ஈருறுப்புத்தேற்றத்தை படிப்போம்.

8.2 நேர்ம முழுவெண்ணுக்கான ஈருறுப்புத்தேற்றம்

முன்பு வருவித்த சில முற்றொருமைகளை மீள்காண்போம்.

$$(a+b)^0=1, \qquad a+b\neq 0$$

$$(a+b)^1=a+b$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a+b)^4=(a+b)^3(a+b)$$

$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

இந்த விரிவாக்கங்களில் கீழ்க்காணும் கண்டறிதல்களை நாம் பார்க்கிறோம்.

(i) விரிவாக்கத்திலுள்ள மொத்த உருபுகளின் எண்ணிக்கை அடுக்கெண்ணைவிட ஒன்று அதிகமாக இருப்பதை கவனிக்கிறோம். சான்றாக, $(a+b)^2$ இன் விரிவாக்கத்தில், $(a+b)^2$ இன் அடுக்கெண் 2; உருபுகளின் எண்ணிக்கை 3.

(ii) அடுத்தடுத்த உருபுகளில் முதலுறுப்பான aயின் அடுக்கெண் ஒவ்வொன்றாக குறைந்து கொண்டுபோகிறது; இரண்டாமுறுப்பான bயின் அடுக்கெண் ஒவ்வொன்றாக கூடுகிறது.

பிளேயிசு பாசுக்கல் (1623-1662)

(iii) விரிவாக்கத்தின் ஒவ்வொரு உருபிலும் a, bயின் அடுக்கெண்களின் கூட்டுத்தொகை ஒரே மதிப்புள்ளது: இது $a+b$யின் அடுக்கெண்ணுக்கு சமம்.

இப்போது இந்த விரிவாக்கங்களிலுள்ள கெழுக்களை பின்வருமாறு அடுக்கலாம் *(படம் 8.1)*:

சுட்டெண்	கெழுக்கள்
0	**1**
1	**1 1**
2	**1 2 1**
3	**1 3 3 1**
4	**1 4 6 4 1**

படம் 8.1

இந்த அட்டவணையில் ஒரு பாங்கை கவனிக்கிறீர்களா? அந்த பாங்கை பயன்படுத்தி அடுத்த வரியை எழுதலாமா? ஆம், முதல் வரியில் அடுத்தடுத்த இரண்டு எண்களை கூட்டினால் அடுத்த வரியில் அவற்றின்கீழுள்ள எண் கிடைக்கிறது. ஒவ்வொரு வரியின் நுனிகளிலும் 1 இருக்கிறது. இதை நாம் வேண்டும் அடுக்கெண்வரை தொடரலாம்.

மேலும் சில வரிகளை எழுதுவதன் மூலம் படம் 8.2இலுள்ள வடிவத்தை நீட்டலாம்.

சுட்டெண்	கெழுக்கள்
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1

படம் 8.2

பாசுக்கலின் முக்கோணம்

படம் 8.2இலுள்ள கட்டமைப்பு, உச்சியிலும் இரண்டு பக்கங்களிலும் 1களாலான ஒரு முக்கோணம்போல் தோன்றுகிறது. இந்த எண்களின் அணியை பிரான்சிய கணிதவியல ரான பிளேயிசு பாசுக்கலின் பெயரால் பாசுக்கலின் முக்கோணம் என்று அழைக்கிறோம்.

பாசுக்கலின் முக்கோணத்தை பயன்படுத்து வதால் ஈருறுப்பின் உயர் அடுக்குகளுக்கான விரிவாக்கங்கள் சாத்தியமாகின்றன. பாசுக்கலின் முக்கோணத்தை பயன்படுத்தி $(2x+3y)^5$ஐ விரிவாக்குவோம். 5 என்ற அடுக்கெண்ணுக்கான வரி

1 5 10 10 5 1

இந்த வரியையும் மேற்கண்ட மூன்று கண்டறிதல்களையும் பயன்படுத்தி

$$
\begin{aligned}
(2x+3y)^5 = {} & (2x)^5 + 5(2x)^4\,(3y) \\
& + 10(2x)^3\,(3y)^2 \\
& + 10\,(2x)^2\,(3y)^3 + 5(2x)(3y)^4 \\
& + (3y)^5 \\
= {} & 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 \\
& + 810xy^4 + 243y^5.
\end{aligned}
$$

என்று பெறுகிறோம்.

இப்போது, நாம் $(2x+3y)^{12}$இன் விரிவாக்கத்தை காண விரும்பினால், முதலில் 12 என்ற அடுக்கெண்ணுக்கான பாசுக்கலின் முக் கோணவரியை பெறவேண்டும். முக்கோணத்தின் வரிகளை தேவையான அடுக்கெண்வரை எழுதுவதன்மூலம் இதை செய்யலாம். இது சற்று நீளமான செயல். மேலும் பெரிய அடுக்குகளுக்கான விரிவாக்கங்கள் மேலும் கடினமானவை என்பதை நீங்கள் உணரலாம்.

பாசுக்கலின் முக்கோணத்தில் நாம் விரும்பும் அடுக்கெண்ணுக்கு மேலுள்ள வரிகளை எழுதாமலே நமக்கு வேண்டிய வரியை எழுதும் ஒரு விதியை கண்டுபிடிக்க முயல்வோம்.

இதற்காக, முன்பு நாம் படித்த எடுத்தல்களின் எண்ணிக்கையை பயன்படுத்தி பாசுக்கலின் முக்கோணத்திலுள்ள எண்களை எழுதுகிறோம்.

n என்ற எதிர்மமற்ற முழுவெண்ணுக்கு,

$$ {}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\,, \qquad 0 \le r \le n $$

என்பதும் ${}^nC_0 = 1 = {}^nC_n$ என்பதும் நாமறிந்தவை.

பாசுக்கலின் முக்கோணத்தை இப்போது கீழ்க்காணுமாறு எழுதலாம் (படம் 8.3)

சுட்டெண்	கெழுக்கள்
0	${}^0C_0$ (=1)
1	${}^1C_0$ (=1) ${}^1C_1$ (=1)
2	${}^2C_0$ (=1) ${}^2C_1$ (=2) ${}^2C_2$ (=1)
3	${}^3C_0$ (=1) ${}^3C_1$ (=3) ${}^3C_2$ (=3) ${}^3C_3$ (=1)
4	${}^4C_0$ (=1) ${}^4C_1$ (=4) ${}^4C_2$ (=6) ${}^4C_3$ (=4) ${}^4C_4$ (=1)
5	${}^5C_0$ (=1) ${}^5C_1$ (=5) ${}^5C_2$ (=10) ${}^5C_3$ (=10) ${}^5C_4$ (=5) ${}^5C_5$ (=1)

படம் 8.3 பாசுக்கலின் முக்கோணம்

இந்த பாங்கை கவனித்து முந்தைய வரிகளை எழுதாமல் எந்த அடுக்கெண்ணுக்கும் பாசுக்கலின் முக்கோணவரியை இப்போது எழுதலாம். சான்றாக, 7 என்ற அடுக்கெண்ணுக்கான வரி

${}^7C_0 \quad {}^7C_1 \quad {}^7C_2 \quad {}^7C_3 \quad {}^7C_4 \quad {}^7C_5 \quad {}^7C_6 \quad {}^7C_7$

எனவே, இந்த வரியையும் நாம் முன்பு கண்ட மூன்று கண்டறிதல்களையும் பயன்படுத்தி

$$(a+b)^7 = {}^7C_0a^7 + {}^7C_1a^6b + {}^7C_2a^5b^2 + {}^7C_3a^4b^3 + {}^7C_4a^3b^4 + {}^7C_5a^2b^5 + {}^7C_6ab^6 + {}^7C_7b^7$$

என்பதை பெறுகிறோம். இந்த கண்டறிதல்களால் n என்ற எந்த நேர்ம முழுவெண்ணான அடுக்கெண்ணுக்கும் ஈருறுப்புவிரிவாக்கத்தை நாம் மனங்காணலாம். இப்போது எந்த நேர்ம முழுவெண்ணுக்கும் ஈருறுப்புவிரிவாக்கத்தை எழுதும் நிலையில் இருக்கிறோம்.

8.2.1 நேர்ம முழுவெண்ணுக்கான ஈருறுப்புத்தேற்றம்

$$(a+b)^n = {}^nC_0a^n + {}^nC_1a^{n-1}b + {}^nC_2a^{n-2}b^2 + \ldots + {}^nC_{n-1}ab^{n-1} + {}^nC_nb^n$$

நிறுவல் கணிதத்தூண்டலின் கொள்கையை பயனாக்கி இதை நிறுவுகிறோம்.

நிறுவவேண்டிய கூற்றை இவ்வாறு எழுதுவோம்.

$$P(n): (a+b)^n = {}^nC_0a^n + {}^nC_1a^{n-1}b + {}^nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}^nC_{n-1}ab^{n-1} + {}^nC_nb^n$$

$n = 1$ என்றபோது

$$P(1): (a+b)^1 = {}^1C_0a^1 + {}^1C_1b^1 = a+b$$

என்பதால், $P(1)$ மெய்.

ஏதோவொரு நேர்ம முழுவெண்ணான kக்கு $P(k)$ மெய் என்று எடுகொள்வோம். அதாவது

$$(a+b)^k = {}^kC_0a^k + {}^kC_1a^{k-1}b + {}^kC_2a^{k-2}b^2 + \cdots + {}^kC_kb^k \qquad (8.1)$$

என்பது தூண்டற்கருதுகோள். இப்போது $P(k+1)$ மெய் என்று நிறுவுவோம். அதாவது

$$(a+b)^{k+1} = {}^{k+1}C_0\, a^{k+1} + {}^{(k+1)}C_1a^kb + {}^{k+1}C_2a^{k-1}b^2 + \cdots + {}^{k+1}C_{k+1}b^{k+1}$$

என்று நிறுவவேண்டும். (8.1)ஆம் சமன்பாடு

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = (a+b)\left({}^kC_0a^k + {}^kC_1a^{k-1}b + {}^kC_2a^{k-2}b^2 + \cdots + {}^kC_{k-1}ab^{k-1} + {}^kC_kb^k\right)$$

என்பதை தருகிறது. பெருக்கலை செய்துமுடித்து

$$(a+b)^{k+1} = {}^kC_0a^{k+1} + {}^kC_1a^kb + {}^kC_2a^{k-1}b^2 + \ldots + {}^kC_{k-1}a^2b^{k-1} + {}^kC_kab^k + {}^kC_0a^kb + {}^kC_1a^{k-1}b^2 + {}^kC_2a^{k-2}b^3 + \ldots + {}^kC_{k-1}ab^k + {}^kC_kb^{k+1}$$

என்றும், ஒத்த உருபுகளை சேர்த்து

$$(a+b)^{k+1} = {}^kC_0a^{k+1} + \left({}^kC_0 + {}^kC_1\right)a^kb + \left({}^kC_1 + {}^kC_2\right)a^{k-1}b^2 + \cdots + \left({}^kC_k + {}^kC_{k-1}\right)ab^k + {}^kC_kb^{k+1}$$

என்றும் பெறுகிறோம். இப்போது

$${}^kC_0 = 1 = {}^{k+1}C_0, \quad {}^kC_r + {}^kC_{r-1} = {}^{k+1}C_r, \quad {}^kC_k = 1 = {}^{k+1}C_{k+1}$$

ஆகியவற்றை பயன்படுத்தி

$$(a+b)^{k+1} = {}^{k+1}C_0a^{k+1} + {}^{k+1}C_1a^kb + {}^{k+1}C_2a^{(k-1)}b^2 + \cdots + {}^{k+1}C_kab^k + {}^{k+1}C_{k+1}b^{k+1}$$

என்று பெறுகிறோம். இவ்வாறு, $P(k)$ மெய் எனில், $P(k+1)$ மெய் என்று நிறுவியிருக்கிறோம். எனவே, கணிதத்தூண்டலின் அடிப்படையில், ஒவ்வொரு நேர்ம முழுவெண்ணான nக்கும் $P(n)$ மெய்.

இந்த தேற்றத்தை எடுத்துக்காட்ட $(x+2)^6$ஐ விரிவாக்குவோம்:

$$(x+2)^6 = {}^6C_0\, x^6 + {}^6C_1x^5.2 + {}^6C_2x^42^2 + {}^6C_3x^3.2^3 + {}^6C_4x^2.2^4 + {}^6C_5x.2^5 + {}^6C_6.2^6 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$$

கண்டறிதல்கள்

1. $\sum_{k=0}^{n} {}^nC_ka^{n-k}b^k$ என்ற குறியீடு ${}^nC_0a^nb^0 + {}^nC_1a^{n-1}b^1 + \cdots + {}^nC_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}^nC_na^0b^n$ஐ குறிக்கிறது. இங்கு $b^0 = 1 = a^{n-n}$. எனவே தேற்றத்தை

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_ka^{n-k}b^k$$

என்றும் உரைக்கலாம்.

2. ஈருறுப்புத்தேற்றத்தில் வரும் ${}^nC_r$ என்ற கெழுக்களை ஈருறுப்புக்கெழுக்கள் என்கிறோம்.

3. $(a+b)^n$இன் விரிவாக்கத்தில் $(n+1)$ உருபுகள் உள்ளன; அதாவது அடுக்கெண்ணைவிட ஒன்று அதிகம்.

4. விரிவாக்கத்தின் அடுத்தடுத்த உருபுகளில் aயின் அடுக்கெண் ஒவ்வொன்றாக குறைகிறது. அது முதலுருபில் nஇல் தொடங்கி இரண்டாமுருபில் $(n-1)$ ஆகி, இவ்வாறே குறைந்து இறுதியுருபில் சுழியமாகிறது. அதே நேரத்தில் bயின் அடுக்கெண் முதலுருபில் சுழியத்தில் தொடங்கி ஒவ்வொன்றாக அதிகரித்து இறுதியுருபில் n ஆகிறது.

5. $(a+b)^n$இன் விரிவாக்கத்தில், a, b ஆகியவற்றின் அடுக்கெண்களின் கூட்டுத்தொகை முதலுருபில் $n+0=n$, இரண்டாமுருபில் $(n-1)+1=n$, என்றிவ்வாறே சென்று இறுதியுருபில் $0+n=n$ ஆகிறது. இவ்வாறு, விரிவாக்கத்தின் ஒவ்வொரு உருபிலும் a, b ஆகியவற்றின் குறியீடுகளின் கூட்டுத்தொகை n என்று காண்கிறோம்.

8.2.2 சில தனித்துவ வேற்றவங்கள்

$(a+b)^n$ இன் விரிவாக்கத்தில்

(அ) $a = x, b = -y$ என்று எடுத்து

$$(x - y)^n = [x + (-y)]^n$$
$$= {}^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1}(-y) + {}^nC_2x^{n-2}(-y)^2 + {}^nC_3x^{n-3}(-y)^3 + \cdots + {}^nC_n(-y)^n$$
$$= {}^nC_0x^n - {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 - {}^nC_3x^{n-3}y^3 + \ldots + (-1)^n\,{}^nC_n\,y^n$$

என்பதை பெறுகிறோம். சான்றாக

$$(x-2y)^5 = {}^5C_0x^5 - {}^5C_1x^4(2y) + {}^5C_2x^3(2y)^2 - {}^5C_3x^2(2y)^3 + {}^5C_4x(2y)^4 - {}^5C_5(2y)^5 = x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5$$

(ஆ) $a = 1, b = x$ என்று எடுத்து,

$$(1+x)^n = {}^nC_0 1^n + {}^nC_1 1^{n-1}x + {}^nC_2 1^{n-2}x^2 + \cdots + {}^nC_nx^n$$
$$= {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + \ldots + {}^nC_nx^n$$

என்பதை பெறுகிறோம். குறிப்பாக, $x = 1$க்கு

$$2^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \cdots + {}^nC_n.$$

என்றாகிறது.

(இ) $a = 1, b = -x$ என்று எடுத்து

$$(1-x)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 - \ldots + (-1)^n\,{}^nC_nx^n$$

என்பதை பெறுகிறோம் குறிப்பாக, $x = 1$க்கு,

$$0 = {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \ldots + (-1)^n\,{}^nC_n$$

என்றாகிறது.

சான்று 1

$\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4$ ஐ $x \neq 0$ என்றபோது விரிவாக்குக.

தீர்வு ஈருறுப்புத்தேற்றத்தை பயன்படுத்தி

$$\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4 = {}^4C_0(x^2)^4 + {}^4C_1(x^2)^3\left(\frac{3}{x}\right) + {}^4C_2(x^2)^2\left(\frac{3}{x}\right)^2 + {}^4C_3(x^2)\left(\frac{3}{x}\right)^3 + {}^4C_4\left(\frac{3}{x}\right)^4$$
$$= x^8 + 4.x^6.\frac{3}{x} + 6.x^4.\frac{9}{x^2} + 4.x^2.\frac{27}{x^3} + \frac{81}{x^4}$$
$$= x^8 + 12x^5 + 54x^2 + \frac{108}{x} + \frac{81}{x^4}$$

என்ற விடையை பெறுகிறோம்.

சான்று 2 $(98)^5$ஐ கணக்கிடுக.

தீர்வு 98ஐ இரண்டு எண்களின் கூட்டுத் தொகையாகவோ வேறுபாடாகவே எழுதினால் கணக்கீடு எளிதாகும்.

$98 = 100 - 2$ என எழுதுவோம். எனவே,

$$(98)^5 = (100 - 2)^5$$
$$= {}^5C_0(100)^5 - {}^5C_1(100)^4.2 + {}^5C_2(100)^3 2^2 - {}^5C_3(100)^2(2)^3 + {}^5C_4(100)(2)^4 - {}^5C_5(2)^5$$
$$= 10000000000 - 5 \times 100000000 \times 2 + 10 \times 1000000 \times 4 - 10 \times 10000 \times 8 + 5 \times 100 \times 16 - 32$$
$$= 10040008000 - 1000800032$$
$$= 9039207968$$

சான்று 3 $(1.01)^{1000000}$, 10,000 ஆகியவற்றுள் எது பெரிது?

தீர்வு 1.01ஐ பிரித்து ஈருறுப்புத்தேற்றத்தை பயன்படுத்தி முதல் சில உருபுகளை எழுதுவோம்.

$$(1.01)^{1000000} = (1 + 0.01)^{1000000}$$
$$= {}^{1000000}C_0 + {}^{1000000}C_1(0.01) + \text{மற்ற நேர்ம உருபுகள்}$$
$$= 1 + 1000000 \times 0.01 + \text{மற்ற நேர்ம உருபுகள்}$$
$$= 1 + 10000 + \text{மற்ற நேர்ம உருபுகள்} > 10000$$

எனவே, $(1.01)^{1000000} > 10000$

சான்று 4 ஈருறுப்புத்தேற்றத்தப்பயன்படுத்தி, $6^n - 5n$ஐ 25 ஆல் வகுக்கும்போது எப்போதும் மீதி 1 கிடைக்கிறது என்று நிறுவுக.

தீர்வு a, b என்ற இரண்டு எண்களுக்கு $a = bq + r, r < b$ என்றிருக்குமாறு q, r என்ற இரண்டு எண்களை காணவியன்றால், aயை b வகுத்து qவை ஈவாகவும் rஐ மீதியாகவும் தருகிறது என்கிறோம். எனவே, $6n - 5n$ஐ 25ஆல் வகுக்கும்போது 1 மீதி உள்ளது என்று காட்ட, $6^n - 5n = 25k + 1$ (k இயலெண்) என்று நிறுவவேண்டும்.

$$(1+a)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1a + {}^nC_2a^2 + \cdots + {}^nC_na^n$$

என்ற ஈருறுப்புவிரிவாக்கத்தை கருதுவோம். $a = 5$ என்றபோது

$$(1+5)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 5 + {}^nC_2 5^2 + \cdots + {}^nC_n 5^n$$

அதாவது,

$$(6)^n = 1 + 5n + 5^2.\,{}^nC_2 + 5^3.\,{}^nC_3 + \ldots + 5^n$$
$$6^n - 5n = 1 + 5^2\left({}^nC_2 + {}^nC_3 5 + \ldots + 5^{n-2}\right)$$
$$6^n - 5n = 1 + 25\left({}^nC_2 + 5.\,{}^nC_3 + \ldots + 5^{n-2}\right)$$

இதை $6^n - 5n = 25k + 1$ என்று எழுதலாம்; இங்கு $k = {}^nC_2 + 5\,{}^nC_3 + \cdots + 5^{n-2}$. எனவே, $6^n - 5n$ஐ 25ஆல் வகுக்கும்போது 1 மீதி கிடைக்கிறது.

பயிற்சி *8.1*

1இலிருந்து 5வரையான பயிற்சிகளிலுள்ள கோவைகளை விரிவாக்குக.

1 $(1-2x)^5$

2 $\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{2}\right)^5$

3 $(2x-3)^6$

4 $\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{x}\right)^5$

5 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$

6முதல் 9வரையானவற்றை ஈருறுப்புத்தேற்றத்தால் மதிப்பறிக.

6 $(96)^3$

7 $(102)^5$

8 $(101)^4$

9 $(99)^5$

10 ஈருறுப்புத்தேற்றத்தை பயன்படுத்தி 1.1^{10000}, 1000 ஆகியவற்றுள் எது பெரிது எனக்காண்க.

11 $(a+b)^4-(a-b)^4$ ஐ காண்க. அதிலிருந்து $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^4-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^4$ஐ மதிப்பறிக

12 $(x+1)^6+(x-1)^6$ஐ காண்க. அதிலிருந்து $\left(\sqrt{2}+1\right)^6+\left(\sqrt{2}-1\right)^6$ஐ மதிப்பறிக.

13 n நேர்ம முழுவெண் என்றபோது $9^{n+1}-8n-9$ என்ற கோவை 64ஆல் வகுபடுகிறது என்று காட்டுக.

14 நிறுவுக:

$$\sum_{r=0}^{n} 3^r\,{}^nC_r = 4^n$$

8.3 பொதுவுருபும் நடுவுருபும்

1. $(a+b)^n$க்கான ஈருறுப்புவிரிவாக்கத்தில், முதல் உருபு ${}^nC_0a^n$, இரண்டாவது உருபு ${}^nC_1a^{n-1}b$, மூன்றாவது உருபு ${}^nC_2a^{n-2}b^2$, இன்ன பிற. அடுத்தடுத்த உருபுகளின் பாங்கை பார்க்கும்போது $(r+1)$ஆம் உருபு ${}^nC_ra^{n-r}b^r$ என்றுரைக்கலாம். இந்த $(r+1)$ஆம் உருபை $(a+b)^n$இன் விரிவாக்கத்தின் பொதுவுருபு என்று அழைத்து T_{r+1} என்று குறிக்கிறோம்.. இவ்வாறு, $T_{r+1}={}^nC_ra^{n-r}b^r$.

2. $(a+b)^n$இன் விரிவாக்கத்தில் நடுவிலுள்ள உருபை கருதும்போது இரண்டு வேற்றுவங்களை காண்கிறோம்.

(அ) n இரட்டைப்படை எனில், விரிவாக்கத்திலுள்ள உருபுகளின் எண்ணிக்கையான $n+1$ ஒற்றைப்படை. எனவே, $(n+1+1)/2$ஆம் உருபு நடுவுருபு; அதாவது $(n/2+1)$ஆம் உருபு. சான்றாக, $(x+2y)^8$இன் விரிவாக்கத்தில், நடுவுருபு $(8/2+1)$ஆம் உருபு; அதாவது 5ஆம் உருபு.

(ஆ) n ஒற்றைப்படை எனில், $n+1$ இரட்டைப்படை. எனவே கணித விரிவாக்கத்தில் இரண்டு நடுவுருபுகள் இருக்கின்றன. $(n+1)/2$ஆம் உருபும் $((n+1)/2+1)$ஆம் உருபும் நடுவுருபுகள். சான்றாக, $(2x-y)^7$இன் விரிவாக்கத்தில் , நடுவுருபுகள் $(7+1)/2$ஆம் உருபும் $((7+1)/2+1)$ஆம் உருபும்; அதாவது 4ஆம், 5ஆம் உருபுகள்.

3. $(x+1/x)^{2n}$இன் விரிவாக்கத்தில், $x\neq 0$ என்றபோது, $2n$ இரட்டை என்பதால் நடுவுருபு $(2n+1+1)/2$, அதாவது $(n+1)$ஆம் உருபு. அந்த உருபு ${}^{2n}C_nx^n(1/x)^n={}^{2n}C_n$ இந்த உருபு xஐ சாராத மாறிலி.

சான்று 5 $(2+a)^{50}$இன் விரிவாக்கத்தின் 17ஆம், 18ஆம் உருபுகள் சமம் எனில், aஐ காண்க.

தீர்வு $(x+y)^n$இன் விரிகவாக்கத்தின் $(r+1)$ஆம் உருபு $T_{r+1}={}^nC_rx^{n-r}y^r$. முதலுறுப்பு $r=0$த்துக்கு நிகராவதால் 17ஆம் உருபு $r=16$க்கு நிகராகிறது. எனவே,

$$T_{17}=T_{16+1}={}^{50}C_{16}2^{50-16}a^{16}={}^{50}C_{16}2^{34}a^{16}$$

இதைப்போல், $T_{18}={}^{50}C_{17}2^{33}a^{17}$

$T_{17}=T_{18}$ என்பதால்,

${}^{50}C_{16}2^{34}a^{16}={}^{50}C_{17}2^{33}a^{17}$. எனவே,

$$\frac{{}^{50}C_{16}2^{34}}{{}^{50}C_{17}2^{33}}=\frac{a^{17}}{a^{16}}$$

$$a=\frac{{}^{50}C_{16}\times 2}{{}^{50}C_{17}}=\frac{50!}{16!\,34!}\times\frac{17!\,33!}{50!}\times 2=1$$

சான்று 6 $(1+x)^{2n}$ இன் விரிவாக்கத்திலுள்ள நடுவுருபு $1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\,2^n\,x^n/n!$ என்று காட்டுக; இங்கு n நேர்ம முழுவெண்.

தீர்வு $2n$ இரட்டைப்படையாக இருப்பதால், $(1+x)^{2n}$இன் விரிவாக்கத்தின் நடுவுருபு $(2n/2+1)$ஆம் உருபு; அதாவது $(n+1)$ஆம் உருபு.

$$T_{n+1}={}^{2n}C_n(1)^{2n-n}(x)^n={}^{2n}C_nx^n=\frac{(2n)!}{n!\,n!}x^n$$

$$=\frac{2n(2n-1)(2n-2)\quad\ldots 4.3.2.1}{n!\,n!}x^n$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots(2n-2)(2n-1)2n}{n!\,n!}x^n$$
$$= \frac{[1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)][2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)]}{n!\,n!}x^n$$
$$= \frac{[1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)]2^n[1\cdot 2\cdot 3\ldots n]}{n!\,n!}x^n$$
$$= \frac{[1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)]n!}{n!\,n!}2^n\,x^n$$
$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{n!}2^n\,x^n$$

சான்று 7 $(x+2y)^9$இன் விரிவாக்கத்தில் x^6y^3இன் கெழுவை காண்க .

தீர்வு $(x+2y)^9$இன் விரிவாக்கத்தில் $(r+1)$ஆம் உருபு x^6y^3 என்க.

இப்போது ,

$T_{r+1} = {}^9C_r x^{9-r}(2y)^r = {}^9C_r 2^r x^{9-r} y^r.$

x^6y^3இலும் T_{r+1}இலுமுள்ள x, yகளின் அடுக்கெண்களை ஒப்பிட்டு $r=3$ என்று காண்கிறோம். எனவே, x^6y^3இன் கெழு

$${}^9C_3\,2^3 = \frac{9!}{3!\,6!}2^3 = \frac{9\times 8\times 7}{3\times 2}2^3 = 672$$

சான்று 8 $(x+a)^n$இன் ஈருறுப்புவிரிவாக்கத்தின் இரண்டாம், மூன்றாம், நான்காம் உருபுகள் முறையே 240, 720, 1080 எனில், x, a, n ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளிலிருந்து

$$T_2 = {}^nC_1 x^{n-1}a = 240 \qquad (8.2)$$
$$T_3 = {}^nC_2 x^{n-2}a^2 = 720 \qquad (8.3)$$
$$T_4 = {}^nC_3 x^{n-3}a^3 = 1080 \qquad (8.4)$$

என்ற சமன்பாடுகளை பெறுகிறோம். (8.3)ஆம் சமன்பாட்டை (8.2)ஆல் வகுத்து

$$\frac{{}^nC_2 x^{n-2}a^2}{{}^cC_1 x^{n-1}\,a} = \frac{720}{240}, \qquad \text{அதாவது}\ \frac{(n-1)!\,a}{(n-2)!\,x} = 6$$

$$\frac{a}{x} = \frac{6}{(n-1)} \qquad (8.5)$$

என்று பெறுகிறோம். (8.4)ஆம் சமன்பாட்டை (8.3)ஆல் வகுத்து

$$\frac{a}{x} = \frac{9}{2(n-2)} \qquad (8.6)$$

என்று பெறுகிறோம். (8.5), (8.6)ஆம் சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\frac{6}{n-1} = \frac{9}{2(n-2)}, \qquad \text{அதாவது}\ n = 5.$$

எனவே, (8.2)இலிருந்து $5x^4a = 240$; (8.5)இலிருந்து $a/x = 3/2$. இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளை தீர்த்து $x=2$, $a=3$ என்று பெறுகிறோம்.

சான்று 9 $(1+a)^n$இன் விரிவாக்கத்தின் அடுத்தடுத்த மூன்று உருபுகளின் விகிதம் 1: 7: 42 எனில், nஐ காண்க.

தீர்வு $(1+a)^n$இன் விரிவாக்கத்தின் அடுத்தடுத்த மூன்று உருபுகளை $(r-1)$ஆம், rஆம், $(r+1)$ஆம் உருபுகள் என்போம். $(r-1)$ஆம் உருபு ${}^nC_{r-2}a^{r-2}$; அதன் கெழு ${}^nC_{r-2}$. இதைப்போல், rஆம் , $(r+1)$ஆம் உருபுகளின் கெழுக்கள் முறையே ${}^nC_{r-1}$, ${}^nC_r$.

இந்த கெழுக்களின் விகிதம் 1: 7; 42 என்றிருப்பதால்,

$$\frac{{}^nC_{r-2}}{{}^nC_{r-1}} = \frac{1}{7}, \text{அதாவது}\ n-8r+9=0 \qquad (8.7)$$
$$\frac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_r} = \frac{7}{42} \quad \text{அதாவது}\ n-7r+1=0 \qquad (8.8)$$

(8.7), (8.8)ஆகிய சமன்பாடுகளை தீர்த்து $n = 55$ என்று பெறுகிறோம்.

பயிற்சி 8.2

1 $(x+3)^8$இல் x^5இன் கெழுவை காண்க.
2 $(a-2b)^{12}$இல் a^5b^7இன் கெழுவை காண்க
3 $(x^2-y)^6$இன் விரிவாக்கத்தின் பொதுவுருபை எழுதுக.
4 $(x^2-yx)^{12}$இன் விரிவாக்கத்தின் பொதுவுருபை எழுதுக.
5 $(x-2y)^{12}$இன் விரிவாக்கத்தில் 4ஆம் உருபை காண்க.
6 $\left(9x-1/(3\sqrt{x})\right)^{18}$இன் விரிவாக்கத்தில் 13ஆம் உருபை காண்க; $x \neq 0$.
7 $(3-x^3/6)^7$இன் விரிவாக்கத்தில் நடுவுருபை காண்க.
8 $(x/3+9y)^{10}$இன் விரிவாக்கத்தில் நடுவுருபை காண்க.
9 $(1+a)^{m+n}$இன் விரிவாக்கத்தில் a^mஇன் கெழுவும் a^nஇன் கெழுவும் சமம் என்று நிறுவுக.
10 $(x+1)^n$இன் விரிவாக்கத்தில் $(r-1)$ஆம், rஆம், $(r+1)$ஆம் உருபுகளின் கெழுக்கள் 1: 3: 5 என்ற விகிதத்தில் இருக்கின்றன. nஐயும் rஐயும் காண்க.
11 $(1+x)^{2n}$இன் விரிவாக்கத்தில் x^nஇன் கெழு $(1+x)^{2n-1}$இன் விரிவாக்கத்தில் x^nஇன் கெழுவின் இருமடங்கு என நிறுவுக.
12 $(1+x)^m$ இன் விரிவாக்கத்தில் x^2இன் கெழு 6ஆக இருக்கும்படி mஇன் நேரிய மதிப்பை காண்க.

சான்று 10 கீழ்க்காணும் விரிவாக்கத்தில் xஇன் சார்பற்ற உருபை காண்க.

$$\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^6$$

தீர்வு

$$T_{r+1} = {}^6C_r\left(\frac{3}{2}x^2\right)^{6-r}\ \left(-\frac{1}{3x}\right)^r$$
$$= {}^6C_r\left(\frac{3}{2}\right)^{6-r}(x^2)^{6-r}(-1)^r\left(\frac{1}{x}\right)^r\left(\frac{1}{3^r}\right)$$
$$= (-1)^r\cdot{}^6C_r\frac{3^{6-2r}}{2^{6-r}}x^{12-3r}$$

உருபு xஇன் சார்பின்றி இருக்கவேண்டுமெனில், xஇன் அடுக்கெண் சுழியமாகவேண்டும் அதாவது, $12-3r=0$; $r=4$. எனவே, 5ஆம் உருபு xஇன் சார்பற்றது. அந்த உருபு

$$(-1)^4\ {}^6C_4\frac{3^{6-8}}{2^{6-4}}x^{12-12}=\frac{5}{12}$$

சான்று 11 $(1+a)^n$ இன் விரிவாக்கத்தில் a^{r-1}, a^r, a^{r+1} ஆகியவற்றின் கெழுக்கள் கூட்டுத் தொடரியில் இருந்தால்,

$$n^2-n(4r+1)+4r^2-2=0$$

என்று நிறுவுக.

தீர்வு விரிவாக்கத்தில் $(r+1)$ஆம் உருபு ${}^nC_ra^r$. இவ்வாறு, a^r விரிவாக்கத்தின் $(r+1)$ஆம் உருபில் இருப்பதையும் அதன் கெழு ${}^nC_r$ என்பதையும் காணலாம். எனவே a^{r-1}, a^r, a^{r+1} ஆகியவற்றின் கெழுக்கள் முறையே ${}^nC_{r-1}$, ${}^nC_r$, ${}^nC_{r+1}$ ஆகியவை. இந்த கெழுக்கள் கூட்டுத்தொடரியில் இருப்பதால், ${}^nC_{r-1}+{}^nC_{r+1}=2\,{}^nC_r$. அதாவது

$$\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}+\frac{n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!}=2\times\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$\frac{1}{(r-1)!\,(n-r+1)(n-r)(n-r-1)!}+\frac{1}{(r+1)r(r-1)!\,(n-r-1)!}=2\times\frac{1}{r(r-1)!\,(n-r)(n-r-1)!}$$

$$\frac{1}{(r-1)!\,(n-r-1)!}\left[\frac{1}{(n-r)(n-r+1)}+\frac{1}{(r+1)r}\right]=2\times\frac{1}{(r-1)!\,(n-r-1)!\,[r(n-r)]}$$

$$\frac{1}{(n-r+1)(n-r)}+\frac{1}{r(r+1)}=\frac{2}{r(n-r)}$$

$$\frac{r(r+1)+(n-r)(n-r+1)}{(n-r)(n-r+1)r(r+1)}=\frac{2}{r(n-r)}$$

$$r(r+1)+(n-r)(n-r+1)=2(r+1)(n-r+1$$

$$r^2+r+n^2-nr+n-nr+r^2-r=2(nr-r^2+r+n-r+1)$$

$$n^2-4\,nr-n+4\,r^2-2=0$$

$$n^2-n(4r+1)+4\,r^2-2=0$$

சான்று 12 $(1+x)^{2n}$இன் விரிவாக்கத்தின் நடுவுருபின் கெழு $(1+x)^{2n-1}$இன் விரிவாக்கத்தின் இரண்டு நடுவுருபுகளின் கெழுக்களின் கூட்டுத்தொகைக்கு சமம் என்று காட்டுக.

தீர்வு $2n$ இரட்டைபடை. எனவே $(1+x)^{2n}$இன் விரிவாக்கத்தில் ஒரு நடுவுருபு உள்ளது. அது $\left(\frac{2n}{2}+1\right)$ஆம் உருபு, அதாவது, $(n+1)$ஆம் உருபு. இந்த உருபு ${}^{2n}C_nx^n$. எனவே x^nஇன் கெழு ${}^{2n}C_n$.

$(2n-1)$ ஒற்றைப்படை என்பதால்,

$(1+x)^{2n-1}$இன் விரிவாக்கத்தில் இரண்டு நடுவுருபுகள் உள்ளன. அவை

$(2n-1+1)/2$ஆம் உருபும்,

$((2n-1+1)/2+1)$ஆம் உருபும்.

அதாவது nஆம் உருபும் $(n+1)$ஆம் உருபும். இவற்றின் கெழுக்கள் முறையே ${}^{2n-1}C_{n-1}$, ${}^{2n-1}C_n$. இப்போது,

$${}^nC_{r-1}+{}^nC_r={}^{n+1}C_r$$

என்ற சமன்பாட்டின்படி

$${}^{2n-1}C_{n-1}+{}^{2n-1}C_n={}^{2n}C_n$$

இதுவே நாம் நிறுவவேண்டியது.

சான்று 13 ஈருறுப்புத்தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $(1+2a)^4(2-a)^5$ என்ற பெருக்கலில் a^4இன் கெழுவை காண்க

தீர்வு பெருக்கலின் ஒவ்வொரு காரணியையும் முதலில் ஈருறுப்புத்தேற்றத்தால் விரிவாக்கு வோம்.

$$(1+2a)^4={}^4C_0+{}^4C_1(2a)+{}^4C_2(2a)^2+{}^4C_3(2a)^3+{}^4C_4(2a)^4$$
$$=1+4(2a)+6(4a^2)+4(8a^3)+16a^4$$
$$=1+8a+24a^2+32a^3+16a^4$$

$$(2-a)^5={}^5C_02^5-{}^5C_12^4a+{}^5C_22^3a^2-{}^5C_32^2a^3+{}^5C_42a^4-{}^5C_5a^5$$
$$=32-80a+80a^2-40a^3+10a^4-a^5$$

எனவே, பெருக்கல்

$$(1+2a)^4(2-a)^5$$
$$=(1+8a+24a^2+32a^3+16a^4)\times(32-80a+80a^2-40a^3+10a^4-a^5)$$

இந்த இரண்டு காரணிகளையும் முற்றிலும் பெருக்கி எழுதவேண்டியதில்லை. a^4க்கு பங்களிக்கும் உருபுகளை மட்டுமே எழுதுகிறோம். இதற்காக, $a^r a^{4-r} = a^4$ என்பதை கவனிக்கிறோம். எனவே a^4 உள்ள உருபுகள்

$$1(10a^4) + (8a(-40a^3) + (24a^2)(80a^2) + (32a^3)(-80a) + (16a^4)(32) = -438a^4$$

இவ்வாறு, நாம் கருதிய பெருக்கலில் a^4இன் கெழு -438.

சான்று 14 $(x+a)^n$ இன் விரிவாக்கத்தில் முடிவிலிருந்து rஆம் உருபை காண்க.

தீர்வு $(x+a)^n$இன் விரிவாக்கத்தில் $(n+1)$ உருபுகள் உள்ளன. முடிவிலிருந்து எண்ணும்போது முதலுறுப்பு என்பது விரிவாக்கத்தின் இறுதியுறுப்பு; அதாவது ${}^nC_n a^n$ என்ற உருபு. இவ்வாறே பின்னோக்கி எண்ணும்போது இரண்டாம் உருபு ${}^nC_{n-1} x a^{n-1}$; மூன்றாம் உருபு ${}^nC_{n-2} x^2 a^{n-2}$; நான்காம் உருபு ${}^nC_{n-3} x^3 a^{n-3}$; பொதுவாக rஆம் உருபு ${}^nC_{n-(r-1)} x^{r-1} a^{n-(r-1)} = {}^nC_{n-r+1} x^{r-1} a^{n-r+1}$.

சான்று 15 கீழ்க்காணும் கோவையின் வரிவாக்கத்தில் xஇன் சார்பற்ற உருபை காண்க.

$$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{18}, \qquad x > 0$$

தீர்வு

$$T_{r+1} = {}^{18}C_r \left(\sqrt[3]{x}\right)^{18-r} \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{x}}\right)^r$$
$$= {}^{18}C_r x^{(18-r)/3} \frac{1}{2^r x^{r/3}}$$
$$= {}^{18}C_r . \frac{1}{2^r} . x^{(18-2r)/3}$$

xசார்பற்ற உருபில் $(18-2r)/3 = 0$ என்றிருக்கவேண்டும். அதாவது $r = 9$. எனவே நமக்கு தேவையான உருபு ${}^{18}C_9 / 2^9$.

சான்று 16 $(x - 3/x^2)^m, x \neq 0$ (m இயலெண்) என்பதன் விரிவாக்கத்தில் முதல் மூன்று உருபுகளின் கெழுக்களின் கூட்டுத்தொகை 559. விரிவாக்கத்தின் x^3 உருபை காண்க.

தீர்வு $(x - 3/x^2)^m$இன் முதல் மூன்று உருபுகளின் கெழுக்கள் ${}^mC_0$, $-3\,{}^mC_1$, $9\,{}^mC_2$. இவற்றின் கூட்டுத்தொகை 559 என்று கொடுத்திருப்பதால்

$${}^mC_0 - 3\,{}^mC_1 + 9\,{}^mC_2 = 559$$

$$\text{அதாவது } 1 - 3m + \frac{9m(m-1)}{2} = 559$$

இதிலிருந்து m இயலெண் என்பதை பயன்படுத்தி, $m = 12$ என்று பெறுகிறோம். இப்போது,

$$T_{r+1} = {}^{12}C_r x^{12-r} \left(-\frac{3}{x^2}\right)^r = {}^{12}C_r (-3)^r x^{12-3r}$$

நாம் x^3 இருக்கும் உருபை வேண்டுவதால் $12 - 3r = 3$ என்று வைப்போம். இதனால் $r = 3$ கிடைக்கிறது. எனவே தேவையான உருபு ${}^{12}C_3 (-3)^3 x^3 = -5940\, x^3$.

சான்று 17 $(1+x)^{34}$இன் விரிவாக்கத்தில் $(r-5)$ஆம், $(2r-1)$ஆம் உருபுகளின் கெழுக்கள் சமமாக இருந்தால், rஐ காண்க.

தீர்வு $(r-5)$ஆம், $(2r-1)$ஆம் உருபுகளின் கெழுக்கள் ${}^{34}C_{r-6}$உம் ${}^{34}C_{2r-2}$உம். இவை சமமாக இருப்பதால்.

$${}^{34}C_{r-6} = {}^{34}C_{2r-2}$$

பொதுவாக ${}^nC_r = {}^nC_p$ என்பது $r = p$ என்பதாலோ $r = n - p$ என்பதாலோ ஏற்படலாம். எனவே, இங்கு $r - 6 = 2r - 2$ என்றோ $r - 6 = 34 - (2r - 2)$ என்றோ இருக்கவேண்டும். அதாவது, $r = -4, 14$ என்ற தீர்வுகளை பெறுகிறோம். r இயலெண் என்பதால் $r = 14$.

எட்டாம் படலத்தின் பலவகையான பயிற்சிகள்

1 $(a+b)^n$இன் விரிவாக்கத்தில் முதல் மூன்று உருபுகள் முறையே 729, 7290, 30375 எனில், a, b, n ஆகியவற்றை காண்க.

2 $(3+ax)^9$இன் விரிவாக்கத்தில் x^2, x^3 ஆகியவற்றின் கெழுக்கள் சமம் எனில், aயை காண்க.

3 ஈருறுப்புத்தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $(1+2x)^6(1-x)^7$ என்ற பெருக்கலில் x^5இன் கெழுவை காண்க.

4 aயும் bயும் தனிப்பட்ட முழுவெண்கள் எனில், n நேர்ம முழுவெண் என்றபோது $a^n - b^n$இல் $a - b$ ஒரு காரணி என்று நிறுவுக. (உதவி: $a^n = (a - b + b)^n$ என்று எழுதி விரிவாக்குக.)

5 $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^6 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^6$ஐ மதிப்பறிக.

6 $\left(a^2 + \sqrt{a^2 - 1}\right)^4 + (a^2 - \sqrt{a^2 - 1})^4$இன் மதிப்பை காண்க.

7 $(0.99)^5$இன் விரிவாக்கத்தின் முதல் மூன்று உருபுகளை பயன்படுத்தி அதன் தோராயத்தை காண்க.

8

$$\left(\sqrt[4]{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^n$$ இன்

விரிவாக்கத்தில், தொடக்கத்திலிருந்து ஐந்தாவது உருபுக்கும் முடிவிலிருந்து ஐந்தாவது உருபுக்குமான விகிதம் $\sqrt{6}:1$ எனில், nஐ காண்க.

9 ஈருறுப்புத்தேற்றத்தை பயன்படுத்தி

$$\left(1+\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^4$$ ஐ

விரிவாக்குக; $x \neq 0.$

10 ஈருறுப்புத்தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $(3x^2 - 2ax + 3a^2)^3$இன் விரிவாக்கத்தை காண்க.

சுருக்கவுரை

- விரிவாக்கங்களின் கெழுக்களை ஒரு அணியாக அடுக்கலாம். இந்த அடுக்கத்தை பாசுக்கலின் முக்கோணம் என்று அழைக்கிறோம்.
- $(a+b)^n$இன் விரிவாக்கத்தில் பொதுவான உருபு $T_{r+1} = {}^nC_r a^{n-r} b^r.$
- $(a+b)^n$இன் விரிவாக்கத்தில் n இரட்டையெண் எனில், $(n/2+1)$ஆம் உருபு நடுவுருபு. n ஒற்றையெண் எனில், $(n+1)/2$ஆம் உருபும் $((n+1)/2+1)$ஆம் உருபும் நடுவுருபுகள்.