பிற்சேர்க்கை 1

முடிவிலாத்தொடர்

A 1.1 அறிமுகம்

ஒன்பதாம் படலத்தில் தொடரிகளையும் தொடர்களையும் படித்தபோது $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ என்ற முடிவிலி உருபுகளுள்ள தொடரியை முடிவிலாத்தொடரி என்றோம்; அதனுடன் தொடர்பான $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ என்ற கூட்டடுக்கை முடிவிலாத்தொடர் என்றோம். தொடரை சிகுமாக்குறியீட்டை பயன்படுத்தி

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

என்று சுருக்கவடிவில் எழுதலாம். இந்த பிற்சேர்க்கையில் வெவ்வேறு சிக்கல்களில் தேவைப்படும் சில தனித்துவ வகையான தொடர்களை படிப்போம்.

A 1.2 எந்த அடுக்கெண்ணுக்குமான ஈருறுப்புத்தேற்றம்

எட்டாம் படலத்தில் அடுக்கெண் நேர்ம முழுவெண்ணாயிருக்கும் வேற்றுவத்தில் ஈருறுப்புத்தேற்றத்தை உரையாற்றினோம். இந்த பகுதியில், அடுக்கெண் முழுவெண்ணாயிருக்கத் தேவையில்லாத பொதுவமான வடிவத்தை உரையாற்றுகிறோம். இது ஈருறுப்புத்தொடர் எனப்படும் ஒரு குறிப்பிட்ட வகையான முடிவிலாத்தொடரை தருகிறது. சில பயன்பாடுகளை சான்றுகளால் விளக்குகிறோம்.

$$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + \cdots + {}^nC_n x^n$$

என்பதை நாம் அறிவோம். இங்கு n என்ற அடுக்கெண் எதிர்மமற்ற முழுவெண். அதை எதிர்ம முழுவெண்ணாலோ பின்னத்தாலோ மாற்றிட்டால் ${}^nC_r$ க்கு பொருளில்லை என்பதை நோக்குக.

இப்போது, அடுக்கெண் எதிர்மமாகவும் பின்னமாகவும் இருப்பதற்கான ஒரு ஈரடுக்குத்தேற்றத்தை முடிவிலாத்தொடராக நிறுவலின்றி உரைக்கிறோம்.

தேற்றம் $|x| < 1$ என்றபோது

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots$$

என்ற வாய்ப்பாடு சரியாகிறது.

குறிப்புரை 1. $|x| < 1$ என்ற வரைக்கட்டை கவனமாக நோக்குக. அதாவது m எதிர்மமாகவோ பின்னமாகவோ இருக்கும்போது $-1 < x < 1$ என்பது கட்டாயமாகிறது. சான்றாக, $x = -2, m = -2$ என்றிருக்கும்போது தொடர்

$$(1-2)^{-2} = 1 + (-2)(-2) + \frac{(-2)(-3)}{1.2}(-2)^2 + \cdots$$

$$1 = 1 + 4 + 12 + \cdots$$

என்று தருகிறது. இது சரியன்று என்பது தெளிவு.

2. m எதிர்ம முழுவெண்ணாகவோ பின்னமாகவோ இருக்கும்போது $(1+x)^m$இன் விரிவாக்கத்தில் முடிவிலி உருபுகள் உள்ளன.

இப்போது $(a+b)^m$இன் விரிவாக்கத்தை கருதுவோம்.

$$(a+b)^m = \left[a\left(1+\frac{b}{x}\right)\right]^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$$

$$= a^m\left[1 + m\frac{b}{a} + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 + \cdots$$

இந்த விரிவாக்கம் $|b/a| < 1$ அதாவது $|b| < |a|$ என்றபோது மட்டுமே ஏற்புடையது.

$(a+b)^m$இன் விரிவாக்கத்தின் பொதுவுருபு

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r-1)a^{m-r}b^r}{1.2.3\ldots r}$$

ஈருறுப்புத்தேற்றத்தின் சில குறிப்பிட்ட வேற்றுவங்களை கீழ் தருகிறோம். இவற்றின் வருவித்தல்களை மாணவர்களுக்கு பயிற்சியாக விடுகிறோம். இவை $|x| < 1$ என்றபோதே ஏற்புடையவை.

(அ) $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$

(ஆ) $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

(இ) $(1+x)^{-2} = 1 = [-2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$

(ஈ). $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$

சான்று 1 $|x| < 2$ என்றபோது

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

என்பதை விரிவாக்குக.

தீர்வு

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=1+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1}\left(-\frac{x}{2}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1.2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2+\cdots$$
$$=1+\frac{x}{4}+\frac{3x^2}{32}+\cdots$$

A 1.3 முடிவிலாப்பெருக்குத் தொடர்

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ என்ற தொடரியில்
$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=r \text{ (மாறிலி)}, \qquad k=1,2,3,\ldots,(n-1)$$
என்றிருந்தால், அது பெருக்குத்தொடரி என்பதை 9.5ஆம் பகுதியில் கண்டோம். குறிப்பாக, $a_1=a$ என்று எடுப்பதால் விளையும் $a, ar, ar^2, \ldots ar^{n-1}$ என்ற தொடரியை செந்தரப்பெருக்குத்தொடரியாக கொள்கிறோம்; இங்கு, a பெருக்குத்தொடரியின் முதலுருபும் r பொதுவிகிதமும்.

$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$ என்ற பெருக்குத்தொடரின் கூட்டலை காண
$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$
என்ற வாய்ப்பாட்டை முன்பு பெற்றோம். இந்த பகுதியில் $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$ என்ற முடிவிலாப்பெருக்குத்தொடரின் கூட்டலுக்கான வாய்ப்பாட்டை தந்து சில சான்றுகளை காண்போம்.
$$1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$$
என்ற பெருக்குத்தொடரியை கருதுக. இங்கு $a=1, r=2/3$. முதல் n உருபுகளின் கூட்டுத்தொகை
$$S_n=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}=3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$
n பெரிதாகும்போது $(2/3)^n$ இன் நடத்தையை ஆராய்வோம்.

n	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$
1	0.6667
5	0.1316872428
10	0.01734152992
20	0.00030072866

n பெரிதாக ஆக $(2/3)^n$ சுழியத்தை நெருங்குவதாக தோன்றுகிறது. கணிதப்படி, n போதுமான அளவுக்கு பெரிதாகும்போது $(2/3)^n$ போதுமான அளவுக்கு சிறிதாகிறது என்கிறோம். இதன் விளைவாக, முடிவிலி உருபுகளின் கூட்டல் $S=3$ என்றாகிறது.

எனவே, $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$ என்ற முடிவிலாப்பெருக்குத்தொடருக்கு r என்ற பொதுவிகிதம் 1க்கு குறைவாயிருந்தால்,
$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$$
இந்த வேற்றுவத்தில் $|r|<1$ என்பதால், $n\to\infty$ எனும்போது $r^n\to 0$; அதனால்
$$\frac{ar^n}{1-r}\to 0$$
$$S_n\to\frac{a}{1-r}, \qquad n\to\infty$$
முடிவிலாப்பெருக்குத்தொடரியின் முடிவிலிக் கூட்டலை S என்று குறிக்கிறோம். இவ்வாறு
$$S=\frac{a}{1-r}$$
என்று பெறுகிறோம். சான்றாக,
$$\text{(அ) } 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$
$$\text{(ஆ) } 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

சான்று 2 கீழ்க்காணும் முடிவிலாப்பெருக்குத் தொடரியின் முடிவிலிக்கூட்டலை காண்க
$$\frac{-5}{4}, \frac{5}{16}, \frac{-5}{64}, \ldots$$
தீர்வு இங்கு
$$a=\frac{-5}{4}, r=-\frac{1}{4}$$
மேலும், $|r|<1$. எனவே, முடிவிலிக்கூட்டுத் தொகை
$$\frac{\frac{-5}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{-5}{4}}{\frac{5}{4}}=-1$$

A 1.4 அடுக்குத்தொடர்

இலியோனாடு ஆயிலர் (1707-1783) என்ற மாபெரும் சுவிசக்கணிதர் e என்ற எண்ணை 1748இல் தன் நுண்கணிதநூலில் அறிமுகமாக்கினார். வட்டத்தின் படிப்பில் π முக்கியமாவதைப் போலவே நுண்கணிதப்படிப்பில் e முக்கியமாகிறது.

கீழ்க்காணும் எண்களின் முடிவிலாத்தொடரை கருதுக.
$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots \qquad (A1.1)$$
இந்த தொடரின் கூட்டுத்தொகையை e என்று குறிக்கிறோம்.

இப்போது eயை மதிப்பிடுவோம். தொடரின் ஒவ்வோருருபும் நேர்மம் என்பதால், கூட்டுத்

தொகையும் நேர்மம் என்பது தெளிவு. கீழ்க்காணும் இரண்டு கூட்டுத்தொகைகளை கருதுக.

$$\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots \qquad (A1.2)$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots \qquad (A1.3)$$

இவற்றின் நிகரான உருபுகளை ஒப்பிட,

$$\frac{1}{3!}=\frac{1}{6},\quad \frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}\quad \text{என்பதால்}\quad \frac{1}{3!}<\frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{4!}=24,\quad \frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}\quad \text{என்பதால்}\quad \frac{1}{4!}<\frac{1}{2^3}$$

$$\frac{1}{5!}=\frac{1}{120},\quad \frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}\quad \text{என்பதால்}\quad \frac{1}{5!}<\frac{1}{2^4}$$

போன்றவற்றை நோக்குகிறோம். உவமையால்

$$\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}},\qquad n>2$$

என்று பொதுவமாக்கலாம். இவ்வாறு, $(A1.2)$இன் ஒவ்வொரு உருபும் $(A1.3)$இன் நிகரான உருபைவிட சிறியது என்று காண்கிறோம். எனவே

$$\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) < \left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots\right) \qquad (A1.4)$$

என்றாகிறது. இருபக்கங்களிலும்

$$\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right) \text{ ஐ கூட்டி}$$

$$\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) < \left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots\right) \qquad (A1.5)$$

என்றும், வலப்பக்கத்திலுள்ள தொடரை கூட்டி

$$\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots\right) = 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots\right) = 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1+2=3$$

என்றும் பெறுகிறோம். எனவே $(A1.5)$ஆம் சமமின்மை $e<3$ என்று தருகிறது. $e>2$ என்பது வரையறையிலிருந்து தெளிவு. எனவே $2<e<3$.

குறிப்புரை x என்ற மாறி பங்குபெறும் e^x என்ற அடுக்குத்தொடரை

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

என்று எழுதலாம்.

சான்று 3 e^{2x+3}ஐ xஇ ன் அடுக்குகளாக விரிவாக்குவதில் x^2இன் கெழுவை காண்க.

தீர்வு

$$e^x = 1 = \frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

என்ற அடுக்குத்தொடரில் xஐ $(2x+3)$ஆல் மாற்றிட்டு

$$e^{2x+3} = 1+\frac{2x+3}{1!}+\frac{(2x+3)^2}{2!}+\cdots$$

என்று பெறுகிறோம். இங்கு பொதுவுருபு $(2x+3)^n/n! = (3+2x)^n/n!$. இதை ஈருறுப்புத் தேற்றத்தால்

$$\frac{1}{n!}[3^n + {}^nC_1 3^{n-1}(2x) + {}^nC_2\, 3^{n-2}(2x)^2+\cdots + (2x)^n]$$

என்று விரிவாக்கலாம். இங்கு, x^2 இன் கெழு ${}^nC_2 3^{n-1}2^2/n!$. எனவே, மொத்தத்தொடரில் x^2இன் கெழு

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{{}^nC_2 3^{n-2}2^2}{n!} = 2\sum_{n=2}^{\infty} n\frac{(n-1)3^{n-2}}{n!} = 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^{n-2}}{(n-2)!} = 2\left(1+\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\cdots\right) = 2e^3$$

இவ்வாறு, e^{2x+3} இன் விரிவாக்கத்தில் x^2 இன் கெழு $2e^3$.

மறுவழியாக

$$e^{2x+3} = e^3 . e^{2x} = e^3\left(1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\cdots\right)$$

எனவே x^2இன் கெழு $e^3 2^2/2! = 2e^3$.

சான்று 4 e^2இன் மதிப்பை ஒரு பதின்மவிடத்துக்கு துன்முழுவாக காண்க.

தீர்வு x பங்குபெறும் அடுக்கத்தொடருக்கான வாய்ப்பாடு

$$e^x = 1 = \frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

இதில் $x=2$ என்று இட்டு

$$e^2 = 1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^5}{5!}+\frac{2^6}{6!}+\cdots$$

$$= 1+2+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{15}+\frac{4}{45}+\cdots$$

$\geq$ முதல் ஏழு உருபுகளின் கூட்டல் ≥ 7.355

இதன் மறுபக்கமாக,

$$e^2 < \left(1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}\right) + \frac{2^5}{5!}\left(1+\frac{2}{6}+\frac{2^2}{6^2}+\frac{2^3}{6^3}+\cdots\right)$$
$$= 7+\frac{4}{15}\left(1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots\right)$$
$$= 7+\frac{4}{15}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = 7+\frac{2}{5} = 7.4$$

இவ்வாறு, e^2 7.355 க்கும் 7.4 க்குமிடையில் இருக்கிறது. எனவே ஒரு பதின்மவிடத்துக்கு துன்முழுவாக்கியபடி e^2இன் மதிப்பு 7.4.

A 1.5 மடக்கைத்தொடர்

மற்றொரு முக்கியமான தொடர் மடக்கைத்தொடர். இதுவும் முடிவிலாத்தொடர். கீழ்க்காணும் விளைவை நிறுவலின்றி உரைத்து அதன் பயன்பாட்டை சான்றுகளால் விளக்குகிறோம்.

தேற்றம் $-1 < x \leq 1$ எனில்

$$\text{இமட } (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

வலப்பக்கமுள்ள தொடரை மடக்கைத்தொடர் என்கிறோம்.

குறிப்பு மடக்கைத்தொடர் $x = 1$ என்றபோதும் ஏற்புடையது; $x = -1$ என்றபோது ஏற்புடைய தன்று என்பதை நோக்குக. $x = 1$ என்றபோது

$$\text{இமட } 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

சான்று 5 $x^2 - px + q = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் αவும் βவும் எனில் இமட $(1+px+qx^2)$

$$= (\alpha+\beta)x - \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x^2 + \frac{\alpha^3+\beta^3}{3}x^3 - \cdots$$

என்று நிறுவுக.

தீர்வு வலப்பக்கம்

$$= \left(\alpha x - \frac{\alpha^2x^2}{2} + \frac{\alpha^3x^3}{3} - \cdots\right) + \left(\beta x - \frac{\beta^2x^2}{2} + \frac{\beta^3x^3}{3} - \cdots\right)$$

$$= \text{இமட } (1+\alpha x) + \text{இமட } (1+\beta x)$$
$$= \text{இமட } [(1+\alpha x)(1+\beta x)]$$
$$= \text{இமட}(1+(\alpha+\beta)x + \alpha\beta x^2)$$
$$= \text{இமட } (1+px+qx^2)$$

இங்கு, ஈருறுப்புச்சமன்பாட்டின் கெழுக்க ளுக்கும் மூலங்களுக்குமுள்ள $\alpha+\beta = p$, $\alpha\beta = q$ என்ற உறவுகளை பயன்படுத்தி னோம். $|\alpha x| < 1$ என்றும் $|\beta x| < 1$ என்றும் எடுகொண்டோம்.

பிற்சேர்க்கை 2

கணித ஒப்புருவாக்கம்

A 2.1 முன்னுரை

கடந்த சில நூற்றாண்டுகளில் நாமடைந்த முன்னேற்றம் அறிவியல், நிதி, மேலாண்மை போன்ற பல்வேறு களங்களின் மெய்யுலகச் சிக்கல்களை தீர்ப்பதில் கணிதமுறைகளை பயனாக்குவதன் தேவையை உருவாக்கியுள்ளது. குறிப்பாக, தொடர்ந்து அதிகரித்துவரும் கணினிகளின் கணிப்புமத் திறனும் மற்ற கணிக்கீட்டுமுறைகளும் மெய்யு லகச்சிக்கல்களை தீர்ப்பதில் கணிதத்தின் பயன்பாட்டை அகலமாக பரப்பியிருக்கின்றன. இச்சிக்கல்களை கணித வடிவத்துக்கு மாற்றும்போது சிக்கல்களுக்கான மேம்பட்ட குறிப்பீடுகளையும் தீர்வுகளையும் தரவியலும். இங்ஙனம் மாற்றுவதற்கான வழிமுறையையே கணித ஒப்புருவாக்கம் என அழைக்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டுகளின்வழி இவ்வழிமுறை யின் படிகளை பழகிக்கொள்ளலாம். முதலில், ஒரு கணித ஒப்புரு என்றால் என்னவென்று சொன்னபின் அதன் படிகளைப்பற்றி உரையளிக்கிறோம்.

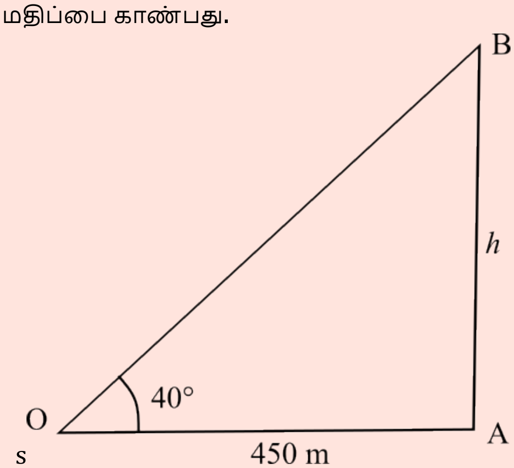
A 2.2 முதற்கருத்துகள்

புற உலகை புரிந்துகொள்ள கணித ஒப்புரு வாக்கம் ஒரு அவசியமான கருவி. முற்காலத்தில், சீனர்கள், எகிப்தியர்கள், இந்தியர்கள், பாபிலோனியர்கள், கிரேக்கர்கள் ஆகியோர் இயற்கையின் நிகழ்வுகளை புரிந்துகொள்ளவும் முன்னறியவும் தமது கணித அறிவை பயன்படுத் தினர். கட்டிடவியலர்களும் கைவினைஞர்களும் தமது கலைச்செயல்களை வடிவியற்கொள்கை களின் அடிப்படையில் அமைத்துக்கொண்டனர். ஒரு அளக்கையர் ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியை அளக்க விரும்புகிறார் என வைத்துக்கொள் வோம். இயற்பிய முறையில் அளவு நாடாவால் உயரத்தை அளப்பது மிகவும் கடினம். இதற்கான மற்றொரு வழி உயரத்தை காண பயன்படும் காரணிகளை கண்டுபிடிப்பது. தான் நிற்கும் இடத்திலிருந்து கோபுரத்தின் அடிப்பாகம் உள்ள தொலைவும் கோபுர உச்சியின் உயர்த்தக் கோணமும் தெரிந்தால் கோபுரத்தின் உச்சியை கணக்கிடவியலும் என்பது முக்கோணவியலில் அவர்கள் அறிந்தது. இப்போது, தான் நிற்கும் இடத்திலிருந்து கோபுரத்தின் அடிப்பாகம் உள்ள தொலைவையும், கோபுர உச்சியின் உயர்த்தக் கோணத்தையும் காண்பதாக அளக்கையரின் வேலை எளிதாகிவிட்டது. இப்படியாக, உயர்த்தக்கோணத்தை $40°$ என்றும் தொலைவை 450 மீட்டர் என்றும் அவர் அளந்தால், அவரது சிக்கலை சான்று 1 இல் உள்ளபடி தீர்க்கலாம்.

சான்று 1 தரையிலுள்ள O என்ற புள்ளியி லிருந்து ஒரு கோபுர உச்சியின் உயர்த்தக் கோணம் $40°$. கோபுரத்தின் அடிப்பாகம் O விலிருந்து 450 மீட்டர் தொலைவிலுள்ளது. கோபுரத்தின் உயரத்தை காண்க.

தீர்வு தீர்வைக்காண பின்வரும் படிகளை பின்பற்றுகிறோம்.

படி1 நாம் முதலில் மெய்ச்சிக்கலை புரிந்து கொள்ள முயல்வோம். இச்சிக்கலில் ஒரு கோபுரத்தின் உயரத்தை அளக்கவேண்டி யுள்ளது. அக்கோபுரத்தின் உயரத்தை h குறிப்பதாக கொள்க. கோபுரத்தின் அடிப்பாகம் O எனும் குறிப்பிட்ட புள்ளியிலி ருந்து தரையில் 450 மீட்டர் கிடைமட்டத் தொலைவிலுள்ளது. கிடைமட்டத்தொலைவை d யால் குறிப்போம். அதாவது $d = 450\,m$. கோபுரவுச்சியின் உயர்த்தக்கோணத்தை θ எனக்குறித்தால், $\theta = 40°$. இப்போது மெய்ச்சிக்கல், நமக்குத் தெரிந்த தொலவான d ஐயும் உயர்த்தக்கோணமான θ வையும் பயன்படுத்தி கோபுரத்தின் உயரமான h இன் மதிப்பை காண்பது.



படம் A2.1

படி 2 சிக்கலில் உயரம் (h), தொலைவு (d), உயர்த்தக்கோணம் (θ) ஆகிய மூன்று அளவுகளை கொடுத்திருக்கிறார்கள்.

இம்மூன்று அளவுகளுக்குமிடையான உறவை நாம் காண விழைகிறோம். அதை வடிவியமுறை படம் இல் கண்டவாறு தருகிறது.

AB கோபுரத்தை குறிக்கிறது. O என்ற புள்ளியிலிருந்து கோபுரத்தின் அடிப்பாகத் துக்கு (A) தரையிலுள்ள கிடைமட்டத் தொலைவை OA தருகிறது. $\angle AOB$ எனும் கோணம் உயர்த்தக்கோணம். அப்படியெனில்

$$\text{தொவி}\,\theta = \frac{h}{d}, \quad \text{அதாவது } h = d\,\text{தொவி}\,\theta \; (A2.1$$

இதுவே h, d, θ ஆகியவற்றை இணைக்கும் சமன்பாடு.

படி 3 $(A2.1)$ஆம் சமன்பாட்டை தீர்க்கும்போது h இன் மதிப்பு கிடைக்கிறது. $\theta = 40°; d = 450$ மீட்டர். எனவே,

$$h = 450 \text{ மீ} \times \text{தொவி } 40° = 450 \text{ மீ} \times 0.839$$
$$= 377.6 \text{ மீ}$$

என்று பெறுகிறோம்.

படி 4 மேற்கண்ட வழிமுறையில், கோபுரத்தின் உயரத்தை தோராயமாக நாம் 378 மீட்டராக பெற்றோம்.

இப்போது, சிக்கலைத்தீர்ப்பதில் பயன் படுத்திய வெவ்வேறு படிகளை மீள்பார்ப்போம். முதற்படியில், நாம் கொடுக்கப்பட்ட மெய்ச் சிக்கல் என்னவென்று ஆய்ந்தறிந்து உயரம், தொலைவு, உயர்த்தக்கோணம் ஆகிய மூன்று அளவுருக்கள் இச்சிக்கலில் ஈடுபட்டுவதை கண்டோம். எனவே, *முதற்படியில் மெய்யுலகச் சிக்கலை ஆய்வறிந்து அளவுருக்களை அடையாளம் காண்கிறோம்* என்பதை இது காட்டுகிறது.

இரண்டாம் படியில், வடிவியலின் சில கூறுகளை பயன்படுத்தி சிக்கலை படம் இல் காட்டியபடி வடிவியற்சிக்கலாக குறிக்கலாம் என்று கண்டோம். பின்னர், தொடுவிச்சார்பனின் முக்கோணவியவிகிதத்தை பயன்படுத்தி

$$h = d\,\text{தொவி}\,\theta$$

என்ற உறவை பெற்றோம். எனவே இரண்டாம் படியில் சிக்கலை கணிதவடிவில் வாய்ப்பாடாக் கினோம். அதாவது, மெயச்சிக்கலை குறிப்பிடும் ஒரு சமன்பாட்டை கண்டோம்.

மூன்றாம் படியில் கணிதச்சிக்கலை தீர்த்து $h = 377.6$ மீ என்ற விடையை கண்டோம். அதாவது, *மூன்றாம் படியில் கணிதச்சிக்கலை தீர்க்கிறோம்.*

இறுதிப்படியில் சிக்கலின் தீர்வை பொருளு ணர்ந்து கோபுரத்தின் உயரம் சுமார் 378 மீ என்று உரைத்தோம். இதை *கணித்ததீர்வை மெய் நிலைமையில் பொருளுணர்தல்* என்கிறோம்.

உண்மையில், இந்த படிகளே கணிதர்களும் மற்றவர்களும் பல்வேறு மெய்யுலக நிலைமைகளை ஆய்ந்தறிய பயன்படுத்துபவை. வெவ்வேறு நிலைமைகளை தீர்க்க கணிதம் ஏன் தேவை என்ற கேள்வியை ஆராய்வோம்.

பலவிதமான நிலைமைகளை ஆய்ந்தறி வதில் கணிதம் பயனாகும் சில சான்றுகளை பார்ப்போம்.

(அ) மனிதர்களிலும் பிற விலங்குகளிலும் ஆக்குசிசனையும் மற்ற ஊட்டச்சத்துக்களையும் உடலின் பல்வேறு பகுதிகளுக்கும் அனுப்ப குருதி யின் சீரான பாய்வு தேவைபடுகிறது. குருதிக் குழலில் ஏற்படும் நெறிப்போ குருதிக்குழல்க ளின் சிறப்பியல்புகளில் ஏற்படும் வெறெந்த மாற்றமோ பாய்வை மாற்றி சிறு வலியிலிருந்து திடீர் இறப்புவரையான சேதங்களை உண்டாக்க லாம். இங்கு குருதிப்பாய்வுக்கும் குருதிக்குழலின் சிறப்பியல்புகளுக்குமுள்ள ஒரு உறவு தேவை.

(ஆ) மட்டையாட்டத்தில் மூன்றாம் ஆட்ட நடுவர் கால்மறிப்பிழப்பைப்பற்றிய முடிவுகளை எடுக்கவேண்டும். இந்த முடிவுகளை அவர் மட்டையர் இல்லாவிட்டால் பந்தின் வீசுபாதை எவ்வாறிருக்கும் என்ற பாவனையாக்கத்தின் அடிப்படையில் எடுக்கிறார். பந்து மட்டையரின் காலில் படுமுன் அதன் கண்டறிந்த வீசைபாதைக்கான ஒரு கணிதச்சமன்பாட்டை வருவிக்கிறார். பாவனையாக்கிய இந்த ஒப்புரு முடிவெடுக்க பயன்படுகிறது.

(இ) வானிலையியற்றுறை வானிலைமுன் னறிதல்களை கணிதவொப்புருக்களின் அடிப் படையில் பெறுகிறது. வானிலையை மாற்றும் அளவுருகளில் வெப்பநிலை, வளியமுத்தம், வளியீரம், காற்றின் வேகம் ஆகியவை அடங்கு கின்றன. இவற்றை அளப்பதற்கான கருவிகளில் வெப்பத்தை அளக்கும் வெப்பநிலையளவி, வளியமுத்தத்தை அளக்கும் அழுத்தங்காட்டி, வளியீரத்தை அளக்க வளியீரமளவி, காற்றின் வேகத்தை அளக்க காற்று வேகமளவி ஆகியவை அடங்குகின்றன. நாட்டின் பல்வேறு இடங்களி லுள்ள நிலையங்களிலிருந்து தரவுகளை பெற்று அவற்றை கணினிகளுக்கு தருகிறார்கள். அவற்றை பகுப்பாய்ந்து கணினி பொருளுணர்த்துகிறது.

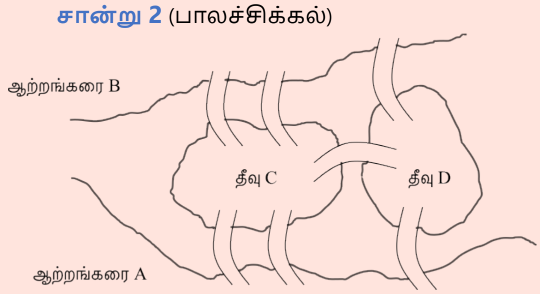
(ஈ) இந்தியாமுழுவதிலும் நிற்கும் பயிர்களிலிருந்து அரிசிவிளைச்சல் எவ்வளவு என வேளாண்மைத்துறை மதிப்பிட விரும்புகிறது. அறிவியலர்கள் அரிசி பயிரிட்ட பகுதிகளை அடையாளங் காண்கின்றனர். ஒரு ஏக்கருக்கு சராசரியாக கிடைக்கும் விளைச்சலை கண்டுபிடிக்கவும், முன்னறியவும், சில வகைநிற்ப வயல்களில் பயிர்களை அறுத்து அவற்றின் சராசரி விளைச்சலை எடைகாண்கி றார்கள். சில புள்ளியிய செய்நுட்பங்களின் அடிப்படையில் சராசரி நெல்விளைச்சலைப் பற்றிய முடிவுகளை எடுக்கின்றனர்.

இப்படிப்பட்ட சிக்கல்களை தீர்க்க கணிதர்கள் எவ்வாறு உதவுகிறார்கள்? அவர்கள் துறைவல்லுநர் களுடன் அமர்ந்து சிக்கலின் ஒரு கணிதவொப் புருவை உண்டாக்குகிறார்கள். சான்றாக, (அ)வில் சொன்ன சிக்கலில் ஒரு உடற்செயலியலர் சிந்தித்து இந்த சிக்கலின் கணிதச்சமானியை உருவாக்குகிறார். இந்த சமானியில் ஒன்றோ அதற்கு மேற்பட்டதோவான சமன்பாடுகளோ சமமின்மைகளோ இருக்கலாம். இவற்றையே கணித ஒப்புருகள் என்கிறோம். இவ்வொப்புருவை தீர்த்து மூலச்சிக்கலின்வழி

பொருளுணர்த்துகிறார்கள். இவ்வழிமுறையை விளக்கும் முன்னர் கணித வொப்புரு என்றால் என்னவென்று பார்ப்போம்.

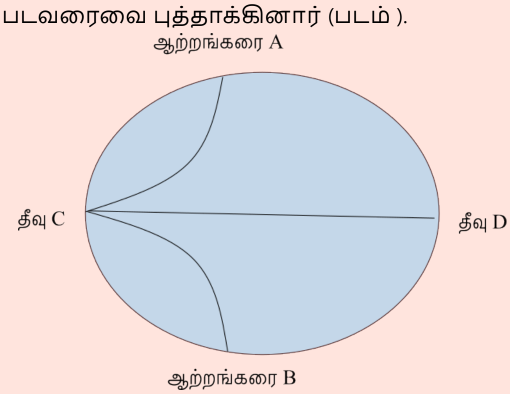
கணிதவொப்புரு ஒரு சூழ்நிலையை புரிந்து கொள்வதற்கான ஒரு குறிப்பீடு. கீழ்க்காணும் சான்றில் ஒரு ஆர்மவான வடிவியவொப்புருவை எடுத்துக்காட்டுகிறோம்.

சான்று 2 (பாலச்சிக்கல்)



படம்A2.2

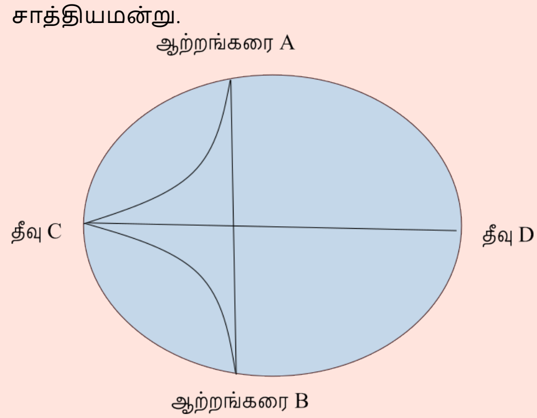
கானிசுபர்கு என்னும் நகரம் பிரீகல் என்ற நதியின்மீதுள்ளது. பதினெட்டாம் நூற்றாண்டில், ஒரு செருமானிய நகராயிருந்த அது இப்போது உருசிய நகராயுள்ளது. நகருக்குள் இரு நதித்தீவுகள் உள்ளன. அவை கரைகளுடன் ஏழு பாலங்களால் படம் 2இல் காட்டியபடி, இணைக்கப்பட்டுள்ளன. மக்கள் ஒவ்வொரு பாலத்தையும் ஒரு தடவை மட்டுமே குறுக்காகக்கடந்து நகரைச்சுற்றி நடக்க முயன்றனர். அது கடினமான சிக்கலென கண்டனர். இலியோனாடு ஆயிலர் எனும் சுவிசக்கணிதர் உருசியப்பேரரசான மாபெரும் கேத்தரினின் சேவையில் பணியாற்றியவர். இவர் மேற்கூறிய சிக்கலை கேள்வியுற்றார். ஆயிலர், 1936ஆம் ஆண்டில் இங்ஙனம் நடப்பது சாத்தியமற்றது என நிறுவினார். இதற்காக அவர் உச்சிகளும் விற்களும் அடங்கிய வலையம் எனப்படும் ஒரு படவரைவை புத்தாக்கினார் (படம்).



படம் A2.3

ஆயிலர் இரு நதிக்கரைகளையும் (A, B) இரு தீவுகளையும் (C, D) நான்கு புள்ளிகளால் குறித்தார். ஏழு கோடுகளான விற்கள் ஏழு பாலங்களை குறிக்கின்றன. மூன்று பாலங்கள் A என்ற நதிக்கரையையும், மற்ற மூன்று பாலங்கள் Bயையும் இணைப்பதை காணலாம். 5 பாலங்கள் C என்ற தீவையும் மூன்று பாலங்கள் Dயையும் சேர்க்கின்றன. அனைத்து உச்சிகளிலும் ஒற்றைப்படை எண்ணிக்கையான விற்கள் உள்ளன. இவற்றை ஒற்றைப் படையுச்சிகள் என்கிறோம். (இரட்டைப்படையுச்சிகளில் இரட்டைப்படை எண்ணிக்கையான விற்கள் இருக்கும்).

நாம் தீர்க்கவேண்டிய சிக்கல் ஒவ்வொரு பாலத்தையும் ஒருமுறை மட்டுமே கடந்து நகரைச்சுற்றி பயணித்தல். ஆயிலரின் வலையத்தில் இதன் பொருள் என்னவென்றால், ஒவ்வொரு வில்லின் மீதும் ஒரு தடவை மட்டுமே தடவரைந்து அனைத்து உச்சிகளுக்கும் வருகைதருதல். ஆயிலர் இது சாத்தியமன்று என்பதை கீழ்க்காணுமாறு நிறுவினார். ஒற்றைப்படையுச்சி இருக்கும்போது அந்த உச்சியில் பயணம் தொடங்கவோ முடியவோ வேண்டும் (சிந்தித்துப்பாருங்கள்). எனவே இவ்வாறான பயணம் இரண்டு ஒற்றைப்படையுச்சிகள் (தொடக்கத்துக்கொன்று, முடிவுக்கொன்று) உள்ள வலையத்தில் மட்டுமே சாத்தியம். பாலச்சிக்கலில் நான்கு ஒற்றைப் படையுச்சிகள் இருப்பதால் இது சாத்தியமன்று.



படம் A2.4

ஆயிலர் தனது தேற்றத்தை நிறுவியபின் கானிசுபர்கின் பாலங்களுக்கடியில் அதிக நீர் பாய்ந்துள்ளது. 1875இல் மற்றொரு பாலம் இரு கரைகளான A , B ஆகிய நிலப்பரப்புகளை இணைத்தது. (படம்). இப்போது கானிசுபர்கு வாசிகள் நகரைச்சுற்றிப்பார்க்க ஒவ்வொரு பாலத்தையும் ஒருமுறை கடந்தால் போதுமா?

மாறிய சூழ்நிலையை படம் காட்டுகிறது. புதிய பாலமொன்றை கட்டியபின் (A க்கும் B க்குமிடையில்) A , B ஆகிய இரு உச்சிகளும் இரட்டைப்படைத்தகவுள்ள உச்சிகளாகின்றன. ஆயினும், D, C இரண்டும் ஒற்றைப்படைத்தகவுள்ளவை. கானிசுபர்கு வாசிகள் ஒவ்வொரு பாலத்தையும் சரியாக ஒரு முறை மட்டுமே பயன்படுத்தி நகர்முழுவதற்கும் போகவியலும். வலையங்களின் கண்டாக்கம் வரைபடக்கோட்பாடு எனும் புதிய கோட்பாட்டை தொடக்கியது. இக்கோட்பாடு திட்டமிடலிலும் தண்டுவழிவலையங்க

ளின் இணைபடமாக்கலிலும் மற்றப்பல வழிகளிலும் பயன்படுகிறது.

A 2.3 கணித ஒப்புருவாக்கல் என்பது என்ன?

இங்கு கணித ஒப்புருவாக்கல் என்றால் என்னவென்று வரையறுத்து அதில் ஈடுபடும் வெவ்வேறு வழிமுறைகளை தகுந்த எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்குவோம்.

வரையறை கணித ஒப்புருவாக்கல் மெய்யுலகச்சிக்கலின் சில பகுதிகளையோ வடிவங்களையோ கணிதக்கருத்துகளின்வழி ஆய்வறியும் ஒரு முயற்சி.

இயல் சூழ்நிலையை கணிதத்துக்கு பொருத்தமான நிலைமைகளில் மாற்றியமைத் தலையே கணித ஒப்புருவாக்கம் என்கிறோம். கணித ஒப்புருவாக்கம் ஒரு செய்நுட்பமேயன்றி வேறன்று. அதற்கான பயிற்றியத்தை நுண்கலைகளிலிருந்து எடுக்கிறோமேயன்றி அடிப்படை அறிவியலிலிருந்தன்று. இனி கணித ஒப்புருவாக்கத்தில் ஈடுபடும் வெவ்வேறு வழிமுறைகளை புரிந்துகொள்வோம். இவ்வழி முறையில் நான்கு படிகள் உள்ளன. ஒரு எடுத்துக்காட்டுச்சான்றாக, ஒரு எளிய ஊசலிய சைவின் ஆய்ந்தறிதலில் பயன்படும் கணித ஒப்புருவாக்கலை கருதுவோம்.

சிக்கலை புரிந்துகொள்ளுதல்

சான்றாக, மேற்கூறிய எளிய ஊசலியின் அசைவுக்கான வழிமுறையை புரிந்துகொள் வோம். எளிய ஊசலி அனைவருக்கும் மிகப் பழக்கமான ஒன்று. இந்த ஊசலி ஒரு மெல்லிய கம்பியின் ஒரு நுனியில் இணைக்கப்பட்ட நிறை. கம்பியின் மறுநுனி ஒரு புள்ளியில் நிலைபெறுகிறது. ஒரு எளிய ஊசலியின் அசைவு சீரொழுங்கானது என நாம் படித்துள்ளோம். ஊசலியின் அலைவுநேரம் கம்பியின் நீளத்தையும் புவியீர்ப்புமுடுக்கத்தை யும் சார்ந்துள்ளது. எனவே, நாம் காணவேண்டியது அலைவின் அலைவுநேரம். இவ்வடிப்படையில் இச்சிக்கலில் ஒரு துல்லியமான கூற்றை கீழ்க்கண்டவாறு தருகிறோம்.

கூற்று ஒரு எளிய ஊசலியின் அலைவுநேரத்தை எவ்வாறு காணலாம்?

வாய்ப்பாடாக்கத்தில் இரு முக்கியமான படிகள் உள்ளன.

படி 1 தொடர்புடைய காரணிகளை அடையாளங்காணல் இந்தப்படியில், சிக்கலில் என்னென்ன காரணிகள் (அளவுருகள்) ஈடுபடுகின்றன என்று காண்கிறோம். சான்றாக, ஊசலிச்சிக்கலில் காரணிகளாக அலைவுநேரம் (T) , ஊசற்குண்டின் நிறை (m) , ஊசலியின் விளைவுநீளம் (l) ஆகியவை உள்ளன. இதில், விளைவுநீளம், கம்பியின் தொங்குபுள்ளிக்கும் குண்டுநிறையின் மையத்துக்கும் இடைப்பட்ட தொலைவு. இங்கு, நாம் விளைவுநீளத்தையே ஊசலியின் நீளமாக கருதுகிறோம். மேலும், நிறையீர்ப்புமுடுக்கமான gஇன் மதிப்பு ஓரிடத்தில் மாறிலியென எடுத்துக்கொள்கிறோம்.

எனவே, சிக்கலை ஆய்வறிய நாம் நான்கு அளவுருகளை அடையாளங்கண்டிருக்கிறோம். நமது அடுத்த நோக்கம் Tஐ காண்பது. இதற்கு நாம் அலைவுநேரத்தின்மீது விளைவூட்டும் அளவுருகளை புரிந்துகொள்வது அவசியம். இதனை ஒரு எளிய பரிசோதனையால் நாம் செய்யலாம்.

வெவ்வேறு எடைகளுள்ள இரு மாழைப் பந்துகளை எடுத்து அவை ஒவ்வொன்றுடனும் சோதனையை நடத்துவோம். இரண்டு பந்து களையும் சம நீளமுள்ள இரு மெல்லிய கம்பிகளில் இணைக்கிறோம். அவற்றின் அலைவுநேரங்களை அளக்கிறோம். நிறையைப் பொறுத்து இரு பந்துகளின் அலைவுநேரங்களில் குறிப்பிடத்தக்க மாற்றம் ஏதுமில்லை என்பதை கண்டறியலாம். இப்பொழுது, இதே சோதனையை மீண்டும் இரு வெவ்வேறு நீளமுள்ள மென்கம்பிகளில் இணைத்த சமநிறையான இரு பந்துகளால் செய்கிறோம். அலைவுநேரம் ஊசலியின் நீளத்தை சார்ந்துள்ளது என தெளிவாக கண்டறிகிறோம்.

அலைவுநேரத்தைக்காண நிறை (m) தேவையற்றது என்றும் நீளம் (l) தேவையானது என்றும் இந்த சோதனை காட்டுகிறது.

அவசிய அளவுருக்களை தேடும் வழிமுறை அடுத்த படிக்கு செல்லுமுன் கட்டாயத்தேவை.

படி 2 கணிதத்தால் விவரித்தல் இது முன்னரே அடையாளங்கண்ட அளவுருகளை பயன்படுத்தி ஒரு சமன்பாட்டையோ சமமின்மை யையோ வடிவியற்கூறையோ காண்பது.

எளிய ஊசலியின் வேற்றுநிலையில், வெவ்வேறு lமதிப்புகளுக்கு நிகரான Tமதிப்பு களை காண பரிசோதனைகள் மேற்கொள்ளப் பட்டன. இம்மதிப்புகளை ஒரு வரைபடத்தில் வரைகோடிடும்போது, ஒரு பரவளைவை ஒத்த வளைவரை விளைவுற்றது. Tக்கும் lக்குமான தொடர்பை கீழ்க்கண்டவாறு குறிக்கலாம் என்று இது உள்ளுரைக்கிறது.

$$T^2 = k\, l \qquad (A2.2)$$

k இன் மதிப்பை

$$k = \frac{4\pi^2}{g}$$

எனக்கண்டறிந்தனர். இது

$$T \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (A2.3)$$

என்ற சமன்பாட்டை தருகிறது. இதுவே இச்சிக்கலின் கணிதச்சமன்பாடு.

தீர்வை காணல்

கணித வாய்ப்பாடாக்கம் அரிதாகவே ஒரு சிக்கலுக்கான விடையை நேரடியாக தருகிறது. வழக்கமாக, சமன்பாட்டை தீர்த்தல், கணக்கிடு தல், தேற்றத்தை பயனாக்குதல் போன்ற சில செயல்பாடுகளை மேற்கொள்ளவேண்டியிருக் கும். எளிய ஊசலிகளின் வேற்றுவத்தில் தீர்வைப் பெற $(A2.3)$ஆம் சமன்பாடு தரும் வாய்ப்பாட்டை பயனாக்கவேண்டும். நீளத்தால் வேறுபடும் இரு வேறு ஊசலிகளின் கணக்கிட்ட அலைவுநேரங் களை அட்டவணை A2.1 தருகிறது.

அட்டவணை A2.1

l	225 செமீ	275 செமீ
T	3.04 விநாடி	3.36 விநாடி

இந்த அட்டவணை 225 செண்டிமீட்டர் நீளத்துக்கு அலைவுநேரம் 3.04 வினாடிகள் எனவும், 275 செண்டிமீட்டர் நீளத்திற்கான அலைவுநேரம 3.36 வினாடிகள் எனவும் காட்டுகிறது.

பொருளுணர்தலும் ஏற்புடையதாக்கலும்

கணித ஒப்புரு ஒரு மெய்யுலகச்சிக்கலின் அவசியமான சிறப்பியல்பை கண்டறியும் ஒரு முயற்சி. பல நேரங்களில், நிலைமையை ஒரு நல்லியல்பாக்கிய சூழமைவில் ஒப்புருச்சமன் பாடுகளை பெறுகிறோம். நாம் விளக்க விரும்பும் எல்லா உண்மைகளையும் விளக்கும் ஒப்புருவே பயனுள்ளதாயிருக்கும். இல்லை யெனில், நாம் அதை புறந்தள்ளவோ மாற்றிய மைத்து மீண்டும் பரிசோதிக்கவோசெய்வோம். வேறுவிதமாகச் சொன்னால், ***ஒரு ஒப்புருவின் விளைவுறுமையை அளக்க, கணித ஒப்புருவிலிருந்து பெற்ற விளைவுகளையும் சிக்கலைப்பற்றி தெரிந்த உண்மையான மதிப்புகளையும் ஒப்பிடுகி றோம். இவ்வழிமுறையை ஒப்புருவை ஏற்புடை யதாக்கல் என்கிறோம்.*** எளிய ஊசலியின் வேற்றுவத்தில், ஊசலியின்மீது நாம் சில சோதனைகளை நடத்தி அதன் அலைவுநேரத்தை காண்கிறோம். சோதனையின் விளைவுகளை அட்டவணை A2.2 தருகிறது.

அட்டவணை A2.2 நான்கு வேறுபட்ட ஊசலிகளுக்கான சோதனைகளில் கிடைத்த அலைவுநேரங்கள்

நிறை (கிராம்)	நீளம் (செமீ)	நேரம் (விநாடிகள்)
385	275	3.371
	225	3.056
230	275	3.352
	225	3.042

இப்பொழுது, நாம் அட்டவணை A2.2 தரும் அளவீட்டு மதிப்புகளை அட்டவணை A2.1 தரும் கணக்கீட்டு மதிப்புகளுடன் ஒப்பிடுவோம். சோதனையில் கண்டறிந்த மதிப்புகளுக்கும் கணக்கீட்டு மதிப்புகளுக்குமிடையான வேறுபாடு பிழையின் மதிப்பை தருகிறது. சான்றாக, 275 செமீ நீளத்துக்கு (l) நிகரான நிறையான (m) 385 கிராம் என்ற விளைவில்

பிழை $= 3.371 - 3.36 = 0.011$

இப்பிழை சிறியது. எனவே, ஒப்புருவை ஏற்றுக் கொள்கிறோம்.

ஒப்புருவை ஏற்றுக்கொண்டபின் அதனை நாம் பொருளுணர்கிறோம். ***தீர்வை மெய்நிலைமைச் சூழலமைவில் விவரிக்கும் வழிமுறையை ஒப்புருவின் பொருளுணர்தல் என்கிறோம்.*** மேற்காணும் வேற்றுவத்தில் தீர்வை நாம் கீழ்க்கண்ட வழியில் பொருளுணரலாம்.

(அ) அலைவு நேரம் (T) ஊசலியின் நீளத்தின் வர்க்கமூலத்துக்கு நேர்விழுக்காட்டிலுள்ளது.

(ஆ) அது நிறையீர்ப்புமுடுக்கத்தின் (g) வர்க்க மூலத்துக்கு புரட்டுவிழுக்காட்டிலும் உள்ளது.

இவ்வொப்புருவின் ஏற்புடைமையும் பொரு ளுணர்வும் ஒப்புரு நடைமுறை மதிப்புகளுடன் (கண்டறிந்த மதிப்புகளுடன்) உடன்படுவதாக காட்டுகின்றன. அளவீட்டுமதிப்புக்கும் கணக் கீட்டு மதிப்புக்குமிடையில் சிறு பிழைகள் இருப்பதையும் கண்டோம். மென்கம்பியின் நிறையையும் வளியின் தடையத்தையும் புறக்கணித்ததால் இந்த பிழைகள் ஏற்பட்டி ருக்கலாம். இதுபோன்ற சூழ்நிலையில், இந்த ஒப்புருவைவிட சிறந்த ஒப்புருவை காண விளைகிறோம். இவ்வாறு இவ்வழிமுறை தொடர்கிறது.

இது ஒரு முக்கியமான கண்டறிதலை நோக்கி நம்மை கொண்டுசெல்கிறது. மெய்யு லகம் மிகவும் உட்சிக்கலானதால் அதை முழுமையாக புரிந்து கொள்வதும் விவரிப்பதும் மிகவும் கடினமாகிறது. நிலைமையில் விளை வூட்டும் ஓரிரு முக்கியமான காரணிகளையே தேர்ந்தெடுத்து அவற்றின் அடிப்படையில் ஒரு எளிமையாக்கிய ஒப்புருவை பெற்று நிலைமையைப்பற்றிய சில தகவல்களை பெற முயல்கிறோம். இந்த ஒப்புருவால் எளிய நிலைமையை ஆய்ந்தறிந்து பிறகு மேம்பட்ட ஒப்புருவை உருவாக்க எதிர்பார்க்கிறோம்.

இப்பொழுது, ஒப்புருவாக்கலுக்கான முகன வழிமுறையை கீழ்க்கண்டவாறு சுருங்கவுரைக்க லாம்: (i) வாய்பாடாக்கம் (ii) தீர்வு (iii) பொருளுணர்தலும் ஏற்புடையதாக்கலும்.

அடுத்த சான்று சமமின்மையின் வரைபடத் தீர்வைக்காணும் செய்நுட்பத்தை பயன்படுத்தி ஒப்புருவாக்குவதை காட்டுகிறது.

சான்று 3 ஒரு பண்ணைவீட்டில் தினமும் மீச்சிறுமமாக 800 கிலோகிராம் தனித்துவ உணவு நுகரப்படுகிறது. அவ்வுணவு சோளத்

தையும் சோயவரையையும் கீழ்க்கண்ட விகிதத்தில் கலந்த கலவை.

அட்டவணை A2.3

பொருள்	1 கிகிமிலுள்ள		1 கிகிமின் ஆக்கவிலை
	புரதம்	நாரிழை	
சோளம்	0.09	0.02	₹10
சோயவரை	0.60	0.06	₹20

சிறப்புணவின் உணவூட்ட வேட்கோள் மீச்சிறுமமாக 30% புரதமும் மீப்பெருமமாக 5% நார்ச்சத்தும் இருக்கவேண்டும் என்று வேண்டுகிறது. சிறப்புணவின் தினசரித் தேவையின் மீச்சிறும ஆக்கவிலை என்ன?

தீர்வு படி 1 இங்கு நம் குறிக்கோள் அன்றாடத் தேவையான சோளமும் சோயவரையும் கலந்த சிறப்புணவின் மொத்த ஆக்க விலையை மீச்சிறுமமாக்குவது. நாம் கருத வேண்டிய மாறிகள்

x = சோளத்தின் அளவு

y = சோயவரையின் அளவு

z = ஆக்கவிலை

படி 2 அட்டவணை A2.3இன் இறுதி நெடுக்கை x, y, z ஆகியவற்றுள் கீழ்க்காணும் சமன்பாட்டுறவு இருப்பதை காட்டுகிறது:

$$z = 10x + 20y \qquad (A2.4)$$

இப்போது, சிக்கல் zஇன் மதிப்பை கீழ்க்கண்ட கட்டுறுத்ததங்களுடன் மீச்சிறுமமாக்குவது.

(1) சோளமும் சோயவரையும் கலந்த உணவை மீச்சிறுமமாக 800 கிலோகிராம் அளவில் பண்ணை பயன்படுத்துகிறது. அதாவது,

$$x + y \geq 800 \qquad (A2.5)$$

(2) உணவில் மீச்சிறுமமாக 30% புரதம். அட்டவணை A2.3இன் முதல் நெடுக்கையில் காட்டிய விழுக்காட்டில் இருக்க வேண்டும். இது

$$0.09x + 0.6y \geq 0.3(x + y) \qquad (A2.6)$$

என்ற சமன்பாட்டை தருகிறது.

(3) அதைப்போலவே, மீப்பெருமமாக 5% நாரிழை அட்டவணை A2.3இன் இரண்டாம் நெடுக்கையில் காட்டிய விழுக்காட்டில் இருக்க வேண்டும். இது

$$0.02x + 0.06y \leq 0.05(x + y) \qquad (A2.7)$$

என்பதை தருகிறது.

x, y ஆகியவற்றின் கெழுக்களை தொகுத்து $(A2.5)$, $(A2.6)$, $(A2.7)$ ஆகிய சமன்பாடுகளி லுள்ள கட்டுறுத்தங்களை எளிமையாக்கு வோம்.

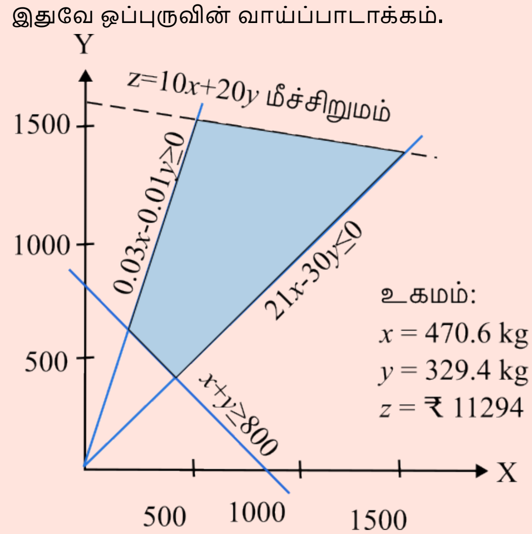
பின்னர், சிக்கலை கீழ்கண்ட கணித வடிவில் மீட்கூறலாம்.

கூற்று

$$x + y \geq 800$$
$$0.21\,x - 0.30\,y \leq 0$$
$$0.03x - 0.01\,y \geq 0$$

ஆகிய கட்டுறுத்தங்களுக்கு உட்பட்டு z இன் மீச்சிறுமத்தை காண்க.

இதுவே ஒப்புருவின் வாய்ப்பாடாக்கம்.



படம் A2.5

படி 3 இச்சிக்கலை நாம் வரைபடத்தால் தீர்க்கலாம். படம் இல் நிழலிட்ட பகுதி சமன்பாடுகளின் சாத்தியமான தீர்வுகளை தருகிறது. வரைபடத்திலிருந்து, மீச்சிறும மதிப்புப்புள்ளியை (470.6, 329.4) என்று பெறுகிறோம். அதாவது,

$$x = 470.6; \; y = 329.4$$

எனவே x, y, z ஆகியவற்றின் உகம மதிப்புகள்:

$$x = 470.6 \text{ கிகி}$$
$$y = 329.4 \text{ கிகி}$$
$$z = (10 \times 470.6) + (20 \times 329.4)$$
$$= 11294$$

இதுவே கணிதத்தீர்வு

படி 4 தீர்வை நாம் கீழ்க்கண்டவாறு பொருளுணரலாம். சோளமும் சோயவரையும் கலந்து தேவையான புரதவூட்டமும் நாரிழையூட்டமுமுள்ள சிறப்புணவின் மீச்சிறும ஆக்கவிலை ₹11294. இதை அடைய, நாம் 470.6 கிலோகிராம் சோளத்தையும்

329.4 கிலோகிராம் சோயவரையையும் பயன்படுத்து கிறோம்.

அடுத்த சான்றில், ஒரு குறிப்பிட்ட காலக் கட்டத்தில் ஒரு நாட்டின் மக்கட்டொகையை ஒப்புருவாக்கத்தால் ஆய்வறிவதை பார்ப்போம்.

சான்று 4 ஒரு நாட்டின் மக்கட்டொகையை கட்டுப்படுத்தும் துறை "பத்து ஆண்டு களுக்குப்பின் அந்நாட்டில் எத்தனை மக்கள் இருப்பார்கள்" என்பதை கண்டுபிடிக்க விரும்புகிறது எனக்கொள்வோம்.

தீர்வு **படி 1 வாய்பாடாக்கம்** முதலில், மக்கட்டொகை காலத்தைச்சார்ந்து மாறுகி றது என்பதை நோக்குகிறோம். அத்தொகை பிறப்புகளால் கூடுகிறது; இறப்புகளால் குறைகிறது.

ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திலுள்ள மக்கட் டொகையை காண விரும்புகிறோம். இக் காலத்தை tஆல் (ஆண்டுகளில்) குறிப்போம். அப்படியெனில், t எடுக்கும் மதிப்புகளான $0, 1, 2, \ldots$ ஆகியவை. $t = 0$ நிகழ்கால நேரம், $t = 1$ அடுத்த ஆண்டு, ... என்றவாறு வெவ்வேறு காலங்களை குறிக்கிறது. t என்ற எந்த ஒரு காலத்திலும் $P(t)$ அந்த ஆண்டிலுள்ள மக்கட்டொகையை குறிக்கிறது.

ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டில் (2006 இல் என்க) மக்கட்டொகையை காண நாம் விரும்புவதாய் கொள்வோம். அதை நாம் எவ்வாறு செய்யலாம்?

2005ஆம் ஆண்டின் (முந்தைய ஆண்டு) சனவரி ஒன்றாம் தேதிக்கான மக்கட் டொகையை காண்கிறோம். அதனுடன் 2006 ஆம் ஆண்டிற்கான பிறப்புகளை கூட்டி, அதிலிருந்து அவ்வாண்டிற்கான இறப்புகளின் எண்ணிக்கையை கழிக்கிறோம். $B(t)$ ஓராண்டுக்கான பிறப்புகளையும் $D(t)$ இறப்புகளையும் குறிப்பதாக கொள்வோம். [ஓராண்டு $=$ tக்கும் $(t+1)$க்குமிடையான காலம்]. அப்போது

$$P(t+1) = P(t) + B(t) - D(t)$$

என்ற உறவை பெறுகிறோம்.

இப்போது, சில எடுகோள்களையும் வரையறைகளையும் உரைப்போம்.

$$\frac{B(t)}{P(t)}$$

என்பதை tக்கும் $(t+1)$க்குமிடையான காலத்தின் பிறப்புவீதம் என அழைக்கிறோம்.

$$\frac{D(t)}{P(t)}$$

என்பதை tக்கும் $(t+1)$க்குமிடையான காலத்தின் இறப்புவீதம் என்கிறோம்.

எடுகோள்கள்

(அ) எல்லா இடைவெளிகளின் பிறப்பு வீதங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமம்; இறப்புவீதங் களும் சமம். அதாவது, பிறப்புவீதத்தை b என்ற மாறிலியாகவும், இறப்புவீதத்தை d என்ற மாறிலியாகவும் குறிப்பிடுகிறோம். இப்படியிருப்பின், $t \geq 0$ எனும் எல்லாக் காலங்களுக்கும்

$$b = \frac{B(t)}{P(t)}; \quad d = \frac{D(t)}{P(t)} \qquad (A2.8)$$

(ஆ) மக்கட்டொகையில் உள்ளேயோ வெளியேயோ குடிப்பெயர்ச்சி நிகழவில்லை. மக்கட்டொகைமாற்றத்துக்கான மூலக்கார ணம் மக்களின் பிறப்பும் இறப்பும் மட்டுமே.

இந்த இரண்டு எடுகோள்களின் விளைவாக, $t \geq 0$ என்றபோது, $(A2.8)$ ஆம சமன்பாட்டை பயன்படுத்தி

$$P(t+1) = P(t) + B(t) - D(t)$$
$$= P(t) + b\,P(t) - d\,P(t)$$
$$P(t+1) = (1 + b - d)P(t) \qquad (A2.9)$$

என்று பெறுகிறோம். $(A2.9)$ஆம் சமன்பாட்டில் $t = 0$ என்று வைத்து

$$P(1) = (1 + b - d)P(0) \qquad (A2.10)$$

என்று பெறுகிறோம். பிறகு, $(A2.9)$ஆம் சமன்பாட்டில் $t = 1$ என்று வைத்தும் $(A2.10)$ஆம் சமன்பாட்டை பயன்படுத்தியும்

$$P(2) = (1 + b - d)P(1)$$
$$= (1 + b - d)(1 + b - d)P(0)$$
$$= (1 + b - d)^2 P(0)$$

என்று பெறுகிறோம். இவ்வாறே தொடர்ந்து $t = 0, 1, 2, \ldots$ ஆகிய மதிப்புகளுக்கு

$$P(t) = (1 + b - d)^t P(0) \qquad (A2.11)$$

என்று பெறுகிறோம். $(1 + b - d)$ என்ற மாறிலியை r என்று குறித்து *வளர்ச்சிவீதம்* என்கிறோம். உயர்நடை மொழியில் இதை *மாலுதசிய அளவுரு* என்கிறோம். இது இந்த ஒப்புருவை பொதுக்கவனத்துக்கு கொண்டு வந்த இராபட்டு மாலுதசு என்பவரை பெருமைப்படுத்தும் விதத்தில் இவ்வாறு பெயரிடப்பட்டுள்ளது. இந்த rஇன்வழி $(A2.11)$ஆம் சமன்பாடு

$$P(t) = P(0)r^t \qquad t = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (A2.12)$$

என்றாகிறது. $P(t)$ அடுக்கச்சார்பனின் ஒரு சான்று. cr^t என்ற வடிவிலுள்ள சார்பன் tஇல் ஒரு அடுக்கச்சார்பன்; இங்கு cயும் rஉம் மாறிலிகள்.

Error! Reference source not found.ஆம் சமன்பாடு சிக்கலின் கணிதவாய்ப்பாடாக்கம்.

படி 2 தீர்த்தல் நடப்பு மக்கட்டொகை 250,000,000; பிறப்பிறப்புவீதங்கள் முறையே $b = 0.02, d = 0.01$. 10 ஆண்டுகளில் மக்கள் தொகை என்னவாக இருக்கும்? வாய்பாட்

டினை பயன்படுத்தி, $P(10)$இன் மதிப்பை கணக்கிடலாம்.

$$r = 1 + 0.02 - 0.01 = 1.01$$

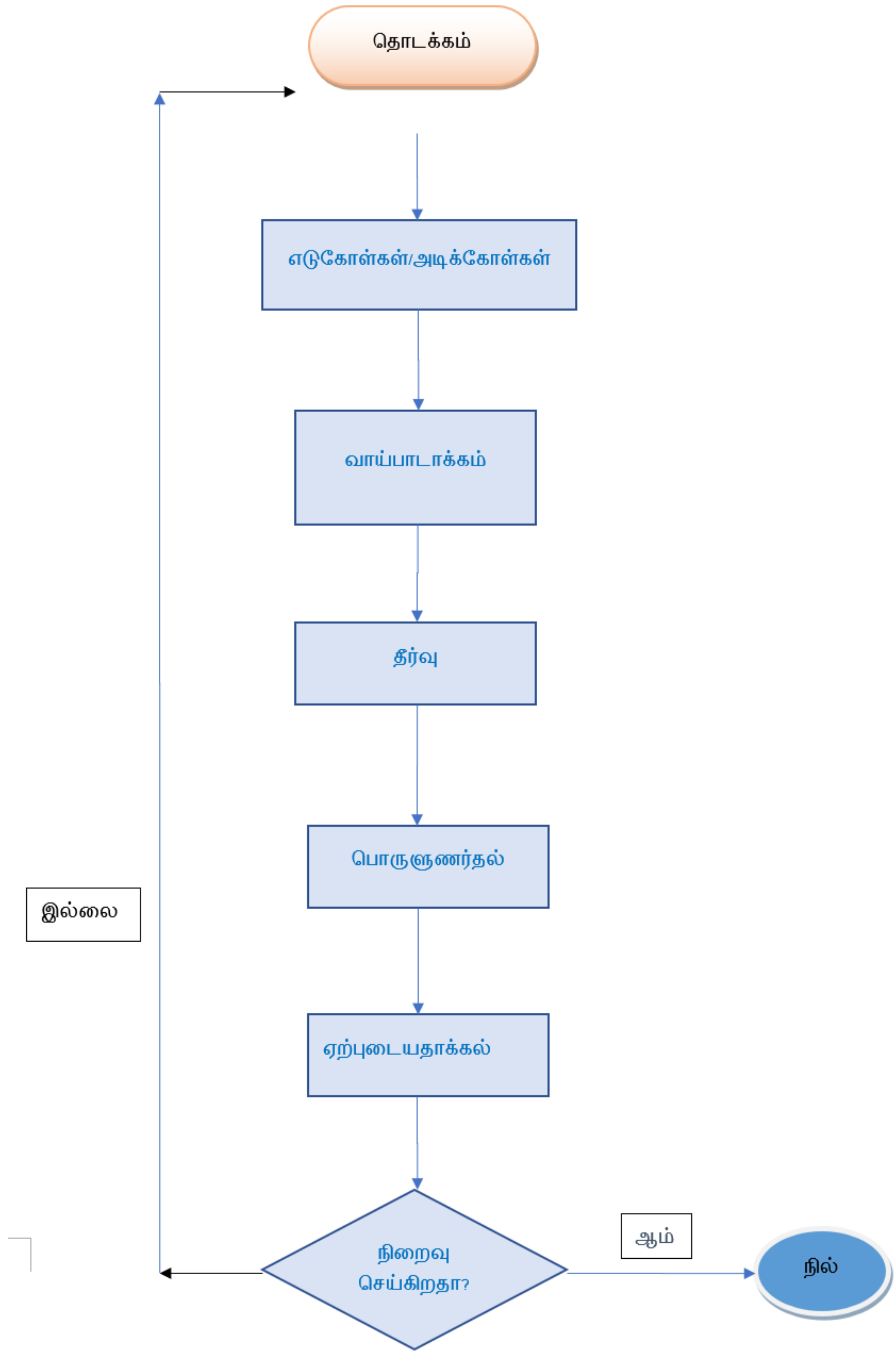
$$P(t) = (1 + b - d)^t P(0)$$
$$= 1.01^{10} \times 250,000,000$$
$$= 276,155,531.25$$

படி 3 பொருளுணர்வும் ஏற்படையதாக்கலும்: இந்த விளைவு அபத்தமானது. ஏனெனில், 0.25 மனிதர் என்பது இருக்கவியலாதது. சிறிது தோராயமாக்கி, மக்கட்டொகை $276,155,531$ என முடிவுசெய்கிறோம்.

மேற்கூறிய சான்றுகள், வெவ்வேறு கணிதச் செய்நுட்பங்களை பயன்படுத்தி, ஒப்புருவாக்கல் பல்வேறு சூழ்நிலைகளில் எங்ஙனம் செயல்படுகிறது என்பதை காட்டுகின்றன.

ஒரு மெய்ச்சிக்கலின் எளிமைப்படுத்திய குறிப்பீடே கணிதவொப்புரு என்பதால் இயல்பாகவே அதன் கட்டுமானத்தில் எடுகோள்களும் தோராயமாக்கல்களும் அடங்குகின்றன. நமது ஒப்புரு நல்லதா இல்லையாவென தீர்மானிப்பதே மிக முக்கியமான கேள்வி என்பது தெளிவு. அதாவது ஒப்புருவிலிருந்து கிடைத்த விளைவுகளை இயற்சூழலில் பொருளுணரும்போது ஒப்புரு ஏற்றுக்கொள்ளக்கூடிய நியாயமான விடைகளை தருகிறதா இல்லையா என்பது. ஒப்புரு போதுமான அளவு சரியாக இல்லையெனில், குறைபாடுகளுக்கான காரணங்களை அடையாளங்காண முயல்கிறோம். இந்த முயற்சியில் ஒரு புதிய வாய்ப்பாடாக்கமோ ஒரு புதிய கையூடாளலோ மதிப்பறிதலோ தேவைப்படலாம்.

இப்படியாகக், கணித ஒப்புருவாக்கல் ஒரு ஒப்புருவாக்கும் வழிமுறையின் சுழற்சியாக இருக்கலாம். இதனைக் கீழுள்ள பாய்வுவரைவு காட்டுகிறது:


தொடக்கம்
எடுகோள்கள்/அடிக்கோள்கள்
வாய்பாடாக்கம்
தீர்வு
பொருளுணர்தல்
ஏற்புடையதாக்கல்
நிறைவு செய்கிறதா?
ஆம்
நில்
இல்லை