படலம் 9

தொடரிகளும் தொடர்களும்

9.1 அறிமுகம்

தொடரி என்ற சொல்லை நாம் அன்றாட வாழ்வில் பயன்படுத்துவதுபோலவே கணிதத்திலும் பயன்படுத்துகிறோம். பொருள்களின் ஒரு தொகுதியை ஒரு தொடரியாக பட்டியலிடுகிறோம் என்றால், அந்த தொகுதியை முதல் உறுப்பினர், இரண்டாம் உறுப்பினர், மூன்றாம் உறுப்பினர் என்ற தொடராக எழுதிகிறோம் என்று பொருள். சான்றாக, வெவ்வேறு காலக்கட்டங்களிலுள்ள மனிதவினத்தொகையை ஒரு தொடரியாக எழுதலாம். பல ஆண்டுகளில் வங்கியில் செலுத்திய பணத்தின் அளவு ஒரு தொடரியாகிறது. ஒரு வணிகப்பொருளின் விலை நாளுக்குநாள் மாறுவது ஒரு தொடரி. தொடரிகள் மனிதச் செயல்களில் பலவிடங்களில் பயன்படுகின்றன.

குறிப்பிட்ட பாங்கை பின்பற்றும் தொடரிகளுக்கு சிறப்புப்பெயர்களை வழங்குகிறோம். சான்றாக, முந்திய வகுப்பில் கூட்டுத்தொடரியை படித்திருக்கிறீர்கள். இந்தப்படலத்தில் கூட்டுத் தொடரியை மேலும் உரையாற்றுவதுடன் கூட்டிடைமம், பெருக்கிடைமம், இவையிரண்டுக்குமிடையான தொடர்பு, ஆகியவற்றை படிப்போம். அடுத்தடுத்த n இயலெண்களின் கூட்டலின் தொடரி, இயலெண்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டல், இயலெண்களின் கனவங்களின் கூட்டல் ஆகிய தனித்துவத்தொடரிகளையும் படிப்போம்.

9.2 தொடரிகள்

ஒரு எளிய சான்றுடன் தொடங்குவோம்.

ஒரு குடும்பத்தில், தலைமுறையிடைவெளி 30 ஆண்டுகள் எனக்கொண்டால், 300 ஆண்டுகளில் பெற்றோர், பாட்டன்பாட்டி, பூட்டன்பூட்டி போன்ற தலைமுறைகளின் எண்ணிக்கையை $300/30 = 10$ என கணக்கிடலாம்.. அதாவது

தலைமுறைகளின் எண்ணிக்கை

$$= 300/30 = 10$$

ஒவ்வொரு தலைமுறையிலும் ஒருவரின் முன்னோர்களின் எண்ணிக்கை ஒரு தொடரி. அதாவது ஒருவருக்கு 2 பெற்றோரும் 4 தாத்தா பாட்டியும், 8 பூட்டன்பூட்டியும் என்றிவ்வாறே இருப்பதால் பத்து தலைமுறைகளுக்கு இந்த தொடரி $2, 4, 8, 16, 32, \ldots 1024$ என்றாகிறது.

சிபோனாச்சி
(1175-1250)

அடுத்த சான்றாக, 10ஐ 3ஆல் வகுக்கும்போது ஒவ்வொரு படியிலும் பெறும் ஈவுகளை கருதுவோம். இந்த நிகழ்முறையில் 3, 3.3, 3.33, 3.333, ... என்றவாறு பெறுகிறோம். இந்த ஈவுகளும் ஒரு தொடரியை உண்டாக்குகின்றன. தொடரியில் இடம் பெறும் எண்களை *உருபுகள்* என்கிறோம். தொடரியின் உருபுகளை $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ என்று குறிக்கிறோம். இங்கு அடியொட்டு உருபின் இடநிலையை குறிக்கிறது. அதாவது a_n தொடரியின் nஆம் உருபு.

இவ்வாறு, ஒருவரின் முன்னோர்களின் எண்ணிக்கையான தொடரியில்

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, \ldots, a_{10} = 1024$$

அடுத்தடுத்த ஈவுகளின் சான்றில்

$$a_1 = 3, a_2 = 3.3, a_3 = 3.33, \ldots, a_6 = 3.33333, \ldots$$

முடிவுறு எண்ணிக்கையான உருபுகளுள்ள ஒரு தொடரியை முடிவுறு தொடரி என்கிறோம். சான்றாக, மேலுள்ள முன்னோர்களின் தொடரி 10 தலைமுறைகளுக்கு செல்வதால் இதில் 10 உருபுகள் உள்ளன. எனவே இது ஒரு முடிவுறு தொடரி.

முடிவுறு தொடரியல்லாத ஒரு தொடரி முடிவிலாத்தொடரி. சான்றாக, மேற்கண்ட அடுத்தடுத்த ஈவுகளின் தொடரி முடிவில்லாதது. இதற்கு இறுதியுருபு என்ற ஒன்று இல்லை.

பலநேரங்களில் ஒரு தொடரியின் வெவ்வேறு உருபுளை தரும் விதியை ஒரு குறிக்கணித வாய்ப்பாடாக எழுதுவது சாத்தியமாகிறது. சான்றாக, இரட்டைப்படை இயலெண்களின் 2,4,6,8, ... என்ற தொடரியை கருதுக. இங்கு

$$a_1 = 2 = 2 \times 1, \quad a_2 = 4 = 2 \times 2,$$
$$a_3 = 6 = 2 \times 3, \quad a_4 = 8 = 2 \times 4, \quad \ldots,$$
$$a_{23} = 46 = 2 \times 23, \quad a_{24} = 48 = 2 \times 24, \ldots$$

உண்மையில், தொடரியின் nஆம் உருபை $a_n = 2$ என்று எழுதலாம்; இங்கு n ஒரு இயலெண். இதைப்போலவே ஒற்றைப்படையெண்களின் தொடரியை $1, 3, 5, \ldots$ என்றும் அதன் nஆம் உருபை $a_n = 2n - 1$ என்றும் எழுதலாம்.

சில வேற்றுவங்களில் தொடரிகளின் எண்களிலுள்ள பாங்கு வெளிப்படையாக தோன்றவில்லை. சான்றாக $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ என்ற தொடரியை கருதுக. இங்கு உறுப்புகளை ஒரு தற்சுருளுறவால் பெறலாம்.

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad {}_3 = a_1 + a_2, \qquad \ldots,$$
$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, n > 2$$

இந்த தொடரியை சிபோனாச்சியின் தொடரி என்று அழைக்கிறோம்.

பகாவெண்களின் தொடரியான $1, 2, 3, 5, 7, \ldots$ என்பதில் nஆம் பகாவெண்ணுக்கு ஒரு வாய்ப்பாடு இல்லை. இவ்வாறான தொடரிகளை அதன் உருபுகளை பட்டியலிடுவதால் மட்டுமே விவரிக்கலாம்.

ஒவ்வொரு தொடரியிலும் அதன் உருபுகளை ஒரு குறிப்பிட்ட வாய்ப்பாடு குறிப்பது கட்டாயமில்லை. ஆனால் $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ஆகிய அடுத்தடுத்த உருபுகளை உருவாக்க ஒரு கோட்பாட்டு முறையோ விதியோ இருக்கவேண்டும்.

மேற்கண்ட உரையாற்றலின் நோக்கில், ஒரு தொடரியை ஒரு சார்பனாக கருதலாம்; இந்த சார்பனின் களம் இயலெண்களின் கணமோ ஒரு உட்கணமோ ஆகிறது. சிலநேரங்களில் a_n என்ற பொருளில் $a(n)$ என்ற சார்பனின் குறியீட்டை பயன்படுத்துகிறோம்.

9.3 தொடர்கள்

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ஒரு தொடரி என்க. அப்போது

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

என்ற கோவையை தொடரியுடன் தொடர்பான ஒரு *தொடர்* என்கிறோம். தொடரி முடிவுறுவதாகவோ முடிவில்லாததாகவோ இருப்பதைச்சார்ந்து தொடரும் முடிவுறுவதாகவோ முடிவில்லாத தாகவோ இருக்கிறது. தொடரை பலநேரங்களில் ஒரு சுருக்கக்குறியீட்டால் குறிக்கலாம். இதை கூட்டடுக்குக்குறியீடு என்றழைக்கிறோம். இது கூட்டடுக்கை குறிக்க சிகுமா என்ற கிரேக்க எழுத்தை பயன்படுத்துவதால் சிகுமாக்குறியீடு என்றும் அழைக்கிறோம்.. $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ என்ற தொடரை

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

என்று குறிக்கிறோம்.

குறிப்புரை தொடர் என்று சொல்லும்போது இந்த கூட்டடுக்கையே நாம் கருதுகிறோம். அதன் கூட்டுத்தொகையை குறிக்கவில்லை. சான்றாக, $1 + 3 + 5 + 7$ என்பது நான்கு உருபுகளுள்ள ஒரு முடிவுறு தொடர். அதன் கூட்டுத்தொகை 16.

சில சான்றுகளை பார்ப்போம்.

சான்று 1 (அ) $a_n = 2n + 5$ (ஆ) $a_n = (n - 3)/4$ என்று வரையறுத்த தொடரிகளின் முதல் மூன்று உருபுகளை எழுதுக.

தீர்வு (அ) $a_n = 2n + 5$ என்பதில் $n = 1,2,3$ ஆகியவற்றை மாற்றிட்டு $a_1 = 2(1) + 5 = 7, a_2 = 9, a_3 = 11$ என்று பெறுகிறோம்.

எனவே தேவையான உருபுகள் $7, 9, 11.$

(ஆ) $a_n = (n - 3)/4$ என்பதிலிருந்து $a_1 = (1 - 3)/4 = -1/2, \quad a_2 = -1/4, a_3 = 0$ என்று பெறுகிறோம். எனவே முதல் மூன்று உருபுகள் $-1/2, -1/4, 0.$

சான்று 2 $a_n = (n - 1)(2 - n)(3 + n)$ என்று வரையறுத்த தொடரியின் 20ஆம் உருபு என்ன?

தீர்வு $n = 20$ என்று இட்டு, $a_{20} = (20 - 1)(2 - 20)(3 + 20) = 19 \times (-18) \times 23 = -7866$ என்று காண்கிறோம்.

சான்று 3 a_n என்ற தொடரியை $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 2, n \geq 2$ என்று வரையறுக்கிறோம். முதல் ஐந்து உருபுகளையும் நிரகான தொடரையும் எழுதுக.

தீர்வு $a_1 = 1, a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3, a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5, a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7, a_5 = a_4 + 2 = 7 + 2 = 9.$

எனவே, தொடரியின் தொடக்க உருபுகள் $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ நிகரான தொடர் $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots$

பயிற்சி 9.1

1இலிருந்து 6வரையான பயிற்சிகளில் ஒவ்வொரு தொடரியின் முதல் ஐந்து உருபுகளை எழுதுக. இவற்றின் nஆம் உருபு

1. $a_n = n(n + 2)$
2. $a_n = n/(n + 1)$
3. $a_n = 2^n$
4. $a_n = (2n - 3)/6$
5. $a_n = (-1)^{n-1}5^{n+1}$
6. $$a_n = n\frac{n^2 + 5}{4}$$

7இலிருந்து 10வரையான பயிற்சிகளிலுள்ள ஒவ்வொரு தொடரியிலும் சுட்டிய உருபை காண்க. இவற்றின் nஆம் உருபுகள் பின்வருமாறு.

7. $a_n = 4n - 3: a_{17}, a_{24}$

8

$$a_n = \frac{n^2}{2^n} : a_7$$

9

$$a_n = (-1)^{n-1} n^3 : a_9$$

10

$$a_n = \frac{n(n-2)}{n+3} : a_{20}$$

11இலிருந்து 13வரையான பயிற்சிகளில் ஒவ்வொரு தொடரியின் முதல் ஐந்து உருபுகளையும் நிகரான தொடரையும் எழுதுக.

11 $a_1 = 3, a_n = 3a_{n-1} + 2, n > 1$

12

$$a_1 = -1, a_n = \frac{a_{n-1}}{n}, n \geq 2$$

13 $a_1 = a_2 = 2, a_n = a_{n-1} - 1, n > 2$

14 சிபோனாச்சியின் தொடரை $1 = a_1 = a_2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n > 2$ என்று வரையறுக்கிறோம். $n = 1,2,3,4,5$ என்ற மதிப்புகளுக்கு a_{n+1}/a_nஐ காண்க.

9.4 கூட்டுத்தொடரி

முன்பே கற்ற சில வாய்ப்பாடுகளையும் பண்புகளையும் நினைவுகொள்வோம்.

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ என்ற தொடரில் $a_{n+1} = a_n + d, n \in N$ என்றிருந்தால், அதை ஒரு *கூட்டுத்தொடரி* என்கிறோம். இங்கு a_1 முதலுருபு; d என்ற மாறிலி *பொது வேறுபாடு*. ஒரு கூட்டுத்தொடரியை முதலுருபாலும் பொது வேறுபாட்டாலும் விவரிப்பது செந்தரவடிவம்.

முதலுறுப்பு aயும் பொதுவேறுபாடு dயுமுள்ள ஒரு கூட்டுத்தொடரி $a, a+d, a+2d, \ldots.$ அதன் பொது உருபு $(a_n) = a + (n-1)d.$

கூட்டுத்தொடரிகளின் கீழ்க்காணும் எளிய பண்புகளை நாம் சரிபார்க்கலாம்.

(அ) ஒரு கூட்டுத்தொடரியின் ஒவ்வொரு உருபுடனும் ஒரு மாறிலியை கூட்டினால், அதனால் விளையும் தொடரியும் ஒரு கூட்டுத்தொடரி.

(ஆ) ஒரு கூட்டுத்தொடரியின் ஒவ்வொரு உருபிலிருந்தும் ஒரு மாறிலியை கழித்தால், அதனால் விளையும் தொடரியும் ஒரு கூட்டுத்தொடரி.

(இ) ஒரு கூட்டுத்தொடரியின் ஒவ்வொரு உருபையும் ஒரு மாறிலியால் பெருக்கினால், அதனால் விளையும் தொடரியும் ஒரு கூட்டுத்தொடரி.

(ஈ) ஒரு கூட்டுத்தொடரியின் ஒவ்வொரு உருபையும் சுழியமற்ற ஒரு மாறிலியால் வகுத்தால், அதனால் விளையும் தொடரியும் ஒரு கூட்டுத்தொடரி.

இங்கு, நாம் கூட்டுத்தொடரிக்கான கீழ்க்காணும் குறியீடுகளை பயன்படுத்துவோம்: a முதலுருபு, l இறுதியுருபு, d பொதுவேறுபாடு, n உருபுகளின் எண்ணிக்கை, S_n கூட்டுத்தொடரியின் முதல் n உருபுகளின் கூட்டல்.

$a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d$ ஒரு கூட்டுத் தொடரி என்க. அப்போது

$$l = a + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2 + (n-1)d],$$

$$\text{அதாவது } S_n = \frac{n}{2}[a + l\,]$$

சில சான்றுகளை காண்போம்.

சான்று 4 ஒரு கூட்டுத்தொடரியில் mஆம் உருபு nஆகவும் nஆம் உருபு mஆகவும் $n \neq m)$ இருந்தால், அதன் pஆம் உருபை காண்க.

தீர்வு

$$a_m = a + (m-1)d = n \qquad (9.1)$$

$$a_n = a + (n-1)d = m \qquad (9.2)$$

இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளையும் தீர்த்து,

$$(m-n)d = n - m, \qquad d = -1 \qquad (9.3)$$

$$a = n + m - 1$$

என்று பெறுகிறோம். எனவே,

$$a_p = a + (p-1)d = n + m - 1 + (p-1)(-1)$$
$$= n + m - p$$

எனவே pஆம் உருபு $n + m - p.$

சான்று 5 ஒரு கூட்டுத்தொடரியின் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை $nP + \frac{1}{2}n(n-1)Q$ எனில், பொதுவேறுபாட்டை காண்க. இங்கு Pயும் Qவும் மாறிலிகள்.

தீர்வு கூட்டுத்தொடரியை $a_1, a_2, \ldots, a_n$ என்று குறிப்போம். அப்போது

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$
$$= nP + \frac{1}{2}n(n-1)Q$$

எனவே $S_1 = a_1 = P,\ S_2 = a_1 + a_2 = 2P + Q.$ இதிலிருந்து $a_2 = S_1 - S_1 = P + Q$ என்று பெறுகிறோம்.

பொதுவேறுபாடு $d = a_2 - a_1 = (P + Q) - P = Q$

சான்று 6 இரண்டு கூட்டுத்தொடரிகளின் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை $(3n+8):(7n+15)$ என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. அவற்றில் 12ஆம் உருபுகளின் விகிதத்தை காண்க.

தீர்வு இரண்டு கூட்டுத்தொடரிகளின் முதலுருபுகள் முறையே $a_1,\ a_2$ என்றும் பொதுவேறுபாடுகள் $d_1,\ d_2$ என்றும் கொள்வோம். கொடுத்துள்ளபடி

$$\frac{\text{முதல் தொடரியின் } S_n}{\text{இரண்டாம் தொடரியின் } S_n} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

இங்கு S_n முதல் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகையை குறிக்கிறது. அதாவது,

$$\frac{\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2+(n-1)d_2]} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

$$\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2a_2+(n-1)d_2} = \frac{3n+8}{7n+15} \qquad (9.4)$$

நமக்கு வேண்டியது

$$\frac{\text{முதல் தொடரியின் 12ஆம் உருபு}}{\text{இரண்டாம் தொடரியின் 12ஆம் உருபு}} = \frac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2}$$

வலப்பக்கத்திலுள்ள விகிதத்தை காண (9.4)ஆம் சமன்பாட்டில் $n=23$ என்று இடுகிறோம். அப்போது

$$\frac{2a_1+22d_1}{2a_2+22d_2} = \frac{3\times 23+8}{7\times 23+15}$$

எனவே,

$$\frac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2} = \frac{77}{176}$$

$$\frac{\text{முதல் தொடரியின் 12ஆம் உருபு}}{\text{இரண்டாம் தொடரியின் 12ஆம் உருபு}} = \frac{7}{16}$$

சான்று 7 முதலாண்டில் ஒருவரது வருமானம் ₹300,000. அடுத்த பத்தொன்பதாண்டுகளுக்கு ஒவ்வோராண்டும் ₹10,000 சம்பளவுயர்வு கிடைக்கிறது. இருபதாண்டுகளில் இவர் பெற்ற மொத்தத்தொகை எவ்வளவு?

தீர்வு இங்குள்ள கூட்டுத்தொடருக்கு $a=300,000,\ d=10,000,\ n=20$. கூட்டல்வாய்ப்பாட்டின்படி

$$S_{20} = \frac{20}{2}[600,000+19\times 10,000]$$
$$= 10(790,000) = 7,900,000$$

9.4.1 கூட்டிடைமம்

$a,\ b$ என்ற இரண்டு எண்கள் இருந்தால், அவற்றிடையில் A என்ற மற்றொரு எண்ணை புகுத்தி a, A, b என்ற ஒரு கூட்டுத்தொடரியை உருவாக்கலாம். இவ்வாறான A என்ற எண்ணை a, b ஆகியவற்றின் கூட்டிடைமம் என்கிறோம். இவ்வாறிருக்கும்போது $A-a=b-A$ என்பதால்

$$A = \frac{a+b}{2}$$

என்பது உண்மை. எனவே, கூட்டிடைமத்தை a, b ஆகியவற்றின் சராசரியாகவும் நாம் பொருளுணரலாம். சான்றாக, 4, 16 ஆகிய எண்களின் இடைமம் 10. இவ்வாறு 4க்கும் 16க்குமிடையில் 10ஐ செருகுவதன்மூலம் 4, 10, 16 என்ற கூட்டுத்தொடரியை கட்டுமானித்தோம். இப்போது இயல்பாக எழும் கேள்வி என்னவென்றால், குறிப்பிட்ட இரண்டு எண்களுக்கிடையில் இரண்டோ மேற்பட்டதோவான எண்களை புகுத்தி ஒரு கூட்டுத்தொடரியாக்கலாமா என்பது. 4க்கும் 16க்குமிடையில் 8ஐயும் 12ஐயும் புகுத்தி 4, 8, 12, 16 என்ற கூட்டுத்தொடரியை உண்டாக்கலாம் என்பதை நோக்குக.

மேலும் பொதுவாக, $a,\ b$ என்ற இரண்டு எண்களிடையில் எத்தனை எண்களை வேண்டுமானாலும் புகுத்தி கூட்டுத்தொடரியை உண்டாக்கலாம். $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ஆகியவை $a, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, b$ ஒரு கூட்டுத்தொடரியாகும் வகையில் aக்கும் bக்குமிடையிலுள்ள n எண்கள் என்க. இங்கு, $(n+2)$ஆம் உருபு b. அதாவது $b=a+[(n+2)-1]d=a+(n+1)d$. இதிலிருந்து

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

என்பதை பெறுகிறோம். எனவே, aக்கும் bக்குமிடையில் கூட்டுத்தொடரியை உண்டாக்கும் n எண்கள்

$$A_1 = a+d = a+\frac{b-a}{n+1}$$
$$A_2 = a+2d = a+\frac{2(b-a)}{n+1}$$
$$A_3 = a+3d = a+\frac{3(b-a)}{n+1}$$
$$\ldots$$
$$A_n = a+nd = a+\frac{n(b-a)}{n+1}$$

சான்று 8 3க்கும் 24க்குமிடையில் 6 எண்களை புகுத்தி, அதனால் விளையும் தொடரியை கூட்டுத்தொடரியாக்குக.

தீர்வு $3, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, 24$ ஒரு கூட்டுத்தொடரியாகும்படி 3க்கும் 24க்குமிடையில் $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ஆகிய எண்கள் இருப்பதாக கொள்வோம். இங்கு $a=3, b=24, n=6$. மேலுள்ள வாய்ப்பாட்டின்படி,

$$d = \frac{b-a}{n+1} =$$
$$A \ \ = a+d = 3+3 = 6$$
$$A_2 = a+2d = 3+2\times 3 = 9$$
$$A_3 = a+3d = 3+3\times 3 = 12$$
$$A_4 = a+4d = 3+4\times 3 = 15$$
$$A_5 = a+5d = 3+5\times 3 = 18$$

$$A_6 = a + 6d = 3 + 6 \times 3 = 21$$

எனவே, 3க்கும் 24க்குமிடையிலுள்ள ஆறு எண்கள் $6, 9, 12, 15, 18, 21$ ஆகியவை.

பயிற்சி 9.2

1 1இலிருந்து 2001வரையான ஒற்றைப்படைமுழுவெண்களின் கூட்டுத்தொகையை காண்க.

2 100க்கும் 1000த்துக்குமிடையிலுள்ள 5இன் மடங்குகளான இயலெண்களின் கூட்டுத்தொகையை காண்க.

3 ஒரு கூட்டுத்தொடரியில் முதலுருபு 2, முதல் ஐந்து உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை அடுத்த ஐந்து உருபுகளின் நான்கிலொருபகுதி. 20ஆம் உருபு -112 என்று காட்டுக.

4 $-6, -11/2, -5, \ldots$ என்ற கூட்டுத்தொடரியின் எத்தனை உருபுகள் -25 என்ற கூட்டுத்தொகையை தர தேவை?

5 ஒரு கூட்டுத்தொடரியில், pஆம் உருபு $1/q$, qஆம் உருபு $1/p$ எனில், முதல் pq உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை $\frac{1}{2}(pq+1)$ என்று நிறுவுக; இங்கு $p \neq q$.

6 $25, 22, 19, \ldots$ என்ற கூட்டுத்தொடரியின் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையான உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை 116 எனில், இறுதியுருபை காண்க.

7 kஆம் உருபு $5k+1$ என்றிருக்கும் கூட்டுத்தொடரியில் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகையை காண்க.

8 ஒரு கூட்டுத்தொடரியின் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை $(pn + qn^2)$ எனில், பொதுவேறுபாட்டை காண்க; இங்கு pயும் qவும் மாறிலிகள்.

9 இரண்டு கூட்டுத்தொடரிகளின் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகைகள் $5n+4 : 9n+6$ என்ற விகிதத்தில் இருக்கின்றன. அவற்றின் 18ஆம் உருபுகளின் விகிதத்தை காண்க.

10 ஒரு கூட்டுத்தொடரியின் முதல் p உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை முதல் q உருபுகளின் கூட்டுத்தொகைக்கு சமம் எனில், முதல் $(p+q)$ உருபுகளின் கூட்டுத்தொகையை காண்க.

11 ஒரு கூட்டுத்தொடரியின் முதல் p, q, r உருபுகளின் கூட்டுத்தொகைகள் முறையே a, b, c எனில், கீழ்க்காண்பதை நிறுவுக:

$$\frac{a}{p}(q-r) + \frac{b}{q}(r-p) + \frac{c}{r}(p-q) = 0$$

12 ஒரு கூட்டுத்தொடரியின் m உருபுகளின் கூட்டுத்தொகையும் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகையும் $m^2 : n^2$ என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. mஆம் உருபும் nஆம் உருபும் $(2m-1):(2n-1)$ என்ற விகிதத்திலிருப்பதை காட்டுக.

13 ஒரு கூட்டுத்தொடரியின் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை $3n^2 + 5n$; அதன் mஆம் உருபு 164 எனில், mஇன் மதிப்பை காண்க.

14 விளையும் தொடரி கூட்டுத்தொடரியாகும்படி 8க்கும் 26க்குமிடையில் ஐந்து எண்களை செருகுக.

15 a, b ஆகியவற்றின் கூட்டிடைமம்

$$\frac{a^n + b^n}{a^{n-1} + b^{n-1}}$$

எனில், nஇன் மதிப்பை காண்க.

16 1க்கும் 31க்குமிடையில் m எண்களை புகுத்தி ஒரு கூட்டுத்தொடரியை ஆக்குகிறோம். 7ஆம் எண்ணுக்கும் $(m-1)$ஆம் எண்ணுக்குமான விகிதம் $5:9$ எனில், mஇன் மதிப்பை காண்க.

17 ஒரு மனிதர் ஒரு கடனை அடைக்க முதல் தவணையாக ₹100ஐ செலுத்துகிறார். ஒவ்வொரு மாதமும் தவணையில் ₹5யை கூட்டினால், 30ஆம் தவணையில் எவ்வளவு செலுத்துவார்?

18 ஒரு பலகோணத்தின் அடுத்தடுத்த உட்கோணங்களிடையான வேறுபாடு $5°$, மீச்சிறுமக்கோணம் $120°$ எனில் பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

9.5 பெருக்குத்தொடரி

கீழ்க்காணும் தொடரிகளை கருதுக.

$$2, 4, 8, 16, \ldots \qquad (9.5)$$

$$\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \ldots \qquad (9.6)$$

$$0.01, 0.0001, 0.000001 \ldots \qquad (9.7)$$

ஒவ்வொரு தொடரியிலும் உருபுகள் எவ்வாறு முன்னேறுகின்றன? முதலுருபைத்தவிர மற்றவை ஒரு குறிப்பிட்ட முறைமையில் முன்னேறுவதை காண்கிறோம். (9.5)ஆம் தொடரியில்

$$a_1 = 2, \frac{a_2}{a_1} = 2, \frac{a_3}{a_2} = 2, \frac{a_4}{a_3} = 2, \ldots$$

(9.6)ஆம் தொடரியில்

$$a_1 = \frac{1}{9}, \frac{a_2}{a_1} = -\frac{1}{3}, \frac{a_3}{a_2} = -\frac{1}{3}, \frac{a_4}{a_3} = -\frac{1}{3}, \ldots$$

(9.7)ஆம் தொடரியில் உருபுகள் எவ்வாறு முன்னேறுகின்றன என்று கூறுக. ஒவ்வொரு வேற்றுவத்திலும் முதலுருபைத்தவிர ஒவ்வொரு உருபும் அதற்கு முந்தியதுடன் ஒரு மாறா விகித்ததில் இருப்பதை காண்கிறோம். (9.5)இல் இந்த மாறா விகிதம் 2; (9.6)இல் $-1/3$; (9.7)இல்

மாறாவிகிதம் 0.01. இவ்வாறான தொடரிகளை பெருக்குத்தொடரிகள் என்றழைக்கிறோம்.

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ என்ற தொடரியில் ஒவ்வொரு உருபும் சுழியமற்றதாயிருந்து,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = r \text{ (மாறிலி)}, \quad k \geq 1$$

என்றுமிருந்தால் அந்த தொடரி ஒரு *பெருக்குத்தொடரி.*

$a_1 = a$ என்று வைத்து, $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$ என்ற பெருக்குத்தொடரியை பெறுகிறோம். இங்கு a பெருக்குத்தொடரின் *முதலுருபு*; r *பொதுவிகிதம்.* மேலுள்ள(9.5), (9.6), (9.7) ஆகிய பெருக்குத் தொடரிகளின் பொதுவிகிதங்கள் முறையே $2, -1/3, 0.01$.

கூட்டுத்தொடரியில்போலவே, உருபுகளின் வாய்ப்பாடு இல்லாமல் nஆம் உருபையோ n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகையையோ காண்பது கடினம். இந்த வாய்ப்பாட்டை அடுத்த பகுதியில் பெறுவோம். வாய்ப்பாடுகளில் கீழ்க்காணும் குறியீடுகளை பயன்படுத்துவோம்; a முதலுருபு, r பொதுவிகிதம், l இறுதியுருபு, n உருபுகளின் எண்ணிக்கை, S_n n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை.

9.5.1 பெருக்குத்தொடரின் பொது உருபு

a என்ற சுழியமற்ற மதிப்பு முதலுருபாகவும் r பொதுவிகிதமாகவும் இருக்கும் ஒரு பெருக்குத்தொடரியை கருதுவோம். சில உருபுகளை எழுதுக. இரண்டாம் உருபை பெற முதலாவதை rஆல் பெருக்குகிறோம். அதாவது $a_2 = a_1 r$. மூன்றாவதை இரண்டாவதை rஆல் பெருக்குகுவதால் $a_3 = a_2 r$ என்று பெறுகிறோம். இவ்வாறே தொடரலாம். மேலும் பல உருபுகளை எழுதி

$$a_4 = a_3 r, \quad a_5 = a_4 r, \quad a_6 = a_5 r, \quad \dots.$$

ஒரு பாங்கை கவனிக்கிறீர்களா? 16ஆம் உருபு என்னவாயிருக்கும்?

$$a_{16} = ar^{16-1} = ar^{15}$$

எனவே, இந்த பாங்கு nஆம் உருபு

$$a_n = ar^{n-1}$$

என்று மொழிவுரைக்கிறது. இவ்வாறாக, ஒரு பெருக்குத்தொடரியை $a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}$ என்று எழுதலாம். அது ஒரு முடிவுறு பெருக்குத்தொடரி. $a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}, \dots$ என்பது முடிவிலா பெருக்குத்தொடரி.

9.5.2 பெருக்குத்தொடரியின் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை

ஒரு பெருக்குத்தொடரியின் முதலுருபு a என்றும் பொதுவிகிதம் r என்றும் கொள்க. முதல் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகையை S_n என்று குறிப்போம். அதாவது

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \tag{9.8}$$

வேற்றுவம் 1 $r = 1$ எனில், $S_n = a + a + a + \dots + a$ (n உருபுகள்) $= na$.

வேற்றுவம் 2 $r \neq 1$ எனில், (9.8)ஐ rஆல் பெருக்குவோம்.

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n \tag{9.9}$$

(9.8)இலிருந்து (9.9)ஐ கழித்து

$$(1-r)S_n = a - ar^n = a(1-r^n)$$

என்றும் இதிலிருந்து

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \qquad S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

என்றும் பெறுகிறோம்.

சான்று 9 $5, 25, 125, \dots$ என்ற பெருக்குத்தொடரியின் 10ஆம் உருபையும் nஆம் உருபையும் காண்க.

தீர்வு இங்கு $a = 5$, $r = 5$. எனவே, $a_{10} = 5(5)^{10-1} = 5^{10}$; $a_n = ar^{n-1} = 5(5)^{n-1} = 5^n$

சான்று 10 $2, 8, 32, \dots$ என்ற n உருபுகளுள்ள பெருக்குத்தொடரியில் எந்த உருபு 131072?

தீர்வு 131072 nஆம் உருபு என்க. இங்கு $a = 2$, $r = 4$. எனவே

$$131072 = a_n = 2(4)^{n-1}$$

இதிலிருந்து $n - 1 = 8$, அதாவது $n = 9$ என்பது கிடைக்கிறது. எனவே 131072 பெருக்குத்தொடரியின் 9ஆம் உருபு.

சான்று 11 ஒரு பெருக்குத்தொடரியில் 3ஆம் உருபு 24; 6ஆம் உருபு 192; 10ஆம் உருபை காண்க.

தீர்வு இங்கு

$$a_3 = ar^2 = 24 \tag{9.10}$$

$$a_6 = ar^5 = 192 \tag{9.11}$$

(9.11)ஐ (9.10)ஆல் வகுத்து $r = 2$ என்று அறிகிறோம். இதை (9.10)இல் மாற்றிட்டு $a = 6$ என்று பெறுகிறோம். எனவே $a_{10} = 6(2)^9 = 3072$.

சான்று 12

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \cdots$$

என்ற பெருக்குத்தொடரின் முதல் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகையையும் முதல் 5 உருபுகளின் கூட்டுத்தொகையையும் காண்க.

தீர்வு இங்கு $a = 1, r = 2/3$. எனவே,

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

குறிப்பாக

$$S_5 = 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^5\right) = 3 \times \frac{211}{243} = \frac{211}{81}$$

சான்று 13

$$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \dots$$

என்ற பெருக்குத்தொடரியின் எத்தனை உருபுகள் $3069/512$ என்ற கூட்டுத்தொகைக்கு தேவை?

தீர்வு தேவையான உருபுகளின் எண்ணிக்கை n என்க. நமக்கு தெரிந்தவை

$$a = 3, r = \frac{1}{2}, S_n = \frac{3069}{512}$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

என்பதால்,

$$\frac{3069}{512} = \frac{3\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 6\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\frac{3069}{3072} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^n} = 1 - \frac{3069}{3072} = \frac{1}{1024}$$

$$2^n = 1024 = 2^{10}$$

$$n = 10$$

சான்று 14 ஒரு பெருக்குத்தொடரியின் மூன்று உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை $13/12$, அவற்றின் பெருக்குத்தொகை -1 எனில் பொதுவிகிதத்தையும் உருபுகளையும் காண்க.

தீர்வு பெருக்குத்தொடரியின் முதல் மூன்று உருபுகள்

$$\frac{a}{r}, a, ar$$

என்க. அப்படியெனில்,

$$\frac{a}{r} + a + ar = \frac{13}{12} \qquad (9.12)$$

$$\left(\frac{a}{r}\right) a(ar) = -1 \qquad (9.13)$$

(9.13)ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து $a^3 = -1$, அதாவது $a = -1$ (மெய்யெண் மூலங்களை மட்டும் கருதுகிறோம்) என்று பெறுகிறோம். இதை (9.12)இல் மாற்றிட்டு,

$$-\frac{1}{r} - 1 - r = \frac{13}{12}$$

அதாவது $12r^2 + 25r + 12 = 0$

என்ற ஈரடுக்குச்சமன்பாட்டை பெறுகிறோம். இதன் தீர்வுகள்

$$r = -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}$$

முதல் தீர்வு, பெருக்குத்தொடரியின் முதல் மூன்று உருபுகள்

$$\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$$

என்ற விடையையும், இரண்டாம் தீர்வு

$$\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}$$

என்ற விடையையும் தருகின்றன.

சான்று 15 $7, 77, 777, 7777, \ldots$ என்ற தொடரியின் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகையை காண்க.

தீர்வு இது பெருக்குத்தொடரியன்று. எனினும், இதை ஒரு பெருக்குத்தொடரிக்கு தொடர்பாக்கலாம்.

$$S_n = 7 + 77 + 777 + 7777 + \cdots (n \text{ உருபுகள்})$$

$$= \frac{7}{9}\left(9 + 99 + 999 + 9999 + \cdots (n \text{ உருபுகள்})\right)$$

$$= \frac{7}{9}\left((10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + (10^4 - 1) + \cdots (n \text{ உருபுகள்})\right)$$

$$= \frac{7}{9}\left(\left(10 + 10^2 + 10^3 + \cdots (n \text{ உருபுகள்})\right) - \left(1 + 1 + 1 + 1 + \cdots (n \text{ உருபுகள்})\right)\right)$$

$$= \frac{7}{9}\left(\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right) = \frac{7}{9}\left(\frac{10(10^n - 1)}{9} - n\right)$$

சான்று 16 ஒரு மனிதருக்கு 2 பெற்றோரும், 4 தாத்தாபாட்டியும், 8 பூட்டன்பூட்டியும் என்றவாறு முன்னோர்கள் இருக்கிறார்கள். தன் தலைமுறைக்கு முந்திய 10 தலைமுறைகளிலுள்ள முன்னோர்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

தீர்வு இங்கு $a = 2$, $r = 2$, $n = 10$. கூட்டுத்தொகையின் வாய்ப்பாட்டை பயன்படுத்தி

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_{10} = 2(2^{10} - 1) = 2046$$

எனவே, ஒருவருக்கு முந்திய பத்து தலைமுறைகளில் 2046 முன்னோர்கள் இருக்கிறார்கள்.

9.5.3 பெருக்கிடைமம்

a, b என்ற இரண்டு நேர்ம முழுவெண்களின் பெருக்கிடைமம் $\sqrt{ab}$. எனவே, 2, 8 ஆகியவற்றின் பெருக்கிடைமம் 4. நாம் நோக்கவேண்டியது 2, 4, 8 ஆகியவை ஒரு பெருக்குத்தொடரியின் அடுத்தடுத்த உருபுகள். இதிலிருந்து இரண்டு எண்களின் பெருக்கிடைமம் என்ற கருத்துருவை பொதுவமாக்கலாம்.

a, b என்ற எந்த இரண்டு நேர்ம எண்களிடையிலும் எத்தனை எண்களையும் செருகி ஒரு பெருக்குத்தொடரியை உண்டாக்கலாம்.

$G_1, G_2, \ldots, G_n$ ஆகிய n எண்களை aக்கும் bக்குமிடையில் புகுத்தி $a, G_1, G_2, \ldots, G_n, b$ என்ற பெருக்குத்தொடரியை உண்டாக்குவதாக கொள்க. b இங்கு $(n + 2)$ஆம் உருபாயிருப்பதால்

$$b = ar^{n+1}, \qquad \text{அதாவது } r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

எனவே

$$G_1 = ar = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \qquad G_2 = ar^2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}},$$

$$G_3 = ar^3 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3,}{n+1}}, \qquad \dots,$$

$$G_n = ar^n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

சான்று 17 1க்கும் 256க்குமிடையில் மூன்று எண்களை செருகி ஒரு பெருக்குத்தொடரியை உண்டாக்குக.

தீர்வு 1க்கும் 256க்குமிடையில் G_1, G_2, G_3 ஆகிய எண்களை புகுத்தி $1, G_1, G_2, G_3, 256$ என்ற பெருக்குத்தொடரியை உருவாக்குவோம்.

அப்படியெனில், $256 = r^4$ என்பதால் $r = \pm 4$ (மெய்மூலங்கள் மட்டும்).

$r = 4$ என்பது $G_1 = ar = 4, G_2 = ar^2 = 16, G_3 = ar^3 = 64$ என்ற விடையை தருகிறது.

$r = -4$ என்பது $G_1 = ar = -4, G_2 = ar^2 = 16, G_3 = ar^3 = -64$ என்ற விடையை தருகிறது.

எனவே தேவையான தொடரியை பெற இந்த இரண்டு வழிகளும் இருக்கின்றன.

9.6 கூட்டிடைமத்துக்கும் பெருக்கிடைமத்துக்குமுள்ள உறவு

a, b ஆகிய இரண்டு எண்களின் கூட்டிடைமமும் பெருக்கிடைமமும் முறையே A, G என்க. அப்படியெனில்,

$$A = \frac{a+b}{2}, \qquad G = \sqrt{ab}$$

இதிலிருந்து

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{\left(a + b - 2\sqrt{ab}\right)}{2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0$$

ஆதாவது $A \geq G$ என்ற முடிவை பெறுகிறோம்.

சான்று 18 இரண்டு நேர்ம எண்களின் கூட்டிடைமமும் பெருக்கிடைமமும் முறையே 10உம் 8உம். அந்த எண்களை காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டவை

$$\text{கூட்டிடைமம்} = \frac{a+b}{2} = 10 \qquad (9.14)$$

$$\text{பெருக்கிடைமம்} = \sqrt{ab} = 8 \qquad (9.15)$$

$(9.14), (9.15)$ ஆகியவற்றிலிருந்து

$$a + b = 20 \qquad (9.16)$$

$$ab = 64 \qquad (9.17)$$

என்று பெறுகிறோம். $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ என்ற முற்றொருமையில் (9.16)ஐயும் (9.17)ஐயும் இட்டு

$$(a-b)^2 = 400 - 256 = 144$$

$$a - b = \pm 12 \qquad (9.18)$$

என்பதை பெறுகிறோம். (9.16)ஐயும் (9.18) ஐயும் தீர்த்து $a = 4, b = 16$ என்றோ $a = 16, b = 4$ என்றோ பெறுகிறோம். எவ்வாறாயினும் நமக்கு வேண்டிய இரண்டு எண்கள் 4உம் 16உம்.

பயிற்சி 9.3

1 கீழ்க்காணும் பெருக்குத்தொடரியின் 20ஆம் உருபையும் nஆம் உருபையும் காண்க.

$$\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \dots$$

2 8ஆம் உருபு 192ஆகவும் பொதுவிகிதம் 2ஆகவுமுள்ள பெருக்குத்தொடரியின் 12ஆம் உருபை காண்க.

3 ஒரு பெருக்குத்தொடரியின் 5ஆம், 8ஆம், 11ஆம் உருபுகள் முறையே p, q, s எனில், $q^2 = ps$ என்று காட்டுக.

4 ஒரு பெருக்குத்தொடரியின் 4ஆம் உருபு அதன் இரண்டாம் உருபின் வர்க்கம், முதலுருபு -3 எனில், 7ஆம் உருபை தீர்மானிக்க.

5 கீழ்க்காணும் தொடரிகளில் எந்த உருபு குறிப்பிட்ட எண்ணாகிறது?

a. $2, 2\sqrt{2}, 4, \dots$இல் 128

b. $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \dots$ இல் 729

c.

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots \text{இல்} \ \frac{1}{19683}$$

6 xஇன் எந்த மதிப்புகளுக்கு $-2/7, x, -7/2$ ஆகிய எண்கள் பெருக்குத்தொடரியில் உள்ளன?

7முதல் 10வரையான பயிற்சிகளிலுள்ள பெருக்குத்தொடரிகளின் குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையான உருபுகளின் கூட்டுத்தொகையை காண்க.

7 $0.15, 0.015, 0.0015, \dots$ இன் 20 உருபுகள்

8 $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, \dots$ இன் n உருபுகள்

9 $1, -a, a^2, -a^3, \ldots$ இன் n உருபுகள் $(a \neq -1)$
10 $x^3, x^5, x^7, \ldots$ இன் n உருபுகள் $(x \neq \pm 1)$
11
$\sum_{k=1}^{11}(2+3^k)$ஐ மதிப்பறிக.
12 ஒரு பெருக்குத்தொடரியின் முதல் மூன்று உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை $39/10$; அவற்றின் பெருக்குத்தொகை 1. பொதுவிகிதத்தையும் உருபுகளையும் காண்க.
13 $3,\ 3^2,\ 3^3,\ \ldots$ என்ற பெருக்குத்தொடரியின் எத்தனை உருபுகள் 120 என்ற கூட்டுத்தொகைக்கு தேவை?
14 ஒரு பெருக்குத்தொடரியின் முதல் மூன்று உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை 16; அடுத்த மூன்று உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை 128. அதன் முதலுருபு, பொதுவிகிதம், n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை ஆகியவற்றை காண்க.
15 $a = 729$ என்றும் 7ஆம் உருபு 64 என்றுமுள்ள ஒரு பெருக்குத்தொடரியின் S_7ஐ காண்க.
16 முதலிரண்டு உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை -4ஆகவும் ஐந்தாம் உருபு மூன்றாம் உருபின் 4 மடங்காகவுமுள்ள ஒரு பெருக்குத்தொடரியை காண்க.
17 ஒரு பெருக்குத்தொடரியின் 4ஆம், 10ஆம், 16ஆம் உருபுகள் முறையே x, y, z எனில், x, y, z ஒரு பெருக்குத்தொடரி என நிறுவுக.
18 $8, 88, 888, 8888, \ldots$ என்ற தொடரியின் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகையை காண்க.
19 $2, 4, 8, 16, 32$ என்ற தொடரி, $128, 32, 8, 2, 1/2$ என்ற தொடரி ஆகியவற்றின் நிகரான உருபுகளின் பெருக்கல்களின் கூட்டுத்தொகையை காண்க.
20 $a, ar, ar^2, \ldots ar^{n-1}$ என்ற தொடரி, $A, AR, AR^2, \ldots AR^{n-1}$ என்ற தொடரி ஆகியவற்றின் நிகரான உருபுகளின் பெருக்கல்கள் ஒரு பெருக்குத்தொடரியாவதை காட்டுக. அதன் பொதுவிகிதம் என்ன?
21 நான்கு எண்களுள்ள ஒரு பெருக்குத்தொடரியின் மூன்றாம் உருபு முதல் உருபைவிட 9 அதிகமானது; இரண்டாம் உருபு 4ஆம் உருபைவிட 18 அதிகமானது. தொடரியை காண்க.
22 ஒரு பெருக்குத்தொடரியின் pஆம், qஆம், rஆம் உருபுகள் முறையே a, b, c எனில் $a^{q-r}\, b^{r-p}\, c^{p-q} = 1$ என நிறுவுக.
23 ஒரு பெருக்குத்தொடரியின் முதல் உருபும் nஆம் உருபும் முறையே a, b என்றும் n உருபுகளின் பெருக்குத்தொகை P என்றுமிருந்தால், $P^2 = (ab)^n$ என்று நிறுவுக.
24 ஒரு பெருக்குத்தொடரியின் முதல் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகைக்கும் $(n+1)$இலிருந்து $2n$வரையான உருபுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குமான விகிதம் $1/r^n$ என்று காட்டுக.
25 a, b, c, d ஆகியவை பெருக்குத்தொடரியில் இருந்தால் $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$ என்று காட்டுக.
26 3க்கும் 81க்குமிடையில் இரண்டு எண்களை செருகி ஒரு பெருக்குத்தொடரியை உண்டாக்குக.
27 a, b ஆகியவற்றின் பெருக்கிடைமம் $(a^{n+1}+b^{n+1})/(a^n+b^n)$ என்றிருக்கும்படி nஇன் மதிப்பை காண்க.
28 இரண்டு எண்களின் கூட்டுத்தொகை அவற்றின் பெருக்கிடைமத்தின் 6 மடங்கு. இந்த எண்கள் $(3+2\sqrt{2}) : (3-2\sqrt{2})$ என்ற விகிதத்தில் இருப்பதை காட்டுக.
29 இரண்டு நேர்ம எண்களின் கூட்டிடைமமும் பெருக்கிடைமமும் முறையே Aயும் Gயும் எனில், அந்த எண்கள் $A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)}$ என்று காட்டுக.
30 ஒரு பாட்டீரியவளர்ப்பிலுள்ள பாட்டீரியங்களின் எண்ணிக்கை ஒவ்வொரு மணிநேரத்திலும் இரட்டிக்கிறது. தொடக்கத்தில் 30 பாட்டீரியங்கள் இருந்தால் 2ஆம், 4ஆம், nஆம் மணிநேர முடிவில் எத்தனை பாட்டீரியங்கள் இருக்கின்றன?
31 ஆண்டுக்கு 10% வீதத்தில் கூட்டுவட்டியை தரும் வங்கியில் ₹500ஐ போட்டுவைத்தால் 10 ஆண்டுகளுக்குப்பின் எவ்வளவு பணம் கிடைக்கும்?
32 ஒரு ஈரடுக்குச்சமன்பாட்டின் மூலங்களின் கூட்டிடைமமும் பெருக்கிடைமமும் முறையே 8உம் 5உம் எனில், ஈரடுக்குச்சமன்பாட்டை காண்க.

9.7 தனித்துவத்தொடர்களின் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை

இங்கு கீழ்க்காணும் தனித்துவத்தொடர்களின் கூட்டுத்தொகைகளை கருதுவோம்.

(அ) $1 + 2 + + \cdots + n$ (முதல் n இயலெண்களின் கூட்டுத்தொகை)

(ஆ) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ (முதல் n இயலெண்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை)

(இ) $1^3 +^3 + \quad + \cdots + n^3$ (முதல் n இயலெண்களின் கனவங்களின் கூட்டுத்தொகை)

ஒவ்வொன்றாக எடுத்துக்கொள்வோம்.

(அ) $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ எனில்,

$$S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

என்பதை 9.1ஆம் பகுதியில் கற்றோம்.

(ஆ) இங்கு $S_n = 1 \quad + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

$k^3 - (k-1)^3 = 3k \quad - 3k + 1$ என்ற முற்றொருமையை கருதுவோம். $k = 1,2,3, \dots , n$ என்று அடுத்தடுத்து இடும்போது

$$1^3 - 0 \quad = 3(1)^3 - 3(1) + 1$$
$$2^3 - 1^3 = 3(2)^2 - 3(2) + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3(3)^2 - 3(3) + 1$$
$$\dots$$
$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n)^2 - 3(n) + 1$$

இரண்டு பக்கங்களையும் கூட்டி

$$n^3 - 0^3 = 3\left(1^2 + 2^2 + 3 \quad + \cdots + n^2\right) - 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$$

$$^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} \quad + n$$

என்று காண்கிறோம்.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

என்பதை (அ)வில் கண்டோம். எனவே

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left(n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n\right)$$
$$= \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(இ) இங்கு $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$.

$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ என்ற முற்றொருமையை கருதுவோம். $k = 1,2,3, \dots , n$ என்று அடுத்தடுத்து இடும்போது

$$2^4 - 1^4 = 4(1)^3 + 6(1)^2 + 4(1) + 1$$
$$^4 - 2^4 = 4(2)^3 + 6(2)^2 + 4(2) + 1$$
$$4^4 - 3^4 = 4(3)^3 + 6(3)^2 + 4(3) + 1$$
$$\dots$$
$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

இரண்டு பக்கங்களையும் கூட்டி,

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4(1^3 + ^3 + 3^3 + \cdots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \quad ^2) + 4(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$$

$$= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} \quad + 4\sum_{=1}^{n} k + n \qquad (9.19)$$

என்று பெறுகிறோம். $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ என்பதை (அ)விலும்

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

என்பதை (ஆ)விலும் கண்டோம். இவற்றை (9.19)ஆம் சமன்பாட்டில் இட்டு

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} - n$$

$$4S_n = n^4 + 4 \quad ^3 + 6n^2 + 4n - n(2n^2 + 3n + 1) - 2n(n+1) - n$$
$$= n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2(n+1)^2$$

என்று பெறுகிறோம். எனவே,

$$S \quad = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

சான்று 19 $5 + 11 + 19 + 29 + 41 + \cdots$ என்ற தொடரியின் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகையை காண்க.

தீர்வு கூட்டுத்தொகையை இரண்டுமுறை கீழ்க்காணுமாறு எழுதுவோம்.

$$S \quad = 5 + 11 + 19 + 29 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = 0 + 5 + 11 + 19 + \cdots + \quad _{n-2} + \quad _{n-1} + a_n$$

கழித்து

$$0 = 5 + [6 + 8 + 10 + 12 + \cdots (n-1) \text{ உருபுகள்}] - a_n$$

அதாவது

$$a_n = 5 + \frac{(n-1)[12 + (n-2) \times 2]}{2}$$
$$= 5 + (n-1)(n+4)$$
$$= n^2 + 3n + 1$$

என்று காண்கிறோம். எனவே

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (k^2 + 3k + 1)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$
$$= \frac{n(n+2)(n+4)}{3}$$

சான்று 20 nஆம் உருபு $n(n+3)$ஆக உள்ள ஒரு தொடரியின் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகையை காண்க.

தீர்வு $a_n = n(n+3) = n^2 + 3n$

n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$$

பயிற்சி 9.4

1இலிருந்து 7வரையான பயிற்சிகளிலுள்ள ஒவ்வொரு தொடரியின் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகையை காண்க.

1 $1\times 2+2\times 3+3\times 4+4\times 5+\cdots$

2 $1\times 2\times 3+2\times 3\times 4+3\times 4\times 5+\cdots$

3 $3\times 1^2+5\times 2^2+7\times 3^2+\cdots$

4 $$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots$$

5 $5^2+6^2+7^2+\cdots+20^2$

6 $3\times 8+6\times 11+9\times 14+\cdots$

7 $1^2+(1^1+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\cdots$

8இலிருந்து 10வரையான பயிற்சிகளில் குறிப்பிட்ட nஆம் உருபுள்ள தொடரியின் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகையை காண்க.

8 $n(n+1)(n+4)$

9 n^2+2^n

10 $(2n-1)^2$

பலவகைச்சான்றுகள்

சான்று 21 ஒரு கூட்டுத்தொடரியின் pஆம், qஆம், rஆம், sஆம் உருபுகள் ஒரு பெருக்குத்தொடரி யாகின்றன எனில், $(p-q)$, $(q-r)$, $(r-s)$ ஆகியவையும் பெருக்குத்தொடரிகள் எனக்காட்டுக.

தீர்வு இங்கு

$$a_p=a+(p-1)d \qquad (9.20)$$
$$a_q=a+(q-1)d \qquad (9.21)$$
$$a_r=a+(r-1)d \qquad (9.22)$$
$$a_s=a+(s-1)d \qquad (9.23)$$

இந்த நான்கும் பெருக்குத்தொடரியில் இருப்பதால்

$$\frac{a_q}{a_p}=\frac{a_r}{a_q}=\frac{a_q-a_r}{_p-a_q}=\frac{q-r}{p-q}\,(\text{ஏன்?}) \qquad (9.24)$$

இதைப்போல்

$$\frac{a_r}{a_q}=\frac{s_s}{a_r}=\frac{a_r-a_s}{a_q-a_r}=\frac{r-s}{q-r}\,(\text{ஏன்?}) \qquad (9.25)$$

எனவே, (9.24), (9.25)ஆம் சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\frac{q-r}{p-q}=\frac{r-s}{q-r}$$

அதாவது, $p-q, q-r, r-s$ ஆகியவை பெருக்குத்தொடரியில் உள்ளன.

சான்று 22 a, b, c ஆகியவை பெருக்குத் தொடரியிலிருக்கின்றன.

$$\frac{1}{x}=b^{\frac{1}{y}}=c^{\frac{1}{z}}$$

எனில் x,y,z கூட்டுத்தொடரியிலுள்ளன என்று காட்டுக.

தீர்வு

$$a^{\frac{1}{x}}=b^{\frac{1}{y}}=c^{\frac{1}{z}}=k$$

என்க. அப்படியெனில்

$$a=k^x, b=k^y, c=k^z \qquad (9.26)$$

a,b,c பெருக்குத்தொடரி என்பதால்

$$b^2=ac \qquad (9.27)$$

(9.26)ஐயும் (9.27)ஐயும் பயன்படுத்தி

$$k^{2y}=k^{x+z}, \qquad \text{அதாவது } 2y=x+z$$

என்று பெறுகிறோம். எனவே, x,y,z கூட்டுத்தொடரி.

சான்று 23 $(a^2+b^2+c^2)p^2-2(ab+bc+cd)p+(b^2+c^2+d^2)\le 0$; இங்கு a,b,c,d,p வெவ்வேறு மெய்யெண்கள். அப்படியெனில் a,b,c,d ஆகியவை பெருக்குத்தொடரி என்று காட்டுக.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$(a^2+b^2+c^2)p^2-2(ab+bc+cd)p$$
$$+(b^2+c^2+d^2)\le 0 \qquad (9.28)$$

இதை விரிவாக்கி மாற்றடுக்கி

$$\left(a\quad p^2-2abp+b^2\right)+\left(b^2\quad ^2-2bcp+c^2\right)$$
$$+\left(c^2p^2-2cdp+\quad ^2\right)\le 0$$

அதாவது

$$(ap-b)^2+(bp-c)^2+(cp-d)^2\le 0 \quad (9.29)$$

என்று பெறுகிறோம். மெய்யெண்களின் வர்க்கங்களில் கூட்டுத்தொகை எதிர்மமற்றது என்பதால்

$$(ap-b)^2+(bp-c)^2+(cp-d)^2=0 \quad (9.30)$$

அதாவது

$$ap-b=0, \qquad bp-c=0, \qquad cp-d=0$$

இதன் உள்ளுரை

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=p$$

எனவே, a,b,c,d ஆகியவை பெருக்குத்தொடரி யில் இருக்கின்றன.

சான்று 24 p,q,r பெருக்குத்தொடரி;

$$p\quad ^2+2qx+r=0$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கும்

$$dx^2+2ex+f=0$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கும் ஒரு பொதுவான வர்க்கமூலம் இருக்கிறது எனில், $d/p, e/q, f/r$ ஆகியவை கூட்டுத்தொடரியிலிருப்பதை காட்டுக.

தீர்வு $px^2 + 2qx + r = 0$இன் மூலங்கள்

$$x = \frac{-2q \pm \sqrt{4q^2 - 4rp}}{2p}$$

p, q, r பெருக்குத்தொடரியிலிருப்பதால் $q^2 = pr$. எனவே, $x = -q/p$. இது $dx^2 + 2ex + f = 0$இன் மூலமும் ஆவதால்

$$d\left(-\frac{q}{p}\right) \quad + 2e\left(-\frac{q}{p}\right) + f = 0$$

அதாவது

$$dq^2 - 2eqp + fp^2 = 0 \qquad (9.31)$$

(9.31)ஆம் சமன்பாட்டை pq^2ஆல் வகுத்து $q^2 = pr$ என்பதையும் பயன்படுத்தி

$$\frac{d}{p} - \frac{2e}{q} + \frac{fp}{pr} = 0, \qquad \text{அதாவது} \frac{2e}{q} = \frac{d}{p} + \frac{f}{r}$$

என்று பெறுகிறோம், எனவே

$$\frac{d}{p}, \frac{e}{q}, \frac{f}{}$$

ஆகியவை கூட்டுத்தொடரியில் உள்ளன.

9ஆம் படலத்தின் பலவகைப்பயிற்சிகள்

1 ஒரு கூட்டுத்தொடரியின் $(m+n)$ஆம், உருபு $(m-n)$ஆம் உருபு ஆகியவற்றின் கூட்டுத்தொகை mஆம் உருபின் இரண்டு மடங்கு என்று காட்டுக.

2 ஒரு கூட்டுத்தொடரியின் மூன்று எண்களின் கூட்டுத்தொகை 24, அவற்றின் பெருக்குத்தொகை 40 எனில் அந்த எண்களை காண்க.

3 ஒரு கூட்டுத்தொடரியின் n, $2n$, $3n$ உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை முறையே S_1, S_2, S_3 என்க. $S_3 = 3(S_2 - S_1)$ எனக்காட்டுக.

4 200க்கும் 400க்குமிடையான 7ஆல் வகுபடும் எண்களின் கூட்டுத்தொகையை காண்க.

5 1இலிருந்து 100 வரையான 2ஆலோ அல்லது 5ஆலோ வகுபடும் எண்களின் கூட்டுத்தொகையை காண்க.

6 4ஆல் வகுக்கம்போது 1ஐ மீதியாகத்தரும் ஈரிலக்க எண்களின் கூட்டுத்தொகையை காண்க.

7 f என்ற சார்பன்

$$f(+y) = f(x)f(y), x \in N, y \in N; \qquad f(1) = 3; \sum_{x=}^{n} f(x) = 120$$

ஆகியவற்றை நிறைவேற்றினால் nஇன் மதிப்பை காண்க.

8 முதலுருபு 5உம் பொதுவிகிதம் 2உமான பெருக்குத்தொடரியின் சில உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை 315. இறுதியுருபையும் உருபுகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

9 ஒரு பெருக்குத்தொடரின் முதலுருபு 1; அதன் மூ$a($ன்றாம் உருபும் ஐந்தாம் உருபும் சேர்ந்த கூட்டுத்தொகை 90. தொடரின் பொதுவிகிதத்தை காண்க.

10 ஒரு பெருக்குத்தொடரின் மூன்று உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை 56. இந்த எண்களிலிருந்து முறையே $1, 7, 21$ ஆகிய எண்களை கழித்தால் ஒரு கூட்டுத்தொடரியை பெறுகிறோம். அந்த எண்களை காண்க.

11 ஒரு பெருக்குத்தொடரியில் இரட்டைப்படை எண்ணிக்கையான எண்கள் உள்ளன. எல்லா உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை ஒற்றைப்படை இடங்களிலுள்ள உருபுகளின் கூட்டுத்தொகையின் 5 மடங்கு எனில், பொதுவிகிதத்தை காண்க.

12 ஒரு கூட்டுத்தொடரியின் முதல் நான்கு உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை56. இறுதி நான்கு உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை 112. அதன் முதல் உருபு 11 எனில், உருபுகளின் எண்ணிக்கையை காண்க.

13

$$\frac{a+bx}{a-bx} = \frac{b+cx}{b-cx} = \frac{c+dx}{c-dx}, \qquad (x \neq 0)$$

எனில், a, b, c, d ஆகியவை பெருக்குத்தொடரியில் இருப்பதை காட்டுக.

14 ஒரு பெருக்குத்தொடரியின் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை S, பெருக்குத்தொகை P, புரட்டுகளின் கூட்டுத்தொகை R என்க. $P^2R^n = S^n$ என்பதை நிறுவுக.

15 ஒரு கூட்டுத்தொடரியின் pஆம், qஆம், rஆம் உருபுகள் முறையே a, b, c எனில், $(q-r)a + (r-p)b + (p-q)c = 0$ என்று காட்டுக.

16

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right), b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right), c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

ஆகியவை ஒரு கூட்டுத்தொடரியில் இருந்தால், a, b, c கூட்டுத்தொடரியிலுள்ளன என்று நிறுவுக.

17 a, b, c, d ஆகியவை ஒரு பெருக்குத்தொடரியிலிருந்தால், $(a^n + b^n)$, $(b^n + c^n)$, $(c^n + d^n)$ ஆகியவை பெருக்குத்தொடரியாவதை நிறுவுக.

18 $x^2 - 3x + p = 0$இன் மூலங்கள் a, bயாகவும் $x^2 - 12x + q = 0$இன் மூலங்கள் c, dயாகவும், $a, , c, d$ பெருக்குத்தொடரியாகவும் இருந்தால், $(q+p):(q-p) = 17:15$ என்று நிறுவுக.

19 a, b என்ற இரண்டு நேரிய எண்களின் கூட்டிடைமமும் பெருக்கிடைமமும் $m:n$ என்ற விகிதத்தில் இருந்தால், $a:b = \left(m+\sqrt{m^2-n^2}\right):\left(m-\sqrt{m^2-n^2}\right)$ எனக்காட்டுக.

20 a, b, c கூட்டுத்தொடரி, b, c, d பெருக்குத்தொடரி, $1/c, 1/d, 1/e$ கூட்டுத்தொடரி எனில், a, c, e பெருக்குத்தொடரி என்று நிறுவுக.

21 கீழ்க்காணும் தொடர்களின் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகையை காண்க.

a. $5 + 55 + 555 + \cdots$

b. $0.6 + 0.66 + 0.666 + \cdots$

22 $2 \times 4 + 4 \times 6 + 6 \times 8 + \cdots$ என்ற தொடரின் 20ஆம் உருபை காண்க.

23 $3 + 7 + 13 + 21 + 31 + \cdots$ என்ற தொடரின் முதல் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகையை காண்க.

24 முதல் n இயலெண்கள், அவற்றின் வர்க்கங்கள், கனவங்கள் ஆகியவற்றின் கூட்டுத்தொகைகள் முறையே S_1, S_2, S_3 எனில் $9S_2^2 = S_3(1 + 8S_1)$ என்று காட்டுக.

25 கீழ்க்காணும் தொடரின் n உருபுகள்வரையான கூட்டுத்தொகையை காண்க.

$$\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\cdots$$

26 நிறுவுக.

$$\frac{1\times 2^2+2\times 3^2+\cdots+n\times(n+1)^2}{1^2\times 2+2^2\times 3+\cdots+n^2\times(n+1)}=\frac{3n+5}{3n+1}$$

27 ஒரு விவசாயி ஒரு பழைய இழுவையை ₹12,000க்கு வாங்குகிறார். தொடக்கத்தில் ₹6000ஐ செலுத்தி ஆண்டுதோறும் ₹500 தவணையையும் எஞ்சியிருப்புக்கு 12% வட்டியையும் செலுத்த ஒப்புக்கொள்கிறார். அவருக்கு இழுவையின் அடக்கவிலை என்ன?

28 சமுசது அலி ஒரு துள்ளுந்தை ₹22,000க்கு வாங்குகிறார். தொடக்கத்தில் ₹4000 செலுத்தி ஆண்டுதோறும் ₹1000 தவணையையும் எஞ்சியிருப்புக்கு 10% வட்டியையும் செலுத்த ஒப்புக்கொள்கிறார். அவருக்கு துள்ளுந்தின் அடக்கவிலை என்ன?

29 ஒருவர் ஒரு நூலை படித்துப்பார்த்து அதன் சிறப்பை தன் நான்கு நண்பர்களுக்கு எடுத்துரைக்கிறார். அவர்களும் வாங்கிப்படித்து ஒவ்வொருவரும் நூலை வாங்காத மேலும் நான்கு நண்பர்களுக்கு எடுத்துரைக்கின்றனர். இவ்வாறே தொடுப்பு அறுபடாமல் தொடர்ந்தால், நூலின் விலை ₹50எனில், 8ஆம் நண்பர்கணத்தினர் நூலை வாங்கியதும் பதிப்பாளருக்கு இதனால் கிடைக்கும் மொத்த வருவாய் எவ்வளவு?

30 ஒரு மனிதர் ₹10,000த்தை ஒரு வங்கியில் 5% எளிய வட்டிவீதத்தில் வைப்பிடுகிறார். 15 ஆண்டுகளுக்குப்பின்னும் 20 ஆண்டுகளுக்குப்பின்னும் வங்கியிலிருக்கும் மொத்த தொகைகள் யாவை? வட்டி ஆண்டுதோறும் கணக்கிடப்படும் கூட்டுவட்டி எனில், தொகைகள் யாவை?

31 ஒரு உற்பத்தியாளர் ₹15,625 அடக்கவிலையான ஒரு எந்திரத்தின் மதிப்பு ஒவ்வோராண்டும் 20% மதிப்பிறங்கும் என்று மதிப்பிடுகிறார். 5 ஆண்டுகளுக்குப்பின் எந்திரத்தின் மதிப்பீட்டை காண்க.

32 ஒரு வேலையை ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையான நாட்களில் செய்துமுடிக்க 150 வேலையாட்களை அமர்த்துகிறோம். இரண்டாம் நாளில் 4 வேலையாட்கள் விலகிவிட்டனர். மூன்றாம் நாள் 4பேர் நின்றுவிட்டனர். இவ்வாறே தொடர்ந்தது. வேலையை முடிக்க 8 நாட்கள் அதிகமானது. வேலை முடிய ஆன நாட்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

சுருக்கவுரை

- எண்கள் ஒரு விதியின்படி ஒரு குறிப்பிட்ட முறைமையில் இருப்பதை *தொடரி* என்கிறோம். தொடரியை இயலெண்களோ அதன் $\{1,2,3,\dots,k\}$ போன்ற ஒரு உட்கணமோ **கள**மாகவுள்ள ஒரு சார்பன் என்றும் வரையறுக்கிறோம். முடிவுறு எண்ணிக்கையான உருபுகளுள்ள தொடரி *முடிவுறு தொடரி*, முடிவிலா எண்ணிக்கையான உருபுகளுள்ள தொடரி *முடிவிலாத்தொடரி*.
- $a_1,a_2,a_3.\dots$ ஒரு தொடரி என்க. $a_1+a_2+a_3+\cdots$என்று குறிக்கும் கூட்டல் ஒரு *தொடர்*. முடிவுறு எண்ணிக்கையான உருபுகளுள்ள தொடர் ஒரு *முடிவுறுதொடர்*.
- ஒரு தொடரியின் உருபுகள் ஒரு மாறிலியால் ஒழுங்காக கூடினாலோ குறைந்தாலோ அது ஒரு *கூட்டுத்தொடரி*. மாறிலி கூட்டுத்தொடரியின் *பொதுவேறுபாடு*. கூட்டுத்தொடரியின் முதல் உருபை a என்றும் பொதுவேறுபாட்டை d என்றும் இறுதியுருபை l என்றும் குறிப்பது வழக்கம். பொதுவுருபான nஆம் உருபை $a_n=a_{(n-1)}d$ என்று குறிக்கிறோம்.

  கூட்டுத்தொடரியின் முதல் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை

  $$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]=\frac{n}{2}(a+l)$$

- இரண்டு எண்களின் கூட்டிடைமத்தை

  $$A=\frac{a+b}{2}$$

  தருகிறது. அதாவது, a,A,b ஒரு கூட்டுத்தொடரி.
- ஒரு தொடரியில் எந்த உருபுக்கும் அதற்கு முந்திய உருபுக்குமான விகிதம் எல்லாவுருபுகளுக்கும் சமமாயிருந்தால் அது *பெருக்குத்தொடரி*, பெருக்குத்தொடரியில் முதலுருபை a என்றும் பொதுவிகிதத்தை r என்றும் குறிப்பது வழக்கம். பெருக்குத்தொடரியின் பொதுவான nஆம் உருபு $a_n=ar^{n-1}$. பெருக்குத்தொடரியின் முதல் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை

  $$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r},\qquad r\neq 1 \text{ எனில்}$$

- a, b என்ற இரண்டு நேர்ம எண்களின் பெருக்கிடைமம் $G = \sqrt{ab}$. அதாவது, a, G, b ஒரு பெருக்குத்தொடர்.