படலம் 3

நேர்க்கோட்டில் அசைவு

3.1 அறிமுகம்
3.2 இடநிலை, பாதைநீளம், இடப்பெயர்ச்சி
3.3 சராசரித்திசைவேகமும் சராசரிவேகமும்
3.4 உடனடித்திசைவேகமும் உடனடிவேகமும்
3.5 முடுக்கம்
3.6 சீரான முடுக்கமுள்ள அசைவுக்கான அசைவியச்சமன்பாடுகள்
3.7 ஒப்பளவத்திசைவேகம்
சுருக்கவுரை
உங்கள் சிந்தனைக்கு
பயிற்சிகள்
மேலும் பயிற்சிகள்
பிற்சேர்க்கை

3.1 அறிமுகம்

அசைவு புடவியிலுள்ள எல்லாவற்றுக்கும் பொதுவானது. நாம் நடக்கிறோம், ஓடுகிறோம், மிதிவண்டியோட்டுகிறோம், நாம் உறங்கும் போதும், வளி நம் நுரையீரலுக்குள் நுழைந்து வெளியேறுகிறது; குருதி நம் தமனிகளிலும் சிரைகளிலும் பாய்கிறது. மரங்களிலிருந்து இலைகள் விழுவதை பார்க்கிறோம்; நீர் அணைக்கட்டில் வழிவதை பார்க்கிறோம். தானுந்துகளும் விமானங்களும் மக்களை ஓரிடத்திலிருந்து மற்றோரிடத்துக்கு எடுத்துச் செல்கின்றன. புவி நாளுக்கொருமுறை தன்னையும் ஆண்டுக்கொருமுறை கதிரவனையும் சுற்றுகிறது. கதிரவனும் பால்வீதியில் அசைவிலுள்ளது. பால்வீதியும் தன் உடுத்திரட்குழுவில் அசைகிறது.

அசைவு என்பது ஒரு பொருளின் இடநிலை நேரத்துடன் மாறுவது. இடநிலை நேரத்துடன் எவ்வாறு மாறுகிறது? இந்தப்படலத்தில் அசைவை எவ்வாறு விவரிப்பது என்று கற்போம். இதற்காக, திசைவேகம், முடுக்கம் என்ற கருத்துருகளை வளராக்கவேண்டும். இந்த படலத்தில் பொருள்களின் **நேர்க்கோட்டு அசைவை** மட்டும் கற்போம். அதாவது பொருள்கள் நேர்க்கோட்டில் அசைவதை படிப்போம். சீரான முடுக்கமுள்ள நேர்க்கோட்டு அசைவுக்கு சில எளிய சமன்பாடுகளை பெறலாம். இறுதியாக, அசைவின் ஒப்பளவ இயல்பை புரிந்துகொள்ள ஒப்பளவத்திசை வேகம் என்ற கருத்துருவை அறிமுகமாக்குகிறோம்.

நம் உரையளிப்புகளில் அசையும் பொருள்களை புள்ளிப்பொருள்களாக கையாள்வோம். பொருளின் அளவு அது அசையும் தொலைவின் ஒப்பீட்டில் சிறிதாயிருக்கும்போது இந்த தோராயம் சரியானது. அன்றாட வாழ்வின் பல நிலைமைகளில் பொருள்களின் அளவுகளை புறக்கணித்து அவற்றை புள்ளிப்பொருள்களாக கருதுவது அதிக பிழையை புகுத்தவில்லை.

அசைவியலில் அசைவின் காரணங்களை கருதாமல், அசைவை விவரிக்கும் வழிகளையே சிந்திக்கிறோம். இந்தப்படலத்திலும் அடுத்த படலத்திலும் விவரிக்கும் அசைவுகளுக்கான காரணங்களை 5ஆம் படலத்தில் படிப்போம்.

3.2 இடநிலை, பாதைநீளம், இடப்பெயர்ச்சி

அசைவு என்பது பொருளின் இடநிலை நேரத்துடன் மாறுவது என்று முன்பு கண்டோம். இடநிலையை குறிப்பிட ஒரு நோக்கீட்டு

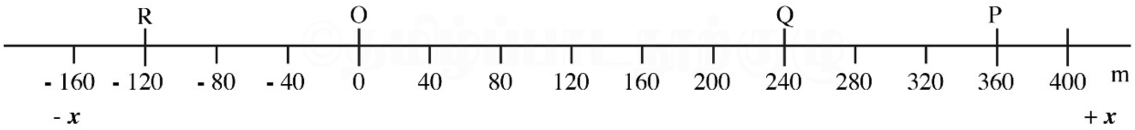
மூலத்தையும் ஒரு அச்சுக்கணத்தையும் பயன்படுத்தவேண்டும். X, Y, Z என்று குறியமிட்ட ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று அச்சுகள் அடங்கிய செவ்வக ஒருங்களவமைப்பை பயன்படுத்துவது வசதியானது. இந்த மூன்று அச்சுகளும் மூலம் என்ற புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. இது **நோக்கீட்டுப்புள்ளி**. ஒரு பொருளின் x , y , z ஒருங்களவுகள் இந்த ஒருங்களவமைப்பில் பொருளின் இடநிலையை விவரிக்கின்றன. நேரத்தை அளவிட இந்த அமைப்பில் ஒரு கடிகாரத்தை வைக்கிறோம். கடிகாரத்துடன் சேர்ந்த இந்த ஒருங்களவமைப்பை **நோக்கீட்டுச்சட்டம்** என்கிறோம்.

பொருளின் ஒருங்களவுகளுள் ஒன்றோ பலவோ நேரத்துடன் மாறினால், பொருள் அசைவில் இருக்கிறது என்கிறோம். இல்லாவிட்டால், பொருள் நோக்கீட்டுச்சட்டத்தைப் பொறுத்து நிலையாயிருக்கிறது (ஓய்விலிருக்கிறது) என்கிறோம்.

ஒரு நோக்கீட்டுச்சட்டத்தின் ஒருங்களவச்சுகளை நிலைமையைப்பொறுத்து தேர்கிறோம். சான்றாக, ஒற்றைப்பருமான அசைவை விவரிக்க ஒரு அச்சே தேவைப்படுகிறது. இரண்டோ மூன்றோவான பருமானங்களில் அசைவை விவரிக்க முறையே இரண்டோ மூன்றோ அச்சுகள் தேவை.

ஒரு நிகழ்வை விவரிப்பது நாம் தேர்ந்தெடுத்த நோக்கீட்டுச்சட்டத்தை சார்ந்திருக்கிறது. சான்றாக, ஒரு சிற்றுந்து ஒரு சாலையில் அசைகிறது என்று நாம் சொல்லும்போது சிற்றுந்தை நாம் நிற்கும் இடத்துடனோ தரையுடனோ பொருந்திய ஒரு நோக்கீட்டுச் சட்டத்தைப்பொறுத்து விவரிக்கிறோம். ஆனால், சிற்றுந்தில் அமர்ந்திருப்பவருடன் பொருந்திய நோக்கீட்டுச்சட்டதைப்பொறுத்து சிற்றுந்து ஓய்விலிருக்கிறது.

நேர்க்கோட்டசைவை விவரிக்க பொருளின் பாதைக்குநேராக கிடக்கும் ஒரு அச்சை தேர்ந்து அதை Xஅச்சு என்று அழைக்கிறோம். பிறகு நம் வசதிப்படி தேர்ந்த மூலத்திலிருந்து (O) பொருளின் இடநிலையை படம் 3.1இல் காட்டியபடி அளவிடுகிறோம். படத்தில் O வின் வலப்பக்கத்திலுள்ள இடநிலைகளை நேர்மம் என்றும் இடப்பக்கத்திலுள்ளவற்றை எதிர்மம் என்றும் கொள்கிறோம். இந்த வழக்கேற்பை பின்பற்றி படத்தில் P, Q ஆகிய புள்ளிகளின் இடநிலையொருங்களவுகள் முறையே $+360\,m$, $240\,m$. R என்ற புள்ளியின் இடநிலையொருங்களவு $-120\,m$.



படம் 3.1 Xஅச்சு, மூலம், வெவ்வேறு நேரங்களில் சிற்றுந்தின் இடநிலைகள்.

3.2.1 பாதைநீளம்

ஒரு சிற்றுந்து நேர்க்கோட்டில் அசைவதை கருதுக. X அச்சை சிற்றுந்தின் அசைவின் பாதையில் கிடப்பதாகவும் சிற்றுந்து அசையத்தொடங்கும்போது இருக்குமிடத்தை மூலமாகவும் எடுத்துக்கொள்வோம். அதாவது $t = 0$ என்ற நேரத்தில் சிற்றுந்து $x = 0$ என்ற இடத்தில் இருக்கிறது (படம் 3.1). P, Q, R ஆகியவை வெவ்வேறு நேரங்களில் சிற்றுந்தின் இடநிலைகளை குறிக்கின்றன. அசைவின் இரண்டு வேற்றுவங்களை கருதுக. முதலாவதில், சிற்றுந்து O விலிருந்து P க்கு அசைகிறது. அப்போது சிற்றுந்து அசைந்த தொலைவு $OP = +360\,m$. இந்த தொலைவை சிற்றுந்து பயணித்த பாதைநீளம் என்கிறோம். இரண்டாம் வேற்றுவத்தில் சிற்றுந்து O விலிருந்து P க்குச்சென்று பிறகு P யிலிருந்து Q வுக்கு திரும்புகிறது. இந்த அசைவின்போது பயணிக்கும் பாதைநீளம் $OP + PQ = +360\,m + (+120\,m) = +480\,m$. பாதைநீளம் ஒரு திசையிலி; அதாவது அதற்கு பருமனளவு உள்ளது; திசை இல்லை (4ஆம் படலம்).

3.2.2 இடப்பெயர்ச்சி

இடநிலையின் மாற்றமாக இடப்பெயர்ச்சி என்ற மற்றொரு அளவை வரையறுப்பது பயனுள்ளது. t_1, t_2 என்ற நேரங்களில் பொருளின் இடநிலைகள் முறையே x_1 , x_2 என்க. அப்படியெனில், Δt என்ற நேரத்தில் Δx என்று குறிக்கும் அதன் இடப்பெயர்ச்சியை தொடக்க இடநிலைக்கும் இறுதி இடநிலைக்குமான வேறுபாடாக வரையறுக்கிறோம்.

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

(ஒரு அளவின் மாற்றத்தை தெலுடா (Δ) என்ற கிரேக்க எழுத்தால் குறிக்கிறோம்). $x_2 > x_1$ எனில், Δx நேர்மம்; $x_2 < x_1$ எனில், Δx எதிர்மம்.

இடப்பெயர்ச்சிக்கு பருமனளவும் திசையும் உள்ளன. இவ்வாறான அளவுகளை திசையன்கள் என்கிறோம். திசையன்களைப்பற்றி அடுத்த படலத்தில் படிப்பீர்கள். இப்போது நேர்க்கோட்டிலான அசைவுகளையே நாம் படிக்கிறோம். ஒற்றைப்பருமானத்தில் ஒரு பொருள் அசைவதற்கு முன்னோக்கியதும் பின்னோக்கியதுமான இரண்டு திசைகளே உள்ளன. (சில அசைவுகளில் இவை மேனோக்கியதும் நீழ்நோக்கியதும்). இந்த இருதிசைகளையும் $+$உம் $-$உமான இரண்டு கணிதக்குறிகளால் எளிதில் குறிக்கலாம்.

சான்றாக, O விலிருந்து P க்கு அசையும் சிற்றுந்தின் இடப்பெயர்ச்சி

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (+360\,m) - (0\,m) = +360\,m$$

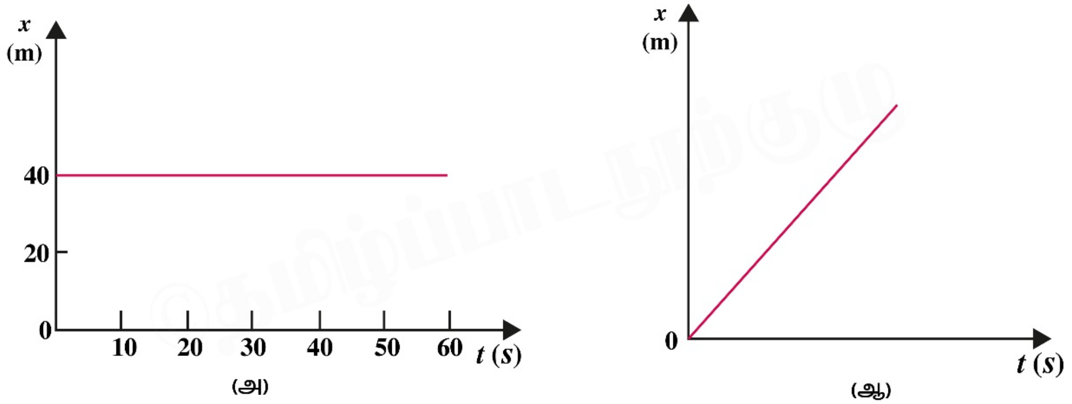
இந்த இடப்பெயர்ச்சிக்கு $360\,m$ என்ற பருமனளவும் நேர்ம Xஅச்சின் திசையும் உள்ளன. இதைப்போலவே, P யிலிருந்து Q வுக்கு இடப்பெயர்ச்சி $240\,m - 360\,m = -120\,m$. எதிர்மக்குறி இடப்பெயர்ச்சியின் திசையை குறிக்கிறது. எனவே, ஒற்றைப்பருமானத்தில் பொருள்களின் அசைவை உரையளிக்க திசையக்குறியீட்டை பயன்படுத்துவது தேவையில்லை.

இடப்பெயர்ச்சியின் பருமனளவு பொருள் பயணிக்கும் பாதைநீளத்துக்கு சமமாகவோ சமமின்றியோ இருக்கலாம். சான்றாக, Oவிலிருந்து Pக்கான சிற்றுந்தின் பயணத்தில் பாதைநீளம் $+360\,m$; இடப்பெயர்ச்சி $+360\,m$. இந்த வேற்றுவத்தில் இடப்பெயர்ச்சியின் பருமனளவு $(360\,m)$ பாதைநீளத்துக்கு $(360\,m)$ சமம். ஆனால் சிற்றுந்து O விலிருந்து P க்குச்சென்று Q வுக்கு திரும்பிவரும் நிகழ்முறையை கருதுக. இந்த வேற்றுவத்தில் பாதைநீளம் $(+360\,m) + (+120\,m) = 480\,m$; ஆனால் இடப்பெயர்ச்சி $(+240\,m) - (0\,m) = +240\,m$. இவ்வாறு இடப்பெயர்ச்சியின் பருமனளவு $(240\,m)$ பாதைநீளத்துக்கு $(480\,m)$ சமமன்று.

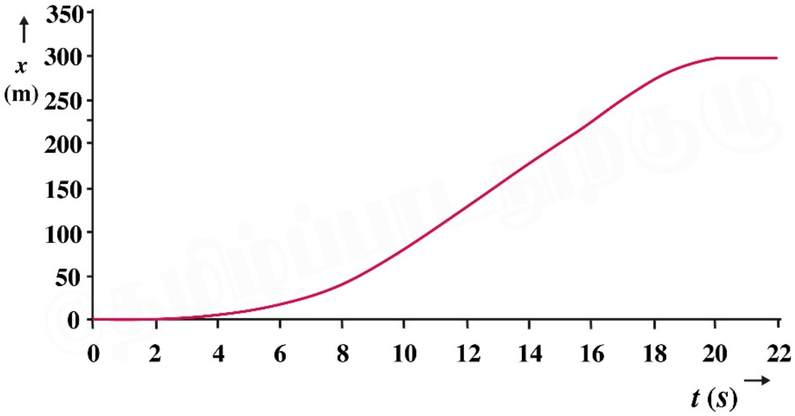
ஒரு அசைவுத்தொகுதிக்கு இடப்பெயர்ச்சியின் பருமனளவு சுழியனாகவும் பாதைநீளம் சுழியனல்லாமலும் இருக்கலாம். சான்றாக, சிற்றுந்து Oவில் தொடங்கி Pக்குச்சென்று Oவுக்கு திரும்பினால், இறுதி இடநிலை தொடக்க இடநிலையுடன் ஒன்றுகிறது; இடப்பெயர்ச்சி சுழியம். ஆனால், பாதைநீளம் $OP + PO = 360\,m + 360\,m = 720\,m$.

ஒரு பொருளின் அசைவை இடநிலைக்கும் நேரத்துக்குமான வரைபடமாக காட்டலாம் என்பதை நீங்கள் ஏற்கனவே கற்றிருக்கிறீர்கள். இவ்வாறான வரைபடம் பொருளசைவின் வெவ்வேறு கூறுகளை குறிக்கவும் பகுப்பாயவும் ஒரு பயனுள்ள கருவி. Xஅச்சுக்குநேரான நேர்க்கோட்டசைவுக்கு x ஒருங்களவு மட்டுமே நேரத்துடன் மாறுகிறது. இதனால் வரைபடம் x, t வரைபடமாகிறது. முதலில் பொருள் கிடப்பிலிருக்கும் எளிய வேற்றுவத்தை கருதுவோம். சான்றாக, $x = 40\,m$ இல் சிற்றுந்து நிலையாயிருக்கும் இடநிலைநேர வரைபடம் நேர அச்சுக்கு இணையான நேர்க்கோடு (படம் 3.2(அ)).

நேர்க்கோட்டில் அசையும் பொருள் சமநேர இடைவெளிகளில் சமத்தொலைவுகளை கடந்தால், அது நேர்க்கோட்டில் **சீரான அசைவி**ல் இருப்பதாக சொல்கிறோம். இவ்வாறான அசைவின் இடப்பெயர்ச்சிநேர வரைபடத்தை படம் 3.2(ஆ) காட்டுகிறது.



படம் 3.2 இடநிலைநேர வரைபடம் (அ) கிடப்புப்பொருள் (ஆ) சீரான அசைவிலுள்ள பொருள்



படம் 3.3 வேகம்பெறும் சிற்றுந்தின் இடநிலைநேர வரைபடம்

இப்போது ஓய்வுநிலையில் தொடங்கி படிப்படியாக முடுக்கமடையும் ஒரு சிற்றுந்தின் அசைவை கருதுவோம். சிற்றுந்து $t = 0$ என்ற நேரத்தில் O என்ற மூலத்தில் ஓய்விலிருந்து தொடங்கி $t = 10\,s$ வரை வேகம்பெற்று, அதன்பின் $t = 18\,s$ வரை சீரான வேகத்தில் அசைகிறது. அதன்பின் தடுப்பியிடப்படுவதால் $t = 20\,s$, $x = 296\,m$ இல் நிற்கிறது. இந்த வேற்றுவத்துக்கான இடநிலைநேர வரை படத்தை படம் 3.3 காட்டுகிறது. பின்வரும் பகுதிகளில் நம் உரையளிப்புகளில் இந்த படத்தை நோக்கிடுவோம்.

3.3 சராசரித்திசைவேகமும் சராசரிவேகமும்

ஒரு பொருள் அசைவிலிருக்கும்போது அதன் இடநிலை நேரத்துடன் மாறுபடுகிறது. ஆனால் இடநிலை நேரத்துடன் எவ்வளவு வேகமாக மாறுகிறது? எந்தத்திசையில்? இதை விவரிக்க, **சராசரித்திசை வேகம்** என்ற ஒரு அளவை வரையறுப்போம். சராசரித்திசைவேகம் இடப்பெயர்ச்சியை (இடநிலையில் ஏற்படும் மாற்றத்தை) அதற்கு ஆகும் நேரத்தால் வகுத்தது என்று வரையறுக்கிறோம். அதாவது

$$\overline{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (3.1)$$

இங்கு, x_2 உம் x_1 உம் முறையே t_1 , t_2 ஆகிய நேரங்களில் பொருளின் இடநிலைகள். திசைவேகத்தின் அடையாளமான $\overline{v}$ இலுள்ள மேற்கோடு சராசரியான அளவுகளை குறிக்க பயன்படுகிறது. திசைவேகத்தின் அவவலகு $m\,s^{-1}$; எனினும் பல அன்றாடப்பயன்பாடுகளில் $km\,h^{-1}$ பயன்படுகிறது.

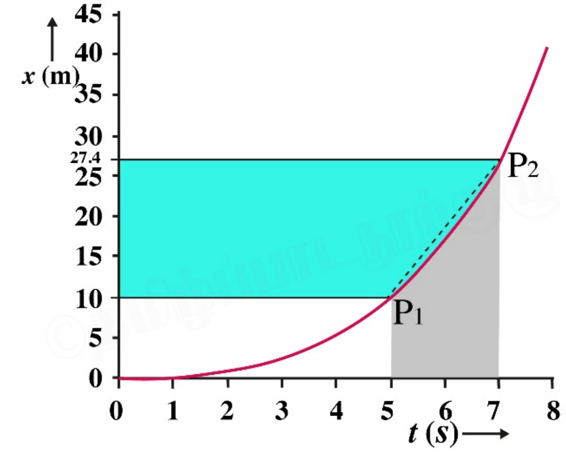
இடப்பெயர்ச்சியைப்போல் சராசரித்திசை வேகமும் ஒரு திசையன். ஆனால், நேர்க்கோட்டசைவில் திசையனின் திசையப்பண்பை நேர்மக்குறியாலும் எ.திர்மக்குறியாலும் கையாளலாம் என்பதால் இந்தப்படலத்தில் திசையக்குறியீட்டை பயன்படுத்தவில்லை.

படம் 3.3இலுள்ள சிற்றுந்தின் அசைவை கருதுக. $x\,t$ வரைபடத்தின் $t = 0\,s$ க்கும் $t = 8\,s$ க்குமிடையிலுள்ள பகுதியை பெரிதாக்கி படம் 3.4இல் காட்டியிருக்கிறோம். வரைபடத்தில் கண்டபடி, $t = 5\,s$க்கும் $t = 7\,s$க்குமிடையில் சிற்றுந்தின் சராசரித்திசைவேகம்

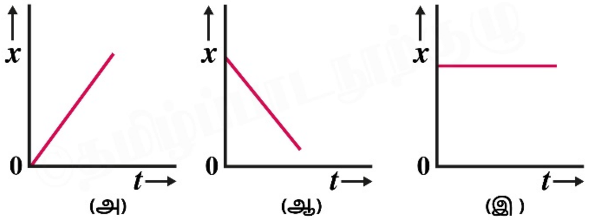
$$\overline{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{(27.4 - 10.0)m}{(7 - 5)s} = 8.7\,m\,s^{-1}$$

வடிவியலின்படி இது தொடக்கப்புள்ளியான P_1 ஐயும் இறுதிப்புள்ளியான P_2 ஐயும் இணைக்கும் P_1P_2 என்ற கோட்டின் சாய்மை என்பதை படத்தில் காண்கிறோம்.

சராசரித்திசைவேகம் இடப்பெயர்ச்சியின் குறியைப்பொறுத்து நேர்மமாகவோ எதிர்மமாகவோ இருக்கலாம். இடப்பெயர்ச்சி சுழியமாகும்போது அதுவும் சுழியமாகிறது. நேர்மத்திசைவேகத்துடனும் எதிர்மத்திசைவேகத்துடனும் அசையும் பொருளுக்கும் அசையாமல் நிலையாயிருக்கும் பொருளுக்குமான இடநிலை நேர வரைபடங்களை படம் 3.5 காட்டுகிறது.



படம் 3.4 சராசரித்திசைவேகம் P_1P_2 என்ற கோட்டின் சாய்மை



(அ) (ஆ) (இ)

படம் 3.5 (அ) நேர்மத்திசைவேகத்தில் அசைவதும் (ஆ) எதிர்மத்திசைவேகத்தில் அசைவதும் (இ) ஓய்விலிருப்பதுமான பொருளின் இடநிலைநேர வரைபடம்

மேற்கண்ட சராசரித்திசைவேகத்தின் வரையறையில் இடப்பெயர்ச்சி இடம்பெறுகிறது. இடப்பெயர்ச்சியின் பருமனளவு பாதைநீளத்திலிருந்து வேறுபடலாம் என்பதை முன்பு கண்டோம். உண்மையான பாதையின்வழியாக உள்ள அசைவின்வீதத்தை விவரிக்க சராசரிவேகம் என்ற மற்றொரு அளவை அறிமுகமாக்குகிறோம்.

சராசரிவேகம் என்பது கடந்த மொத்த தொலைவை அதற்கு ஆகும் நேரத்தால் வகுத்தது என்று வரையறுக்கிறோம்.

$$\text{சராசரிவேகம்} = \frac{\text{மொத்த பாதைநீளம்}}{\text{மொத்த நேர இடைவெளி}} \quad (3.2)$$

சராசரிவேகத்துக்கு சராசரித்திசைவேகத்தின் அலகுகளே $(m\,s^{-1})$ இருப்பது தெளிவு. ஆனால் இது பொருள் பயணிக்கும் திசையை காட்டவில்லை. சராசரித்திசைவேகம் நேர்மமாகவோ எதிர்மமாகவோ இருக்கலாம் என்று கண்டோம்; ஆனால் சராசரிவேகம் எப்போதும் நேர்மமானது. ஒரு பொருளின் அசைவு நேர்க்கோட்டிலும் ஒரே திசையிலும் இருந்தால் (அதாவது நேர்க்கோட்டசைவு திசைமாறாமலிருந்தால்) இடப்பெயர்ச்சியின் பருமனளவு மொத்த பாதைநீளத்துக்கு சமம்; அப்போது, சராசரித்திசைவேகத்தின் பருமனளவும் சராசரிவேகத்துக்கு சமம். இது எப்போதும் சரியன்று என்பதை அடுத்த சிக்கலில் காண்போம்.

சிக்கல் 3.1

ஒரு சிற்றுந்து படம் 3.1இலுள்ள OP யைப்போன்ற ஒரு நேர்க்கோட்டில் அசைகிறது. O விலிருந்து P க்கு $18\,s$ யில் சென்று P யிலிருந்து Q வுக்கு $6.0\,s$ யில் திரும்புகிறது. (அ) Oவிலிருந்து Pக்கு செல்லும் பயணத்திலும் (ஆ) Oவிலிருந்து Pக்குச்சென்று O வுக்கு திரும்பும் பயணத்திலும் சிற்றுந்தின் சராசரித்திசைவேகமும் சராசரி வேகமும் யாவை?

தீர்வு

(அ)

$$\text{சராசரித்திசைவேகம்} = \frac{\text{இடப்பெயர்ச்சி}}{\text{நேர இடைவெளி}}$$

$$\bar{v} = \frac{+360\,m}{18\,s} = 20\,m\,s^{-1}$$

$$\text{சராசரிவேகம்} = \frac{\text{பாதைநீளம்}}{\text{நேர இடைவெளி}} = \frac{360\,m}{18\,s}$$
$$= 20\,m\,s^{-1}$$

இந்த வேற்றுவத்தில் சராசரிவேகம் சராசரித்திசைவேகத்தின் பருமனளவுக்கு சமம்.

(ஆ)

$$\text{சராசரித்திசைவேகம்} = \frac{\text{இடப்பெயர்ச்சி}}{\text{நேர இடைவெளி}}$$
$$= \frac{+240\,m}{(18+6.0)\,s} = +10\,m\,s^{-1}$$

$$\text{சராசரிவேகம்} = \frac{\text{பாதைநீளம்}}{\text{நேர இடைவெளி}} = \frac{OP+PQ}{\Delta t}$$
$$= \frac{(360+120)\,m}{24\,s} = 20\,m\,s^{-1}$$

இந்த வேற்றுவத்தில் சராசரிவேகம் சராசரித்திசைவேகத்தின் பருமனளவுக்கு சமமன்று. இது எதனாலெனில், இங்கு அசைவில் திசைமாற்றம் இருக்கிறது. பாதைநீளம் இடப்பெயர்ச்சியின் பருமனளவைவிட அதிகமானது. இது வேகம் பொதுவாக திசைவேகத்தின் பருமனளவைவிட பெரிது என்பதை காட்டுகிறது.

3.1ஆம் சிக்கலிலுள்ள சிற்றுந்து Oவிலிருந்து Pக்கு சென்று பிறகு அதே நேர இடைவெளியில் O வுக்கு திரும்பினால், சராசரிவேகம் $20\,m/s$; ஆனால் சராசரித்திசைவேகம் சுழியம்!

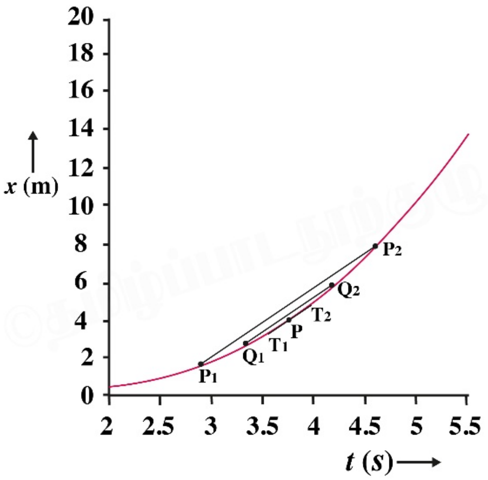
3.4 உடனடித்திசைவேகமும் உடனடிவேகமும்

சராசரித்திசைவேகம் ஒரு பொருள் ஒரு குறிப்பிட்ட நேர இடைவெளியில் எவ்வளவு வேகமாக அசைகிறது என்பதை காட்டுகிறது. ஆனால் அந்த இடைவெளியின்போது வெவ்வேறு நேரங்களில் எவ்வளவு வேகத்துடன் அசைகிறது என்பதை சொல்லவில்லை. இதற்காக, நாம் **உடனடித்திசைவேகம்** என்பதை வறையறுக்கிறோம்; இதை t என்ற நேரத்தில் பொருளின் திசைவேகம் என்கிறோம்.

உடனடித்திசைவேகத்தை நேரஇடைவெளியான Δt சுழியெல்லைச்சிறிதாகும்போது சராசரித்திசைவேகத்தின் எல்லையாக வரையறுக்கிறோம். அதாவது

$$v = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (3.3)$$

இங்கு $\underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}}$ என்ற குறியீடு Δt சுழியத்தை அணுகும்போது இந்த குறியீட்டுக்கு அடுத்து வரும் அளவின் எல்லையை குறிக்கிறது. நுண்கணித மொழியில் (3.3) ஆம் சமன்பாட்டின் வலப்பக்கம் tஐப்பொறுத்து xஇன் வகைக்கெழு. (பிற்சேர்க்கை 3.1). இது ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் இடநிலை நேரத்துடன் மாறும் வீதம்.



படம் 3.6 இடநிலைநேர வரைபடத்திலிருந்து திசைவேகத்தை தீர்மானித்தல். $t = 4\ s$இல்

திசைவேகம் அந்த நேரத்துக்கு நிகரான புள்ளியில் வரைபடத்தொடுகோட்டின் சாய்மை.

ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் திசைவேகத்தை பெற (3.3) ஆம் சமன்பாட்டை **வரைபட**வழியிலோ **எண்கணிப்ப**வழியிலோ பயன்படுத்தலாம். படம் 3.3இலுள்ள சிற்றுந்தின் அசைவில் $t = 4\ s$ என்ற நேரத்தில் $(P$ என்ற புள்ளியில்) திசைவேகத்தின் மதிப்பை காணவிரும்புவதாக கொள்வோம். கணக்கீட்டை எளிமையாக்க அந்த படத்தை வேறு அளவங்களுடன் படம் 3.6இல் வரைந்திருக்கிறோம். $t = 4\ s$ யில் மையமான $\Delta t = 2\ s$யை கருதுவோம். சராசரித்திசைவேகத்தின் வரையறையின் படி, P_1P_2 என்ற கோட்டின் சாய்மை $3\ s$ யிலிருந்து $5\ s$ வரையான இடைவெளியில் சராசரித்திசைவேகத்தின் மதிப்பை தருகிறது. இப்போது, Δtயை $2\ s$யிலிருந்து $1\ s$க்கு குறைப்போம். அப்போது P_1P_2 என்ற கோடு Q_1Q_2 ஆகிறது. அதன் சாய்மை $3.5\ s$ யிலிருந்து $4.5\ s$ வரையான இடைவெளியில் சராசரித்திசைவேகத்தின் மதிப்பை தருகிறது. $\Delta t \to 0$ என்ற எல்லையில் P_1P_2 இடநிலைநேர வளைவரைக்கு P யில் தொடுகோடாகிறது; அதன் சாய்மை $t = 4\ s$இல் திசைவேகமாகிறது.

இந்த நிகழ்முறையை வரைபடமாக காட்டுவது கடினம். ஆனால் எண்கணிப்ப முறையை பயன்படுத்தி திசைவேகத்தின் மதிப்பை பெறும்போது எல்லையின் பொருள் தெளிவாகிறது. படம் 3.6இல் காட்டிய வரைபடத்துக்கு $x = 0.08\ t^3$. அட்டவணை 3.1 $t = 4.0\ s$ இல் மையமான $2.0\ s$, $1.0\ s$, $0.5\ s$, $0.1\ s$, $0.01\ s$ ஆகிய Δt மதிப்புகளுக்கு $\Delta x / \Delta t$ மதிப்புகளை காட்டுகிறது. இரண்டாம், மூன்றாம் நெடுக்கைகள் $t_1 = (t - \Delta t/2)$, $t_2 = (t + \Delta t/2)$ ஆகிய மதிப்புகளை தருகிறது. நான்காம், ஐந்தாம் நெடுக்கைகள் நிகரான xமதிப்புகளை, அதாவது $x(t_1) = 0.08\ t_1^3$, $x(t_2) = 0.08\ t_2^3$ ஆகிய மதிப்புகளை, தருகிறது. ஆறாம் நெடுக்கை $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ என்ற வேறுபாட்டையும் இறுதி நெடுக்கை Δxக்கும் Δtக்குமான விகிதத்தையும் தருகின்றன. அதாவது இறுதி நெடுக்கை முதல் நெடுக்கையில் பட்டியலிட்ட Δt மதிப்புக்கு நிகரான சராசரித்திசைவேகத்தை தருகிறது.

அட்டவணை 3.1 $t = 4\ s$இல் ${}^{\Delta x}/_{\Delta t}$ இன் எல்லை மதிப்பு

$\Delta t\ (s)$	$t_1\ (s)$	$t_2\ (s)$	$x(t_1)\ (m)$	$x(t_2)\ (m)$	$\Delta x\ (m)$	$\frac{\Delta x}{\Delta t}\ (m\ s^{-1})$
2.0	3.0	5.0	2.16	10.0	7.84	3.92
1.0	3.5	4.5	3.43	7.29	3.86	3.86
0.5	3.75	4.25	4.11875	6.14125	1.9225	3.845
0.1	3.95	4.05	4.93039	5.31441	0.38402	3.8402
0.01	3.995	4.005	5.100824	5.139224	0.0384	3.8400

அட்டவணை 3.1இலிருந்து Δtயின் மதிப்பை $2.0\,s$ இலிருந்து $0.01\,s$ க்கு குறைக்கும்போது சராசரித் திசையனின் மதிப்பு எல்லைமதிப்பான $3.84\,m\,s^{-1}$ ஐ நெருங்குவதை காண்கிறோம். இந்த எல்லைமதிப்பே $t = 4.0\,s$இல் dx/dtயின் மதிப்பு. இந்த வகையில் படம் 3.3இல் காட்டிய சிற்றுந்தசைவின் திசைவேகத்தை ஒவ்வொரு நேரத்திலும் கணக்கிடலாம். இந்த வேற்றுவத்தில் திசைவேகம் நேரத்துடன் மாறுவது படம் 3.7இல் காட்டியதுபோல் இருப்பதாக காண்கிறோம்.

உடனடித்திசைவேகத்தை தீர்மானிப்பதற்கான வரைபடமுறை எப்போதும் வசதியானதன்று. இதற்காக, நாம் இடநிலைநேர வரைபடத்தை கவனமாக வரைந்து Δt சிறிதாக ஆக சராசரித்திசை வேகத்தின் மதிப்புகளை கணக்கிடவேண்டும். வெவ்வேறு நேரங்களில் இடநிலைகளின் தரவுகளோ நேரத்தின் சார்பனாக இடநிலைகளை தரும் முழுச்சரியான கோவையோ நம்மிடம் இருந்தால் வெவ்வேறு நேரங்களில் திசைவேகமதிப்புகளை கணக்கிடுவது எளிது. அப்போது குறைந்துவரும் Δt மதிப்புகளுக்கு $\Delta x/\Delta t$ யை தரவுகளிலிருந்து கணக்கிட்டு எல்லைமதிப்புகளை அட்டவணை 3.1இல் செய்தபடி கணக்கிடலாம். சார்பன் இருக்கும்போது வகையீட்டு நுண்கணிதத்தை பயன்படுத்தி வெவ்வேறு நேரங்களில் dx/dtயை கணக்கிடலாம். இந்த நுண்கணிதக்கணக்கீட்டை கீழ்வரும் சான்று எடுத்துக்காட்டுகிறது.

சிக்கல் 3.2

x அச்சுக்கு நேராக அசையும் ஒரு பொருளின் இடநிலையை $x = a + bt^2$ தருகிறது; இங்கு, $a = 8.5\,m$, $b = 2.5\,m\,s^{-2}$, tயை நொடிகளில் அளக்கிறோம். $t = 0\,s$, $t = 2.0\,s$ ஆகிய நேரங்களில் திசை வேகம் என்ன? $t = 2.0\,s$ க்கும் $t = 4.0\,s$ க்குமிடையில் சராசரித்திசைவேகம் என்ன?

தீர்வு

வகையீட்டுநுண்கணிதக்குறியீட்டில் திசைவேகம்

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(a + bt^2) = 2b\,t = 5.0\,t\,m\,s^{-1}$$

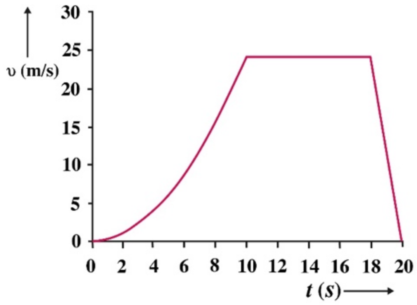
$t = 0$இல் $v = 0\,m\,s^{-1}$,

$t = 2.0\,s$இல் $v = 10\,m\,s^{-1}$

சராசரித்திசைவேகம்

$$= \frac{x(4.0) - x(2.0)}{4.0 - 2.0} = \frac{a + 16b - a - 4b}{2.0}$$

$$= 6.0 \times b = 6.0 \times 2.5\,m\,s^{-2} = 15\,m\,s^{-2}$$



படம் 3.7 படம் 3.3இல் காட்டிய அசைவுக்கு நிகரான திசைவேகநேரப்படவரைவு

படம் 3.7இலிருந்து $t = 10\,s$, $18\,s$ ஆகிய நேரங்களுக்கிடையில் திசைவேகம் மாறிலியாயிருப்பதை நோக்குகிறோம். $t = 18\,s$க்கும் $t = 20\,s$ க்குமிடையில் அது சீராக குறைவதையும் $t = 0\,s$ க்கும் $t = 10\,s$ க்குமிடையில் அதிகரிப்பதையும் காண்கிறோம். **சீரான அசைவுக்கு திசைவேகம் எல்லாநேரங்களிலும் சராசரித்திசைவேகத்துக்கு சமமாவதை நோக்குக.**

திசைவேகத்தின் பருமனளவை **உடனடிவேகம்** என்றோ வெறுமனே வேகம் என்றோ அழைக்கிறோம். சான்றாக, $+24.0\,m\,s^{-1}$, $-24.0\,m\,s^{-1}$ ஆகிய இரண்டு திசைவேகங்களும் $24.0\,m\,s^{-1}$ வேகத்துக்கு நிகரானவை. ஒரு முடிவுறு நேர இடைவெளியில் சராசரிவேகம் சராசரித்திசைவேகத்தின் பருமனளவுக்கு சமமானதோ அதிகமானதோ எனினும், ஒரு நேரத்தில் உடனடிவேகம் அந்த நேரத்தில் உடனடித்திசைவேகத்தின் பருமனளவுக்கு சமம் என்பது நோக்கத்தக்கது. இது ஏன் என்பது விளங்குகிறதா?

3.5 முடுக்கம்

பொதுவாக ஒரு பொருளின் அசைவின்போது திசைவேகம் மாறுகிறது. இந்த மாற்றத்தை எவ்வாறு விவரிப்பது? இதை **தொலைவுடன்** திசைவேகம் மாறும் வீதமாக விவரிக்கவேண்டுமா, **நேரத்துடன்** மாறும் வீதமாக விவரிக்கவேண்டுமா? இது கலிலியோவின் காலத்திலே ஒரு சிக்கலாயிருந்தது. முதலில் இதை தொலைவுடன் திசைவேகம் மாறுவதாக விவரிக்கவேண்டும் என்று எண்ணினார்கள். ஆனால் கலிலியோ கட்டின்றி விழும் பொருள்களைப்பற்றியும் சாய்ந்த தளத்தில் பொருள்களின் அசைவைப்பற்றியும் செய்த ஆராய்ச்சிகளிலிருந்து திசைவேகம் நேரத்துடன் மாறும் வீதம் கட்டின்றி விழும் பொருள்களுக்கு ஒரு அசைவின் மாறிலி என்ற முடிவுக்கு வந்தார் இதன் மறுபக்கமாக, தொலைவுடன் திசைவேகம் மாறும் வீதம் மாறிலியன்று. தொலைவு அதிகரிக்கும்போது திசைவேகம் குறைகிறது.

இதிலிருந்து நேரத்துடன் திசைவேகம் மாறுவதான முடுக்கம் என்ற கருத்துருவை வந்தடைந்தனர்.

ஒரு நேர இடைவெளியில் சராசரிமுடுக்கம் திசைவேகத்தின் மாற்றத்தை நேர இடைவெளியால் வகுத்தது என்று வரையறுக்கிறோம்.

$$\overline{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (3.4)$$

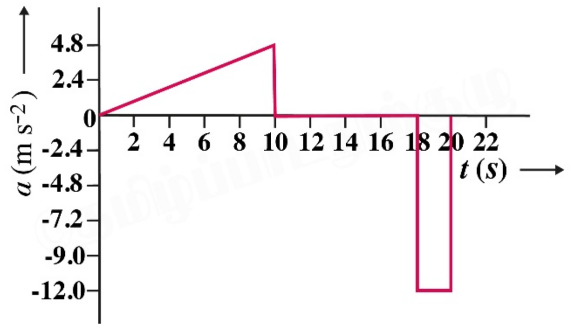
இங்கு, v_1 உம் v_2 உம் முறையே t_1, t_2 ஆகிய நேரங்களில் உடனடித்திசைவேகங்கள். இது ஓரலகு நேரத்துக்கு சராசரித்திசைவேகத்தின் மாற்றம். முடுக்கத்தின் அவவலகு $m\,s^{-2}$.

நேரத்துக்கெதிராக திசைவேகத்தை வரைந்த வரைபடத்தில் சராசரிமுடுக்கம் (v_1, t_1), (v_2, t_2) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சாய்மை. படம் 3.7இல் காட்டிய திசைவேகநேர வரைபடத்துக்கு, $0\,s - 10\,s$, $10\,s - 18\,s$, $18\,s - 20\,s$ ஆகிய வெவ்வேறு நேர இடைவெளிகளில் முடுக்கத்தின் மதிப்புகள் பின்வருமாறு.

$$0\,s - 10\,s:\ \overline{a} = \frac{(24-0)\,m\,s^{-1}}{(10-0)\,s} = 2.4\,m\,s^{-2}$$

$$10\,s - 18\,s:\ \overline{a} = \frac{(24-24)\,m\,s^{-1}}{(18-10)\,s} = 0\,m\,s^{-1}$$

$$18\,s - 20\,s: \overline{a} = \frac{(0-24)\,m\,s^{-1}}{(20-18)\,s} = -12\,m\,s^{-1}$$

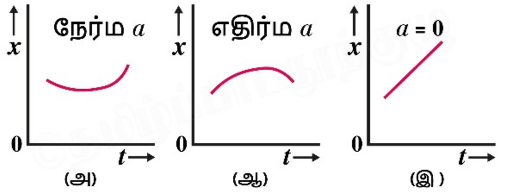


படம் 3.8 படம் 3.7இலுள்ள அசைவில் நேரத்தின் சார்பனாக முடுக்கம்

உடனடிமுடுக்கத்தை உடனடித்திசைவேகத்தைப்போலவே வரையறுக்கிறோம்.

$$a = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \qquad (3.5)$$

ஒரு நேரத்திலுள்ள முடுக்கம் அந்த நேரத்தில் $v\,t$ வளைவரையின் தொடுகோட்டின் சாய்மை. படம் 3.7இல் காட்டிய $v\,t$ வளைவரைக்கு ஒவ்வொரு நேரத்திலும் முடுக்கத்தை பெறலாம். இதன் விளைவாக பெறும் a, tவளைவரையை படம் 3.8 காட்டுகிறது. முடுக்கம் $0\,s$ யிலிருந்து $10\,s$வரை சீரற்றதாயிருப்பதை காண்கிறோம். $10\,s$ க்கும் $18\,s$ க்குமிடையில் சுழியமாகவும், $18\,s$ க்கும் $20\,s$ க்குமிடையில் மாறிலியான $-12\,m\,s^{-2}$ மதிப்புடையதாகவும் இருப்பதை காண்கிறோம். முடுக்கம் சீரானதாயிருக்கும் போது அது இந்த நேர இடைவெளியில் சராசரிமுடுக்கத்துக்கு சமமாவது தெளிவு.



படம் 3.9 (அ) நேர்ம, (ஆ) எதிர்ம, (இ) சுழிய முடுக்கமுள்ள அசைவுகளின் இடநிலைநேர படவரைவுகள்

திசைவேகத்துக்கு பருமனளவும் திசையும் இருப்பதால், திசைவேகமாற்றம் இரண்டில் எது மாறுவதாலும் ஏற்படலாம். எனவே, முடுக்கம் வேகம் (பருமனளவு) மாறுவதாலோ திசை மாறுவதாலோ இரண்டும் மாறுவதாலோ எழலாம். திசைவேகத்தைப்போலவே முடுக்கமும் நேர்மமாகவோ எதிர்மமாகவோ சுழியமாகவோ இருக்கலாம். நேர்ம, எதிர்ம, சுழிய முடுக்கங்களுள்ள அசைவுகளின் இடநிலைநேர படவரைவுகளை படம் 3.9 காட்டுகிறது. நேர்மமுடுக்கத்துக்கு படவரைவு மேனோக்கி வளைவதையும் எதிர்மமுடுக்கத்துக்கு கீழ் நோக்கி வளைவதையும் சுழியமுடுக்கத்துக்கு நேர்க்கோடாவதையும் நோக்குக. ஒரு பயிற்சியாக, படம் 3.3இலுள்ள வளைவரையில் இந்த மூன்று வேற்றுவங்களுக்கும் நிகரான வட்டாரங்களை இனங்காண்க.

முடுக்கமும் நேரத்துடன் மாறலாம் எனினும், இந்தப்படலத்தில் மாறாமுடுக்கமுள்ள அசைவுகளையே நாம் கருதுகிறோம். இந்த வேற்றுவத்தில், சராசரிமுடுக்கம் நேர இடைவெளியில் முடுக்கத்தின் மாறாமதிப்புக்கு சமம். பொருளின் திசைவேகம் $t = 0$ த்தில் v_0 எனில், t என்ற நேரத்தில்

$$\overline{a} = \frac{(v - v_0)}{t - 0}, \qquad v = v_0 + at \qquad (3.6)$$

சில எளிய வேற்றுவங்களில் திசைவேகநேர வரைபடங்கள் எவ்வாறு தோன்றுகின்றன என்று பார்ப்போம். படம் 3.10 கீழ்க்காணும் வேற்றுவங்களில் மாறாமுடுக்கமுள்ள அசைவுகளின் திசைவேக நேர வரைபடங்களை காட்டுகிறது.

(அ) நேர்ம முடுக்கத்துடன் நேர்மத்திசையில் அசையும் ஒரு பொருள். சான்றாக, படம் 3.3இல் $t = 0\,s$ க்கும் $t = 10\,s$ க்குமிடையில் சிற்றுந்தின் அசைவு.

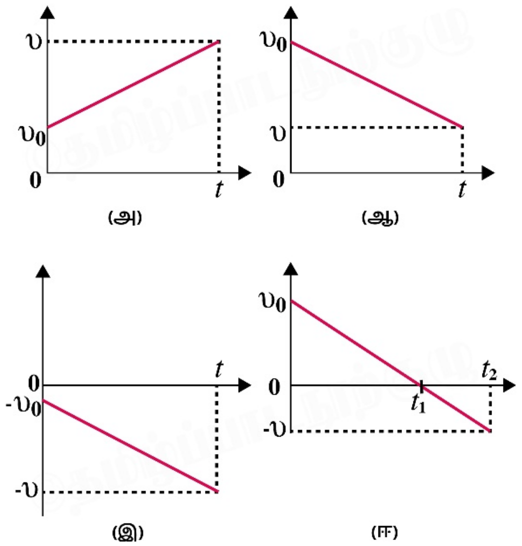
(ஆ) எதிர்ம முடுக்கத்துடன் நேர்மத்திசையில் அசையும் ஒரு பொருள். சான்றாக, படம் 3.3இல் $t = 18\,s$ க்கும் $t = 20\,s$ க்குமிடையில் சிற்றுந்தின் அசைவு.

(இ) எதிர்ம முடுக்கத்துடன் எதிர்மத்திசையில் அசையும் ஒரு பொருள். சான்றாக, படம்

3.1இல் 0விலிருந்து எதிர்ம x திசையில் அதிகரிக்கும் வேகத்துடன் அசையும் சிற்றுந்து.

(ஈ) t_1 என்ற நேரம்வரை நேர்மத்திசையில் அசைந்து பிறகு அதே எதிர்மமுடுக்கத்துடன் திசைமாறும் ஒரு பொருள். சான்றாக, படம் 3.1இல் 0விலிருந்து Q வுக்கு t_1 வரை குறையும் வேகத்துடன் அசைந்து பிறகு அதே எதிர்மமுடுக்கத்துடன் எதிர்த்திசையில் அசைகிறது.

பல அசையும் பொருள்களின் திசைவேகநேர வரைபடங்களின் ஒரு ஆர்வமான பண்புக்கூறு என்னவென்றால், **ஒரு வளைவரையின் கீழுள்ள பரப்பளவு குறிப்பிட்ட நேர இடைவெளியின் இடப்பெயர்ச்சியை குறிக்கிறது**. இந்தக்கூற்றின் பொதுவான நிறுவலுக்கு நுண்கணிதம் தேவைப்படும். ஆனால், மாறாத u திசைவேகத்தில் அசையும் ஒரு பொருளின் எளிய வேற்றுவத்தில் இது உண்மையாவதை காணலாம். இதன் திசைவேகநேர வரைபடத்தை படம் 3.11 காட்டுகிறது.



படம் 3.10 மாறாமுடுக்கமுள்ள அசைவுகளுக்கு திசைவேகநேர வரைபடங்கள். (அ) நேர்ம முடுக்கத்துடன் நேர்மத்திசையில் அசைவு. (ஆ) எதிர்ம முடுக்கத்துடன் நேர்மத்திசையில் அசைவு. (இ) எதிர்ம முடுக்கத்துடன் எதிர்மத்திசையில் அசைவு. (ஈ) எதிர்ம முடுக்கமுள்ள ஒரு பொருள் $T_!$ என்ற நேரத்தில் திசைமாறல். 0த்திலிருந்து t_1வரை நேர்மத்திசையிலும் t_1இலிருந்து t_2வரை எதிர்த்திசையிலும் அசைகிறது.

படம் 3.11 $v\ t$வளைவரையின்கீழுள்ள பரப்பளவு ஒரு குறிப்பிட்ட நேர இடைவெளியில் பொருளின் இடப்பெயர்ச்சிக்கு சமம்.

இந்த $v\,t$ வளைவரை நேர அச்சுக்கு இணையான ஒரு நேர்க்கோடு. அதன்கீழ் $t = 0$ த்திலிருந்து $t = T$ வரையுள்ள பரப்பளவு u உயரமும் T அடியுமுள்ள செவ்வகத்தின் பரப்பளவு, அதாவது uT. இதுவே இடப்பெயர்ச்சி. இங்கு, பரப்பளவு எவ்வாறு ஒரு நீளத்துக்கு சமமாகிறது? சிந்தியுங்கள்! இரண்டு ஒருங்களவச்சுகள் குறிப்பிடும் அளவுகளின் அலகுப்பருமானங்களை கருதினால் விடையை காண்பீர்கள்.

இந்த படலத்தில் காட்டிய பல $x\,t, v\,t, a\,t$ வளைவரைகளின் சில புள்ளிகளில் கூரிய மடக்குவளைவுகள் இருப்பதை நோக்குக. இந்த புள்ளிகளில் சார்பன்கள் வகையிடத்தகாதவை என்பது உள்ளுரை. நடைமுறையான நிலைமைகளில் எல்லாப்புள்ளிகளிலும் சார்பன்கள் வகையிடத்தக்கவை; வளைவரைகள் வழவழப்பானவை.

இதன் இயற்பொருள் என்னவென்றால், முடுக்கமும் திசைவேகமும் ஒரே கணத்தில் திடீரென்று மாறவியலாது. மாற்றங்கள் தொடர்ச்சியானவை.

3.6 சீரான முடுக்கமுள்ள அசைவுக்கான அசைவியச்சமன்பாடுகள்

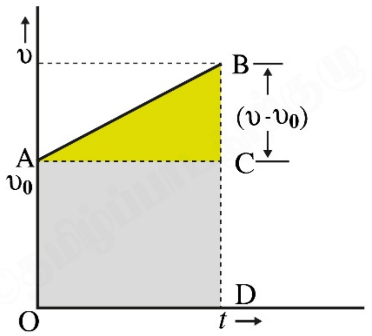
சீராக முடுக்கமடையும் அசைவுகளுக்கு இடப்பெயர்ச்சி (x), ஆகும் நேரம் (t), தொடக்கத் திசைவேகம் (v_0) , இறுதித்திசைவேகம் (v) , முடுக்கம் (a) ஆகியவற்றை தொடர்புறுத்தும் சில எளிய சமன்பாடுகளை வருவிக்கலாம். ஏற்கனவே பெற்ற (3.6) ஆம் சமன்பாடு சீரான முடுக்கத்தில் அசையும் பொருளின் தொடக்கத்திசைவேகத்துக்கும் இறுதித் திசைவேகத்துமான ஒரு உறவை தருகிறது.

$$v = v_0 + at$$

இந்த உறவை படம் 3.12 வரைபடமாக காட்டுகிறது. இந்த வளைவரையின்கீழுள்ள பரப்பளவு சுழிய நேரத்துக்கும் t நேரத்துக்குமிடையிலுள்ள பரப்பளவு. இது ABC

என்ற முக்கோணத்தின் பரப்பும் $OACD$ எனற செவ்வகத்தின் பரப்பும் சேர்ந்தது. எனவே

$$\text{பரப்பளவு} = \frac{1}{2}(v - v_0)t + v_0 t$$



படம் 3.12 சீரான முடுக்கமுள்ள பொருளின் $v\ t$வளைவரையின்கீழ் பரப்பளவு

முந்திய பகுதியில் விளக்கியபடி, $v\ t$ வளைவரையின்கீழுள்ள பரப்பளவு இடப்பெயர்ச்சியை குறிக்கிறது. எனவே, பொருளின் இடப்பெயர்ச்சி

$$x = \frac{1}{2}(v - v_0)t + v_0 t \qquad (3.7)$$

ஆனால், $v - v_0 = at$ என்பதால்

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (3.8)$$

(3.8)ஆம் சமன்பாட்டை

$$x = \frac{v + v_0}{2}t = \overline{v}t, \qquad \overline{v} = \frac{v + v_0}{2}$$

(மாறா முடுக்கத்துக்கு மட்டும்) $\qquad (3.9)$

என்றும் எழுதலாம். அதாவது, முடுக்கம் மாறிலி என்றபோது தொடக்கத்திசைவேகம், இறுதித்திசை வேகம் ஆகியவற்றின் சராசரியை சராசரித்திசை வேகமாக எடுத்து பொருளின் இடப்பெயர்ச்சியை கணக்கிடலாம்.

(3.6)ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து, $t = (v - v_0)/a$. இதை (3.9)ஆம் சமன்பாட்டில் மாற்றிட்டு

$$x = \overline{v}t = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)\left(\frac{v - v_0}{a}\right) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \qquad (3.10)$$

என்று பெறுகிறோம். இதே சமன்பாட்டை (3.6)ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து tயின் மதிப்பை (3.8) ஆம் சமன்பாட்டில் மாற்றிட்டும் பெறலாம். இவ்வாறு நாம் மூன்று முக்கியமான சமன்பாடுகளை பெற்றிருக்கிறோம்.

$$v = v_0 + at, \qquad x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$
$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

ஆகிய சமன்பாடுகள் v_0, v, a, t, x ஆகிய ஐந்து அளவுகளை இணைக்கின்றன. இவை மாறா முடுக்கமுள்ள நேரிய அசைவுக்கான அசைவியச்சமன்பாடுகள்.

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளை வருவிக்க $t = 0$ இல் துகளின் இடநிலை $x = 0$ என்று எடுகொண்டோம். தொடக்கத்தில் துகளின் இடநிலை x_0 என்று பொதுவமாக்கலாம். அப்படியெனில் மேற்கண்ட சமன்பாடுகளின் xஐ $x - x_0$ ஆல் மாற்றிடவேண்டும். இவ்வாறு, x_0 இல் தொடங்கும் மாறாமுடுக்கமுள்ள நேரிய அசைவுக்கு நாம் பெறும் பொதுவச்சமன்பாடுகள்

$$v = v_0 + at, \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$
$$(3.11)$$

சிக்கல் 3.3

நுண்கணிதமுறையை பயன்படுத்தி மாறா முடுக்கமுள்ள அசைவின் சமன்பாடுகளை பெறுக.

தீர்வு

வரையறையின்படி

$$a = \frac{dv}{dt}$$
$$dv = a\,dt$$

இரண்டு பக்கங்களையும் தொகையிட்டு

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} a\,dt \qquad (a \text{ மாறிலி})$$

என்று பெறுகிறோம். மேலும், $v = dx/dt$ என்பதால், $dx = v\,dt$. இதன் இருபக்கங்களிலும் தொகையிட்டு

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} v\,dt = \int_{0}^{t} (v_0 + at)dt$$

$$x - x_0 = v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$$
$$x = x_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$$

என்று பெறுகிறோம். முடுக்கத்தின் வரையறையிலிருந்து

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$
$$v\,dv = a\,dx$$

என்று எழுதலாம். இருபக்கங்களையும் தொகையிட்டு

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a\,dx$$

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = a\,(x - x_0)$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

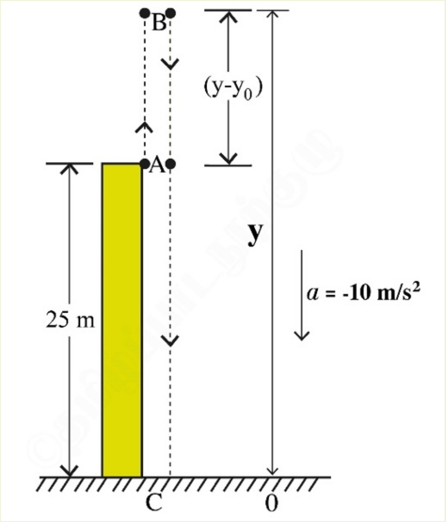
என்று பெறுகிறோம்.

இந்த முறையை மாறும் முடுக்கத்துக்கும் பயன்படுத்தலாம் என்பது இதன் நன்மை.

இனி, இந்த சமன்பாடுகளை பல முக்கியமான வேற்றுவங்களுக்கு பயனாக்குவோம்.

சிக்கல் 3.4

ஒரு பலவடுக்குக்கட்டடத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒரு பந்தை நெடுநிற்பமாக மேனோக்கி $20\, m\, s^{-1}$ வேகத்தில் எறிகிறோம். பந்தெறியுமிடம் தரையிலிருந்து $25\, m$ உயரத்திலிருக்கிறது. (அ) பந்து எவ்வளவு உயரத்துக்கு எழும்? (ஆ) பந்து தரையில் விழ எவ்வளவு நேரம் ஆகும்? $g = 10\, m\, s^{-2}$ எனக்கொள்க.



படம் 3.13

தீர்வு

(அ) மேனோக்கிய நெடுநிற்பத்திசையை நேர்ம y அச்சு என்றும் தரையை சுழியமென்றும் படம் 3.13இல் காட்டியபடி கொள்வோம்.

$$v_0 = +20\, m\, s^{-1}, \qquad a = -g = -10\, m\, s^{-2}, \qquad v = 0\, m\, s^{-1}$$

பந்து அது எறியப்பட்ட இடத்திலிருந்து y என்ற உயரத்துக்கு எழுந்தால்,

$$v^2 = v_0^2 + 2\, a\, (y - y_0)$$

என்ற சமன்பாட்டை பயன்படுத்தி

$$0 = (20)^2 + 2(-10)(y - y_0)$$

என்றும் இதை தீர்த்து $y - y_0 = 20\, m$ என்றும் பெறுகிறோம்.

(ஆ) சிக்கலின் இந்த பகுதியை இரண்டு முறைகளில் தீர்க்கலாம். **முறைகளை கவனமாக நோக்குக.**

முதல் முறை; முதன்முறையில் பாதையை A யிலிருந்து B க்கான மேனோக்கியதும் B யிலிருந்து C க்கான கீழ்நோக்கியதுமான இரண்டு பகுதிகளாக பிரித்துக்கொண்டு அவற்றுக்கு நிகரான t_1, t_2 ஆகிய நேரங்களை கணக்கிடுகிறோம். B யில் திசைவேகம் சுழியமாவதால்,

$$v = v_0 + a\, t, \qquad 0 = 20 - 10\, t_1, \qquad t_1 = 2\, s$$

இது A யிலிருந்து B க்கான நேரம். மீப்பெரும உயரமான B யிலிருந்து பந்து புவியீர்ப்புவிசையின்கீழ் கட்டின்றி விழுகிறது. அப்போது பந்து எதிர்ம y த்திசையில் அசைகிறது.

$$y = y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

என்ற சமன்பாட்டை பயன்படுத்துகிறோம். $y_0 = 45\, m, y = 0, v_0 = 0, a = -g = -10\, m\, s^{-2}$ ஆகியவற்றை மாற்றிட்டு

$$0 = 45 + \left(\frac{1}{2}\right)(-10)t_2^2, \qquad \text{அதாவது } t_2 = 3\, s$$

என்று பெறுகிறோம். எனவே, பந்து தரையில் விழ ஆகும் நேரம் $= t_1 + t_2 = 2\, s + 3\, s = 5\, s$.

இரண்டாம் முறை: மொத்த நேரத்தை கணக்கிட, தேர்ந்தெடுத்த மூலத்திலிருந்து பந்தின் தொடக்க ஒருங்களவையும் இறுதி ஒருங்களவை யும் நோக்கி

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

என்ற சமன்பாட்டை பயன்படுத்துவோம். இப்போது $y_0 = 25\, m, y = 0\, m, v_0 = 20\, m\, s^{-1}, a = -10\, m\, s^{-2}$ என்று கொடுத்திருக்கும்போது tயை கணக்கிடவேண்டும்.

$$0 = 25 + 20\, t + \left(\frac{1}{2}\right)(-10)\, t^2$$

இதிலிருந்து

$$5\, t^2 - 20\, t - 25 = 0$$

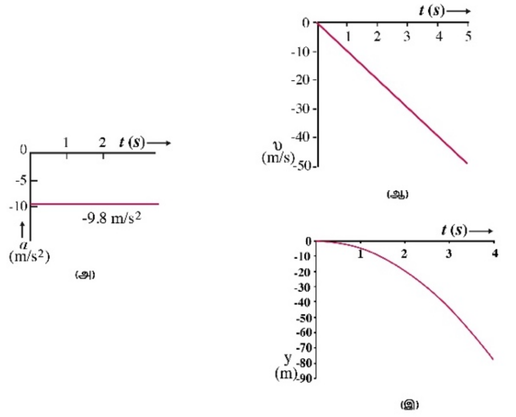
என்ற ஈரடுக்குச்சமன்பாட்டை பெறுகிறோம். இதன் தீர்வு $t = 5\, s$.

ஒரே படியில் விடையைத்தரும் இரண்டாம் முறை சிறந்தது என்பதை நோக்குக. அசைவுக்கு மாறா முடுக்கம் இருப்பதால் நாம் பாதையை கணக்கிலெடுக்க வேண்டியதில்லை.

சிக்கல் 3.5

தடங்கலற்ற வீழ்வு: தடங்கலற்ற வீழ்விலிருக்கும் ஒரு பொருளின் அசைவை உரையளிக்க. வளித்தடையத்தை புறக்கணிக்க.

தீர்வு



படம் 3.14 தடங்கலற்ற வீழ்விலுள்ள பொருளின் அசைவு. (அ) முடுக்கம் நேரத்துடன் மாறுதல். (ஆ) திசைவேகம் நேரத்துடன் மாறுதல். (இ) தொலைவு நேரத்துடன் மாறுதல்.

புவியின் மேற்பரப்பின் அருகில் ஒரு உயரத்திலிருந்து விடுபட்ட பொருள் புவியீர்ப்பு விசையால் கீழ்நோக்கி முடுக்கமடைகிறது. புவியீர்ப்புமுடுக்கத்தின் பருமனளவை g என்று குறிக்கிறோம். வளித்தடையத்தை புறக்கணிக்கும் போது பொருள் தடங்கலின்றி வீழ்வதாக சொல்கிறோம். பொருள் விழும் தொலைவு புவியின் விட்டத்தின் ஒப்பளவில் சிறிதாயிருந்தால் g யை ஒரு மாறிலியாக எடுக்கலாம். அதன் மதிப்பு $9.8\, m\, s^{-2}$. இவ்வாறு தடங்கலற்ற வீழ்வு ஒரு சீரான முடுக்கமுள்ள அசைவு.

அசைவு yத்திசையில் இருப்பதாக கொள்வோம். மேலும் துல்லியமாக, $-y$ த்திசையிலிருப்பதாக கொள்வோம்; ஏனெனில், மேனோக்கிய திசையை நேர்மத் திசையாக கொள்கிறோம். புவியீர்ப்புமுடுக்கம் எப்போதும் கீழ்நோக்கியது என்பதால் இது எதிர்மத்திசையிலுள்ளது. எனவே,

$$a = -g = -9.8\, m\, s^{-2}$$

பொருள் $y = 0$த்தில் ஓய்விலிருந்து விடுபடுகிறது. எனவே, $v_0 = 0$. அசைவுச்சமன்பாடுகள்

$$v = -g\, t = -9.8\, t\, m\, s^{-1}$$

$$y = 0 - \frac{1}{2}\, g\, t^2 = -4.9\, t^2\, m$$

$$v^2 = 0 - 2\, g\, y = -19.6\, y\, m^2\, s^{-2}$$

இந்த சமன்பாடுகள் பயணித்த தொலைவையும் (நேரத்தின் சார்பன்களாக) திசைவேகத்தையும் திசைவேகம் தொலைவுடன் மாறுபடுவதையும் தருகின்றன. முடுக்கம், திசைவேகம், தொலைவு ஆகியவை நேரத்துடன் மாறுவதை படம் 3.14 காட்டுகிறது.

அட்டவணை 3.2

t	y	$y_0 = -\frac{1}{2}gt^2$ இன்வழி y	அடுத்தடுத்த இடைவெளிகளில் கடக்கும் தொலைவு	தொலைவுகளின் விகிதம்
0	0	0		
τ	$-\left(\frac{1}{2}\right) g\, \tau^2$	y_0	y_0	1
2τ	$-4\left(\frac{1}{2}\right) g\tau^2$	$4\, y_0$	$3\, y_0$	3
3τ	$-9\left(\frac{1}{2}\right) g\tau^2$	$9\, y_0$	$5\, y_0$	5
4τ	$-16\left(\frac{1}{2}\right) g\tau^2$	$16\, y_0$	$7\, y_0$	7
5τ	$-25\left(\frac{1}{2}\right) g\tau^2$	$25\, y_0$	$9\, y_0$	9
6τ	$-36\left(\frac{1}{2}\right) g\tau^2$	$36\, y_0$	$11\, y_0$	11

சிக்கல் 3.6

கலிலியோவின் ஒற்றைப்படையெண் விதி: “தடங்கலற்ற வீழ்வில் ஒரு பொருள் சமமான நேர இடைவெளிகளில் கடக்கும் தொலைவுகள் ஒன்றுடனொன்று ஒன்றில் தொடங்கும் ஒற்றைப்படையெண்களின் விகிதத்தில் உள்ளன”. காட்டுக.

தீர்வு

தடங்கலின்றி வீழும் பொருளின் அசைவின் நேர இடைவெளியை τ அளவுள்ள பல சமமான இடைவெளிகளாக பிரித்து அடுத்தடுத்த இடைவெளிகளில் கடக்கும் தொலைவுகளை கணக்கிடுவோம். தொடக்கத் திசைவேகம் சுழியமென்பதால்,

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

இந்த சமன்பாட்டை பயன்படுத்தி, $0, \tau, 2\tau, 3\tau, \ldots$ ஆகிய வெவ்வேறு நேர இடைவெளிகளுக்குப்பின் இடநிலையை கணக்கிடலாம். இவற்றை அட்டவணை 3.2இன் இரண்டாம் நெடுக்கை காட்டுகிறது. முதல் இடைவெளிக்குப்பின் இருக்கும் இடநிலை யான $\left(-\frac{1}{2}\right) gt^2$ ஐ y_0 என்று குறித்தால், மூன்றாம் நெடுக்கை இடநிலைகளை y_0 இன் அலகில் தருகிறது. நான்காம் நெடுக்கை அடுத்தடுத்த τகளில் கடந்த தொலைவுகளை தருகிறது. தொலைவுகள் இறுதிநெடுக்கையில் காட்டிய $1, 3, 5, 7, \ldots$ என்ற ஒற்றைப்படை யெண்களின் விழுக்காட்டில் இருப்பது தெளிவு. இந்த விதியை கலிலியோ கலிலி (1564-1642) நிலைநாட்டினார். இவரே தடங்கலற்ற வீழ்வை முதன்முதலில் அளவியமாக ஆராய்ந்தவர்.

சிக்கல் 3.7

ஊர்திகளின் நிறுத்தத்தொலைவு: ஒரு அசையும் ஊர்திக்கு தடுப்பியிடும்போது அது நிற்கும்முன் பயணிக்கும் தொலைவை நிறுத்தத்தொலைவு என்கிறோம். இது சாலைப்பாதுகாப்பில் ஒரு முக்கியமான காரணி. இது தொடக்கத்திசைவேகத்தையும் (v_0), ஊர்தியின் தடுப்பியியன்மையையும் (அதாவது தடுப்பியிடல் விளைவிக்கும் வேகமிழப்பான $-a$யையும்) சார்ந்தது. நிறுத்தத்தொலைவுக்காக v_0 , a ஆகியவற்றின்வழியிலான ஒரு கோவையை தருவிக்க.

தீர்வு

ஊர்தி நிற்கும்முன் பயணிக்கும் தொலைவு $d_{\text{நி}}$ என்க. அசைவின் சமன்பாடான $v^2 = v_0^2 + 2\,a\,x$ என்பதை பயன்படுத்தியும் $v = 0$ என்பதை நோக்கியும், நிறுத்தத் தொலைவை

$$d_{\text{நி}} = \frac{-v_0^2}{2a}$$

என்று பெறுகிறோம். அதாவது, நிறுத்தத் தொலைவு தொடக்கத்திசைவேகத்தின் வர்க்கவிழுக்காட்டில் உள்ளது. தொடக்கத் திசைவேகம் இரட்டிக்கும்போது நிறுத்தத் தொலைவு நான்மடங்காகிறது (அதே வேகமிழப்புக்கு).

ஒரு குறிப்பிட்ட கட்டும் வடிவுமான சிற்றுந்துக்கு $11, 15, 20, 25\,m/s$ வேகங்களுக்கான நிறுத்தத்தொலைவுகளை முறையே 10, 20 , 34 , $50\,m$ எனக்கண்டறிந்தோம். இது மேற்கண்ட வாய்ப்பாட்டுடன் பொருந்துகிறது.

நிறுத்தத்தொலைவு பள்ளிச்சூழல் போன்ற இடங்களில் வேகவரம்புகளை அமைப்பதில் கருதப்படும் ஒரு முக்கியமான காரணி.

சிக்கல் 3.8

எதிர்வினைநேரம்: ஒரு நிலைமைக்கு நாம் உடனடியாக செயலாற்றவேண்டியபோது நாம் உண்மையில் மறுவினையாற்ற சிறிது நேரம் ஆகிறது. எதிர்வினைநேரம் என்பது ஒரு மனிதர் கண்டறிந்து சிந்தித்து செயலாற்ற ஆகும் நேரம். சான்றாக, ஒருவர் ஊர்தியோட்டும்போது திடீரென்று சாலையில் ஒரு சிறுவன் எதிர்ப்பட்டால், ஊர்தியின் தடுப்பிப்பட்டையில் காலை அழுத்தத் தொடங்குமுன் கடக்கும் நேரம் எதிர்வினை நேரம். எதிர்வினைநேரம் நிலைமையின் உட்சிக்கலையும் எதிர்வினையாற்றும் மனிதரையும் சார்ந்தது.

உம் எதிர்வினைநேரத்தை ஒரு எளிய பரிசோதனையால் அளவிடலாம். உம் நண்பரிடம் ஒரு அளவுகோலை கொடுத்து உம் பெருவிரலுக்கும் ஆட்காட்டிவிரலுக்குமிடையில் படம் 3.15இல் காட்டியபடி நெடுநிற்பமாக விடச்சொல்க. நீர் அதை பிடித்தபின் அளவுகோல் பயணித்த d என்ற தொலைவை காண்க. ஒரு குறிப்பிட்ட வேற்றுவத்தில் $d = 21\,cm$ என்ற கண்டறிந்தால், எதிர்வினை நேரத்தை மதிப்பிடுக.

படம் 3.15 எதிர்வினைநேரத்தை அளவிடல்

தீர்வு

அளவுகோல் தடங்கலின்றி விழுகிறது. எனவே, $v_0 = 0, a = -g = -9.8\,m\,s^{-2}$. கடந்த தொலைவும் எதிர்வினைநேரமும்

$$d = -\frac{1}{2}g\,t_{\text{எ}}^2$$

என்ற உறவால் தொடர்புள்ளவை. அதாவது

$$t_{எ} = \sqrt{\frac{2d}{g}d}$$

$d = 21.0\,cm, g = 9.8\,m\,s^{-2}$ என்பவற்றை நாம் அறிவதால், எதிர்வினைநேரம்

$$\boldsymbol{t_{எ}} = \sqrt{\frac{\mathbf{2 \times 0.21}}{\mathbf{9.8}}}\,\boldsymbol{s} = \mathbf{0.2}\,\boldsymbol{s}$$

3.7 ஒப்பளவத்திசைவேகம்

ஒரு தொடர்வண்டியில் பயணிக்கும்போது அதே திசையில் பயணிக்கும் மற்றொரு தொடர்வண்டி முந்திச்செல்ல நேரலாம். அவ்வாறு முந்துவதற்காக முந்தும் வண்டி நம் வண்டியைவிட அதிக வேகத்தில் செல்ல வேண்டும்; எனினும் தரையிலிருந்து பார்ப்ப வருக்கு தோன்றுவதைவிட நமக்கு அந்த வண்டி மெதுவாக செல்வதுபோல் தோன்றுகிறது. இரண்டு வண்டிகளும் தரையின் ஒப்பளவில் ஒரே திசைவேகத்தில் ஓடினால் ஒரு வண்டியிலிருப்பவர்களுக்கு மற்ற வண்டி அசையாததுபோல் தோன்றும். இதுபோன்ற கண்டறிதல்களை புரிந்துகொள்ள ஒப்பளவத்திசை வேகம் என்ற கருத்துருவை அறிமுகமாக்குவோம்.

A, B என்ற இரண்டு பொருள்கள் ஒற்றைப் பருமானத்தில் (xஅச்சில் என்க) v_A, v_B என்ற ஒள சீரான சராசரித்திசைவேகங்களுடன் அசைவதை கருதுக. (வேறுவிதமாக சொல்லாவிட்டால், இந்த படலத்தில் குறிப்பிடும் எல்லா திசைவேகங்களும் தரையின் நோக்கீட்டில் அளவிடப் பட்டவை.) $x_A(0)$, $x_B(0)$ ஆகியவை $t = 0$ நேரத்தில் பொருள்களின் இடநிலைகள் எனில், t என்ற நேரத்தில் அவற்றின் இடநிலைகள்

$$x_A(t) = x_A(0) + v_A\,t, \qquad x_B(t) = x_B(0) + v_B\,t \tag{3.12}$$

அப்படியெனில், Aயிலிருந்து Bயின் இடநிலை

$$\begin{aligned} x_{BA}(t) &= x_B(t) - x_A(t) \\ &= \big(x_B(0) - x_A(0)\big) \\ &\quad + (v_B - v_A)t \end{aligned} \tag{3.13}$$

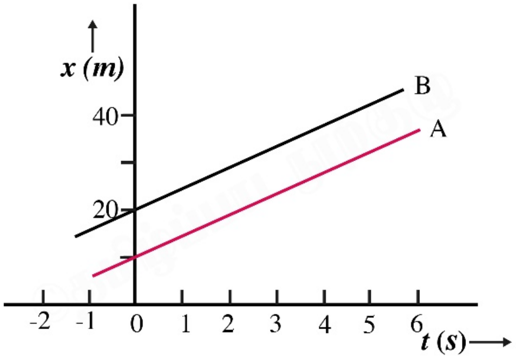
இந்த சமன்பாட்டை பொருளுணர்வது எளிது. இது Aயிலிருந்து பார்க்கும்போது Bயின் திசைவேகம் $v_B - v_A$ என்கிறது; ஏனெனில், Aயிலிருந்து Bயின் இடநிலை ஒவ்வொரு நேர அலகிலும் $v_B - v_A$ என்ற அளவில் மாறுகிறது. இதை நாம் Aயின் ஒப்பளவில் B யின் திசைவேகம் $v_B - v_A$ என்கிறோம். இதைப்போலவே Bயின் ஒப்பளவில் Aயின் திசைவேகம் $v_A - v_B$.

$$v_{BA} = v_B - v_A, \qquad v_{AB} = v_A - v_B \tag{3.14}$$

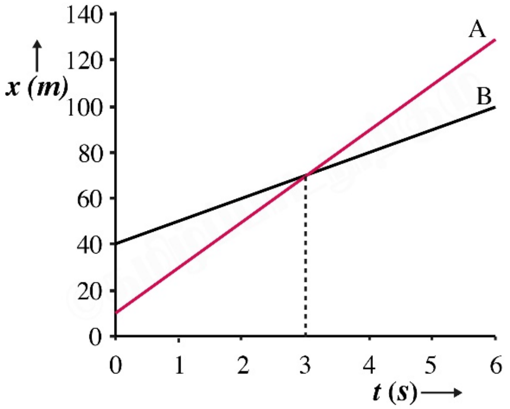
இதிலிருந்து $v_{BA} = -v_{AB}$ என்று காண்கிறோம்.

இப்போது சில தனித்துவ வேற்றுவங்களை காணலாம்.

(அ) $v_B = v_A$ எனில், $v_B - v_A = 0$. அப்போது, (3.13) ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து $x_B(t) - x_A(t) = x_B(0) - x_A(0)$. எனவே, இரண்டு பொருள்களும் ஒன்றிலிருந்து மற்றொன்று $x_B(0) - x_A(0)$ என்ற மாறாத் தொலைவில் உள்ளன. அவற்றின் இடநிலைநேர வரைபடங்கள் படம் 3.16இல் காட்டியபடி இணையான நேர்க்கோடுகள். இந்த வேற்றுவத்தில் v_{AB}, v_{BA} என்ற ஒப்பளவத்திசை வேகங்கள் சுழியம்.

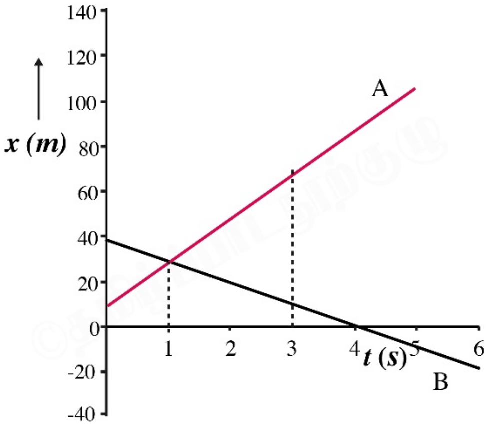


படம் 3.16 சமத்திசைவேகமுள்ள இரண்டு பொருள்களின் இடநிலைநேர வரைபடங்கள்.



படம் 3.17 சமமற்ற திசைவேகங்களுள்ள இரண்டு பொருள்களின் இடநிலைநேர வரைபடங்கள். பிரிகோடு சந்திக்கும் நேரத்தை காட்டுகிறது.

(ஆ) $v_A > v_B$ எனில், $v_B - v_A$ எதிர்மம். ஒரு வரைபடம் மற்றதைவிட அதிக சரிவானது. அவை ஒரு பொதுப்புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. சான்றாக, $v_A = 20\,m\,s^{-1}$, $x_A(0) = 10\,m$, $v_B = 10\,m\,s^{-1}$, $x_B(0) = 40\,m$ என்க. அப்படியெனில், வரைபடங்கள் சந்திக்கும் நேரம் $t = 3\,s$ (படம் 3.17). இந்த நேரத்தில் அவை இரண்டும் $x_A(t) = x_B(t) = 70\,m$ என்ற இடத்தில் இருக்கின்றன. இந்த நேரத்தில் A Bயை முந்துகிறது. இந்த வேற்றுவத்தில் $v_{BA} = 10\,m\,s^{-1} - 20\,m\,s^{-1} = -10\,m\,s^{-1} = -v_{AB}$.



படம் 3.18 எதிரெதிரான திசைவேகங்களுள்ள இரண்டு பொருள்களின் இடநிலைநேர வரைபடங்கள். பிரிகோடு சந்திக்கும் நேரத்தை காட்டுகிறது.

(இ) v_A வும் v_B யும் எதிரெதிர்த்திசையிலுள்ளவை என்க. சான்றாக, மேற்கண்ட சான்றில் A $x_A = 10\ m$இல் தொடங்கி $20\ m\ s^{-1}$ வேகத்தில் அசைவதாகவும், B $x_B = 40\ m$இல் தொடங்கி $-10\ m\ s^{-1}$ வேகத்தில் அசைவதாகவும் கொள்வோம். அப்படியெனில், இரண்டு பொருள்களும் $t = 1\ s$இல் சந்திக்கின்றன (படம் 3.18). A யின் ஒப்பளவில் B யின் திசைவேகம் $v_{BA} = (-10) - (20)\ ms^{-1} = -30\ m\ s^{-1} = -v_{AB}$. இந்த வேற்றுவத்தில் v_{BA} யின் (v_{AB} யின்) பருமனளவு A யின் திசைவேகப்பருமனையும் B யின் திசைவேகப்பருமனையும்விட அதிகம். இந்த பொருள்கள் இரண்டு தொடர்வண்டிகள் எனில், அவற்றுளொன்றில் அமர்ந்திருக்கும் மனிதருக்கு மற்றது அதிவிரைவாக கடப்பதாக தோன்றும்.

$\boldsymbol{v_A}$ வும் $\boldsymbol{v_B}$ யும் உடனடித்திசைவேகங்கள் எனிலும், (3.14) ஆம் சமன்பாடு மெய்யாவதை நோக்குக.

சிக்கல் 3.9

இரண்டு இணையான இருப்புப்பாதைகள் தென்வடக்காக ஓடுகின்றன. A என்ற தொடர்வண்டி $54\ km\ h^{-1}$ வேகத்தில் வடக்குநோக்கியும் B என்ற வண்டி $90\ km\ h^{-1}$ வேகத்தில் தெற்குநோக்கியும் ஓடுகின்றன. (அ) Aயின் ஒப்பளவில் Bயின் திசைவேகம் என்ன? (ஆ) Bயின் ஒப்பளவில் தரையின் திசைவேகம் என்ன? (இ) A யின் கூரையில் அதன் ஓட்டத்துக்கு எதிராக $18\ kn\ h^{-1}$ (வண்டியின் ஒப்பளவில்) ஓடும் ஒரு குரங்கின் திசைவேகத்தை தரையில் நிற்கும் ஒரு மனிதர் என்னவாக காண்பார்?

தீர்வு

தெற்கிலிருந்து வடக்கை நேர்ம xஅச்சாக எடுப்போம். அப்படியெனில்,

$$v_A = +54\ km\ h^{-1} = 15\ m\ s^{-1}$$

$$v_B = -90\ km\ h^{-1} = -25\ m\ s^{-1}$$

(அ) Aயின் ஒப்பளவில் Bயின் திசைவேகம் $= v_B - v_A = -40\ m\ s^{-1}$. அதாவது, A இல் இருப்பவர்களுக்கு B $40\ m\ s^{-1}$ வேகத்தில் தெற்குநோக்கி செல்வதாக தோன்றுகிறது.

(ஆ) தரையின் ஒப்பளவில் B யின் திசைவேகம் $= 0 - v_B = 25\ m\ s^{-1}$.

(இ) தரையின் ஒப்பளவில் குரங்கின் திசைவேகம் $v_{\text{கு}}$ என்க. Aயின் ஒப்பளவில் குரங்கின் திசைவேகம்

$$v_{\text{கு}A} = v_{\text{கு}} - v_A = -18\ km\ h^{-1} = -5\ m\ s^{-1}$$

எனவே, $v_{\text{கு}} = (15 - 5) m\ s^{-1} = 10\ m\ s^{-1}$

சுருக்கவுரை

1. ஒரு பொருளின் இடநிலை நேரத்துடன் மாறினால் அந்த பொருள் *அசைவி*லிருப்பதாக சொல்கிறோம். பொருளின் இடநிலையை குறிக்க வசதியான ஒரு மூலத்தை தேர்ந்தெடுப்பது வழக்கேற்பு. நேர்க்கோட்டசைவில், மூலத்தின் வலப்பக்கமுள்ள இடநிலையை நேர்மமாகவும் இடப்பக்கம் எதிர்மமாகவும் கொள்கிறோம்.
2. பொருள் கடக்கும் பாதையின் மொத்த நீளத்தை *பாதைநீளம்* என்கிறோம்.
3. இடநிலையின் மாற்றம் *இடப்பெயர்ச்சி*. $\Delta x = x_2 - x_1$. பாதைநீளம் அதே புள்ளிகளுக்கிடையான இடப்பெயர்ச்சியின் பருமனளவைவிட அதிகமாகவோ சமமாகவோ இருக்கலாம்.
4. சமநேர இடைவெளிகளில் ஒரு பொருளின் இடப்பெயர்ச்சி சமமாயிருந்தால் அது ஒரு நேர்க்கோட்டில் *சீரான* அசைவிலிருப்பதாக சொல்கிறோம். இல்லாவிட்டால், அசைவு *சீரற்றது*.
5. இடப்பெயர்ச்சியை அது நிகழ ஆகும் நேரத்தால் வகுத்தால் *சராசரித்திசைவேகம்* கிடைக்கிறது.

   $$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

   $x\ t$ வரைபடத்தில் ஒரு நேர இடைவெளியிலுள்ள சராசாரித்திசைவேகம் அந்த இடைவெளியில் தொடக்க இடநிலையையும் இறுதி இடநிலையையும் இணைக்கும் கோட்டின் சாய்மை.
6. பாதைநீளத்தை அதை கடக்க ஆகும் நேரத்தால் வகுத்தால் *சராசரிவேகம்* கிடைக்கிறது. ஒரு பொருளின் சராசரிவேகம் அதே நேர இடைவெளியிலுள்ள இடப்பெயர்ச்சியின் பருமனளவைவிட அதிகமாகவோ அதற்கு சமமாகவோ இருக்கலாம்.

7. நேர இடைவெளி சுழியவெல்லையை நெருங்கும்போது சராசரித்திசைவேகத்தின் எல்லையை *உடனடித்திசைவேகம்* என்று வரையறுக்கிறோம். இதையே வெறுமனே திசைவேகம் என்றும் சொல்கிறோம்.

$$v = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}}\, \overline{v} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் திசைவேகம் இடநிலைநேர வரைபடத்தின் அந்த நேரத்துக்கு நிகரான புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சாய்மைக்கு சமம்.

8. திசைவேகத்தின் மாற்றத்தை அந்த மாற்றத்தின் நேர இடைவெளியால் வகுத்தால் *சராசரிமுடுக்கம்* கிடைக்கிறது.

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

9. நேர இடைவெளி சுழியெல்லையை நெருங்கும்போது சராசரிமுடுக்கத்தின் எல்லையை *உடனடிமுடுக்கம்* என்று வரையறுக்கிறோம்.

$$a = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}}\, \overline{a} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் முடுக்கம் திசைவேகநேர வரைபடத்தின் அந்த நேரத்துக்கு நிகரான புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சாய்மைக்கு சமம். சீரான அசைவுக்கு, முடுக்கம் சுழியம்; எனவே $x\ t$ வரைபடம் ஒரு சரிந்த நேர்க்கோடாகவும் $v\ t$ வரைபடம் நேர அச்சுக்கு இணையான நேர்க்கோடாகவும் இருக்கின்றன. சீரான முடுக்கமுள்ள அசைவுக்கு $x\ t$ வரைபடம் ஒரு பரவளைவு; $v\ t$ வரைபடம் ஒரு சரிந்த நேர்க்கோடு.

10. நேரத்துக்கெதிரான திசைவேகத்தின் வரைபடத்தின்கீழ் t_1, t_2 ஆகிய நேரங்களிடையான பரப்பளவு அந்த நேர இடைவெளியில் பொருளின் இடப்பெயர்ச்சிக்கு சமம்.

11. சீராக முடுக்கமடைந்த நேர்க்கோட்டசைவிலுள்ள பொருள்களுக்கு இடப்பெயர்ச்சி (x), ஆகும் நேரம் (t), தொடக்கத்திசைவேகம் (v_0), இறுதித்திசைவேகம் (v), முடுக்கம் (a) ஆகிய ஐந்து அளவுகளை *அசைவியச் சமன்பாடுகள்* என்ற சில எளிய சமன்பாடுகள் இணைக்கின்றன. $t = 0$ என்ற நேரத்தில் பொருளின் இடநிலை 0 எனில், இந்த சமன்பாடுகள்

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

ஆகியவை. பொருள் $x = x_0$ என்ற இடத்தில் தொடங்கினால், மேற்கண்ட சமன்பாடுகளில் x ஐ $(x - x_0)$த்தால் மாற்றிடவேண்டும்.

இயலளவு	**குறியீடு**	**பருமானங்கள்**	**அலகு**	**குறிப்புரை**
பாதைநீளம்		$[L]$	m	
இடப்பெயர்ச்சி	Δx	$[L]$	m	$x_2 - x_1$ ஒற்றைப்பருமானத்தில் குறி திசைகாட்டுகிறது
திசைவேகம் (அ) சராசரி (ஆ) உடனடி	$\overline{v}$ v	$[LT^{-1}]$	$m\,s^{-1}$	$\frac{\Delta x}{\Delta t}$ $\underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ ஒற்றைப்பருமானத்தில், குறி திசைகாட்டுகிறது
வேகம் (அ) சராசரி (ஆ) உடனடி		$[LT^{-1}]$	$m\,s^{-1}$	$\frac{\text{பாதைநீளம்}}{\text{நேர இடைவெளி}}$ $\frac{dx}{dt}$

முடுக்கம் (அ) சராசரி (ஆ) உடனடி	$\overline{a}$ a	$[LT^{-2}]$	$m\,s^{-2}$	$\frac{\Delta v}{\Delta t}$ எல்லை $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$ ஒற்றைப்**பருமான**த்தில், குறி திசைகாட்டுகிறது

உங்கள் சிந்தனைக்கு

1. ஒரு பொருள் இரண்டு புள்ளிகளிடையில் நடக்கையிடும் பாதைநீளம் பொதுவாக இடப்பெயர்ச்சியின் பருமனளவுக்கு சமமன்று. இடப்பெயர்ச்சி நுனிப்புள்ளிகளை மட்டுமே சார்ந்தது; பாதைநீளம் அதன் பெயர் குறிப்பிடுவதைப்போல் பாதையை சார்ந்தது. பொருள் அசைவின்போது திசைமாறாமலிருந்தால் மட்டுமே இந்த இரண்டு அளவுகளும் சமமாகின்றன. மற்ற வேற்றுவங்களில் பாதைநீளம் இடப்பெயர்ச்சியின் பருமனளவைவிட அதிகமானது.
2. மேற்கண்ட உருப்படியின் நோக்கில், ஒரு குறிப்பிட்ட நேர இடைவெளியில் பொருளின் சராசரிவேகம் திசைவேகத்தின் பருமனளவுக்கு சமமாகவோ அதைவிட அதிகமாகவோ இருக்கிறது. இந்த இரண்டு அளவுகளும் சமமாவது பாதைநீளம் இடப்பெயர்ச்சியின் பருமனளவுக்கு சமமாகும்போதே.
3. அச்சின் மூலமும் நேர்மத்திசையும் நாம் தேர்ந்தெடுப்பவை. இடப்பெயர்ச்சி, திசைவேகம், முடுக்கம் போன்ற அளவுகளுக்கு குறிகளை இடும்முன் இந்த தேர்வுகளை குறிப்பிடவேண்டும்.
4. ஒரு துகள் வேகமெடுத்தால், முடுக்கம் திசைவேகத்தின் திசையிலுள்ளது. அதன் வேகம் குறைந்தால், முடுக்கம் திசைவேகத்தின் எதிர்த்திசையிலுள்ளது. இந்த கூற்று அச்சின் மூலம், திசை ஆகியவற்றின் தேர்வுகளை சாராதது.`
5. முடுக்கத்தின் குறி பொருள் வேகமெடுக்கிறதா வேகங்குறைகிறதா என்று சொல்லவில்லை. முடுக்கத்தின் குறி (மேலே சொன்னபடி) அச்சுக்கான நேர்மத்திசையின் தேர்வை சார்ந்தது. சான்றாக, மேனோக்கிய நெடுநிற்பத்திசையை அச்சின் நேர்மத்திசையாக தேர்ந்தால், புவியீர்ப்பின் முடுக்கம் எதிர்மமானது. துகள் புவியீர்ப்பின்கீழ் விழும்போது இந்த முடுக்கம் எதிர்மமாயினும் வேகத்தை அதிகரிக்கிறது. மேலே எறிந்த துகளுக்கு இதே எதிர்ம முடுக்கம் வேகத்தை குறைக்கிறது.
6. எந்த நேரத்திலும் ஒரு துகளின் சுழியத்திசைவேகம் அந்த நேரத்தில் சுழியமுடுக்கத்தை உள்ளுரைக்கவில்லை. துகள் ஒரு கணத்தில் ஓய்விலிருப்பினும் அது சுழியமற்ற முடுக்கத்தில் இருக்கலாம். சான்றாக, மேலெறிந்த துகளுக்கு அதன் மீப்பெரும உயரத்தில் சுழியத்திசைவேகம் உள்ளது; ஆனால் அந்தப்புள்ளியிலும் முடுக்கம் புவியீர்ப்புமுடுக்கமாயிருப்பது தொடர்கிறது.
7. அசைவின் அசைவியச்சமன்பாடுகளில் (3.11) வெவ்வேறு அளவுகள் குறிக்கணிதமானவை. அதாவது அவை நேர்மமாகவோ எதிர்மமாகவோ இருக்கலாம். இந்த அளவுகளை சரியான குறிகளுடன் சமன்பாடுகளில் மாற்றிடும்போது இந்த சமன்பாடுகள் (ஒற்றைப்**பருமான**த்தில் மாறா முடுக்கமுள்ள அசைவுக்கான) எல்லா நிலைமைகளிலும் சரியானவை.
8. உடனடித்திசைவேகம், உடனடிமுடுக்கம் ஆகியவற்றின் வரையறைகள் ((3.3) ஆம் சமன்பாடும் (3.5) ஆம் சமன்பாடும்) முழுச்சரியானவை; எனவே எப்போதும் சரியானவை. ஆனால் (3.11) ஆம் சமன்பாட்டிலுள்ள அசைவியச்சமன்பாடுகள் முடுக்கத்தின் பருமனளவும் திசையும் அசைவின்போது மாறாமலிருந்தால் மட்டுமே சரியானவை.

பயிற்சிகள்

3.1 கீழ்க்காணும் அசைவின் சான்றுகளுள் எவற்றில் பொருளை தோராயமாக புள்ளிப்பொருளாக கருதலாம்?

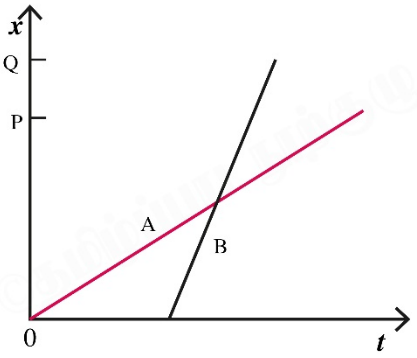
a. இரண்டு நிலையங்களுக்கிடையில் ஆடாமல் செல்லும் ஒரு தொடர்வண்டி

b. ஒரு வட்டத்தடத்தில் ஆடாமல் மிதிவண்டியோட்டும் மனிதரின் தலைமீது அமர்ந்திருக்கும் ஒரு குரங்கு

c. தரையைத்தொட்டதும் கூராகத்திரும்பும் ஒரு சுழலும் மட்டைப்பந்து

d. மேசையின் விளிம்பிலிருந்து தவறிவிழும் கண்ணாடியாலான ஒரு மூக்குக்குடுவை.

3.2 பள்ளியிலிருந்து வீடுதிரும்பும் இரண்டு பிள்ளைகளின் இடநிலைநேர $(x\ t)$ படவரைவுகளை படம் 3.19 காட்டுகிறது. பள்ளி Oவிலும் வீடுகள் முறையே Pயிலும் Qவிலும் இருக்கின்றன. அடைப்புக்குள் இருப்பவற்றுள் சரியானவற்றை தேர்க.



படம் 3.19

a. (A/B)யைவிட (B/A) பள்ளிக்கருகில் வசிக்கிறார்

b. $A/B)$க்குமுன்பு (B/A) பள்ளியிலிருந்து கிளம்புகிறார்

c. (A/B)யைவிட (B/A) விரைவாக நடக்கிறார்

d. A யும் B யும் (ஒரே/வெவ்வேறு) நேரத்தில் வீட்டையடைகின்றனர்

e. (A/B)யை (B/A) (ஒருமுறை/இருமுறை) முந்துகிறார்.

3.3 ஒரு மனிதி தன் வீட்டிலிருந்து காலை $9{:}00$ மணிக்கு கிளம்பி ஒரு நேர்ச்சாலையில் $5\,km\,h^{-1}$ வேகத்தில் $5\,km$ தொலைவிலுள்ள தன் அலுவலகத்தைநோக்கி நடக்கிறாள். மாலை $5{:}\,00$ மணிவரை அலுவலகத்தில் இருந்துவிட்டு ஒரு தானிழுவண்டியில் $25\,km\,h^{-1}$ வேகத்தில் வீடுதிரும்புகிறாள். பொருத்தமான அளவங்களை தேர்ந்து அவளது அசைவின் $x\ t$ வரைபடத்தை வரைக.

3.4 ஒரு குடிகாரன் ஒரு குறுகிய பாதையில் 5 அடி முன்னும் 3 அடி பின்னும், மீண்டும் 5 அடி முன்னும் 3 அடி பின்னும், என்றிவ்வாறே நடக்கிறான். ஒவ்வொரு அடியும் $1\,m$ நீளமானது; அதற்கு $1\,s$ ஆகிறது. இந்த அசைவின் $x\ t$ வரைபடத்தை வரைக. வரைபடத்தாலோ வேறு வழியாலோ தொடங்கிடத்திலிருந்து $13\,m$ தொலைவிலுள்ள ஒரு குழியில் விழ ஆகும் நேரத்தை தீர்மானிக்க.

3.5 $500\,km\,h^{-1}$ வேகத்தில் பறக்கும் ஒரு உமிழவானூர்தி தன் எரிவிளைபொருள்களை வானூர்தியின் ஒப்பளவில் $1500\,km\,h^{-1}$ வேகத்தில் உமிழ்கிறது. தரையிலிருந்து எரிவிளைபொருளின் வேகம் என்ன?

3.6 நேரான நெடுஞ்சாலையில் $126\,km\,h^{-1}$ வேகத்தில் பயணிக்கும் சிற்றுந்து $200\,m$ இல் நிறுத்தப்படுகிறது. சிற்றுந்தின் வேகமிழப்பு (சீரானதாக கொள்க) எவ்வளவு? சிற்றுந்து நிற்க எவ்வளவு நேரம் ஆகிறது?

3.7 ஒவ்வொன்றும் $400\,m$ நீளமான A, B என்ற இரண்டு தொடர்வண்டிகள் இரண்டு இணையான தண்டவாளங்க ளில் $72\,km\,h^{-1}$ என்ற சீரான வேகத்தில் ஒரே திசையில் A முன்னும் B பின்னுமாக ஓடுகின்றன. Bயின் ஓட்டுநர் Aயை முந்துவதாக முடிவெடுத்து $1\,m\,s^{-2}$ முடுக்கமளிக்கிறார். $50\,s$ க்குப்பின் B யின் காப்பாளர் A யின் ஓட்டுநரை கடந்தால் தொடக்கத்தில் இரண்டு வண்டிகளுக்குமிடையில் இருந்த தொலைவு என்ன?

3.8 ஒரு இருபாட்டைச்சாலையில் A என்ற சிற்றுந்து $36\,km\,h^{-1}$ வேகத்தில் ஓடுகிறது. B என்ற சிற்றுந்து அதே திசையிலும் C எதிர்த்திசையிலும் ஒவ்வொன்றும் $54\,km\,h^{-1}$ வேகத்தில் Aயை அணுகுகின்றன. ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் ABயும் ACயும் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகவும் $1\,km$க்கு சமமாகவும் இருக்கும்போது C Aயை அடைவதற்குள் B Aயை முந்திவிட முடிவுசெய்கிறது. விபத்தை தடுக்க Bக்கு தேவையான மீச்சிறும முடுக்கம் என்ன?

3.9 A, B ஆகிய இரண்டு பேரூர்களுக்கிடையில் ஒரு சீரொழுங்கான பேருந்துச்சேவை இருக்கிறது. ஒவ்வொரு திசையிலும் T நிமிடங்களுக்கொருமுறை ஒரு பேருந்து கிளம்புகிறது. Aயிலிருந்து Bக்கான திசையில் மிதிவண்டியில் $20\,km\,h^{-1}$ வேகத்தில் செல்பவர் அவர் செல்லும் திசையில் 18 நிமிடங்களுக்கொருமுறை ஒரு பேருந்து கடப்பதாகவும் எதிர்த்திசையில் 6 நிமிடங்களுக்கொருமுறை ஒரு பேருந்து கடப்பதாகவும் காண்கிறார். பேருந்துச்சேவையின் T என்ற சீரொழுங்குக்காலம் என்ன? பேருந்துகள் சாலையில் பயணிக்கும் வேகம் (மாறிலியாகக்கொள்க) என்ன?

3.10 ஒரு விளையாட்டர் ஒரு பந்தை $29.4\,m\,s^{-1}$ தொடக்கவேகத்துடன் மேனோக்கி எறிகிறார்.

a. பந்தின் மேனோக்கிய பயணத்தின்போது முடுக்கத்தின் திசை என்ன?

b. பந்தின் மீப்பெரும உயரத்தில் அதன் திசைவேகமும் முடுக்கமும் யாவை?

c. பந்து இருக்கும் மீப்பெரும உயரத்தையும் நேரத்தையும் $x = 0$, $t = 0$ என்றும் கீழ்நோக்கிய நெடுநிறப்பத்திசையை x அச்சின் நேர்மத்திசையாகவும் தேர்ந்து, பந்தின் மேனோக்கிய அசைவிலும் கீழ்நோக்கிய அசைவிலும் அதன் இடநிலை, திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றின் குறிகளை தருக.

d. பந்து எவ்வளவு உயரத்துக்கு எழுகிறது? எவ்வளவு நேரத்துக்குப்பின் விளையாட்டரின் கைக்கு வந்துசேர்கிறது? ($g = 9.8\,m\,s^{-2}$ எனக்கொள்க; வளித்தடையத்தை புறக்கணிக்க.)

3.11 கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு கூற்றையும் கவனமாக வாசித்து காரணங்களுடனும் சான்றுகளுடனும் மெய்யா பொய்யா எனக்கூறுக. ஒற்றைப்**பருமான** அசைவிலுள்ள ஒரு துகளுக்கு

a. ஒரு நேரத்தில் சுழிய வேகமும் சுழியமற்ற முடுக்கமும் இருக்கலாம்

b. சுழிய வேகமும் சுழியமற்ற திசைவேகமும் இருக்கலாம்

c. மாறா வேகமிருந்தால் முடுக்கம் சுழியம்

d. முடுக்கம் நேர்மமாயிருந்தால் அது வேகமெடுப்பதாக பொருள்

3.12 ஒரு பந்தை $90\ m$ உயரத்திலிருந்து தரையில் விழவிடுகிறோம். தரையுடன் ஒவ்வொரு மோதலிலும் பந்து தன் வேகத்தில் பத்திலொருபங்கை இழக்கிறது. இந்த அசைவின் வேகநேர வரைபடத்தை $t = 0$த்திலிருந்து $12\ s$வரை வரைக.

3.13 இவற்றுக்கிடையான வேறுபாடுகளை சான்றுகளுடன் தெளிவாக விளக்குக:

a. ஒரு குறிப்பிட்ட நேர இடைவெளியில் இடப்பெயர்ச்சியின் பருமனளவு (சில நேரங்களில் தொலைவு என்கிறோம்), அதே நேர இடைவெளியில் துகள் கடக்கும் பாதையின் மொத்த நீளம்.

b. ஒரு நேர இடைவெளியில் சராசரித்திசைவேகத்தின் பருமனளவு அதே இடைவெளியில் சராசரிவேகம். (ஒரு நேர இடைவெளியில் ஒரு துகளின் சராசரிவேகம் மொத்த பாதைநீளத்தை நேர இடைவெளியால் வகுத்தது என்று வரையறுக்கிறோம்.)

(a), (b) ஆகிய இரண்டிலும் இரண்டாம் அளவு முதலளவைவிட சமமாகவோ அதிகமாகவோ இருக்கவேண்டும் என்று காட்டுக. சமக்குறி எப்போது சரி? (எளிமைக்காக, ஒற்றைப்பருமான அசைவை மட்டும் கருதுக.)

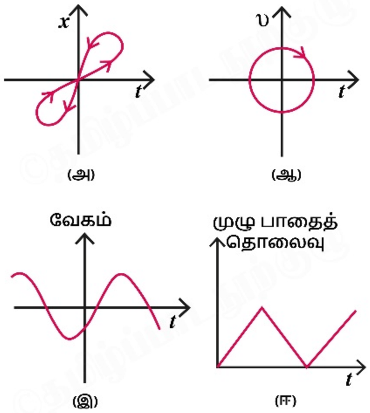
3.14 ஒரு மனிதன் தன் வீட்டிலிருந்து $2.5\ km$ தொலைவிலுள்ள சந்தைக்கு நேர்ச்சாலையில் $5\ km\ h^{-1}$ வேகத்தில் நடக்கிறான். சந்தை மூடியிருப்பதைக்கண்டு உடனே $7.5\ km\ h^{-1}$ வேகத்தில் வீட்டுக்கு திரும்புகிறான்.

a. சராசரித்திசைவேகத்தின் பருமனளவு என்ன?

b. (அ) $0 - 30$ நிமி, (ஆ) $0 - 50$ நிமி, (இ) $0 - 40$ நிமி ஆகிய நேர இடைவெளிகளில் மனிதனின் சராசரிவேகங்கள் யாவை? (குறிப்பு: சராசரிவேகத்தை சராசரித்திசைவேகத்தின் பருமனளவாக வரையறுக்காமல் மொத்த பாதைநீளத்தை நேர இடைவெளியால் வகுத்ததாக வரையறுப்பது ஏன் சிறந்தது என்பதை இந்த சான்றால் புரிந்துகொளைவீர்கள். களைப்புற்ற இந்த மனிதர் வீடுதிரும்பியதும் அவரது சராசரி வேகம் சுழியம் என்பதை கேட்க விரும்பமாட்டார்!)

3.15 மேலுள்ள 3.13ஆம், 3.14ஆம் பயிற்சிகளில் சராசரிவேகத்தை சராசரித்திசைவேகத்தின் பருமனளவிலிருந்து கவனமாக வேறுபடுத்தியிருக்கிறோம். இவ்வாறான வேறுபாடு உடனடிவேகத்துக்கும், உடனடித்திசைவேகத்தின் பருமனளவுக்கும் இடையில் இல்லை. உடனடிவேகம் எப்போதும் உடனடித்திசைவேகத்தின் பருமனளவுக்கு சமம். ஏன்?

3.16 படம் 3.20இலுள்ள (அ)முதல் (ஈ)வரையான வளைவரைகளை கவனமாக பார்த்து, இவற்றுள் எவை ஒரு துகளின் ஒற்றைப்பருமான அசைவை விவரிக்க *இயலாது* என்பதை காரணங்களுடன் உரைக்க.

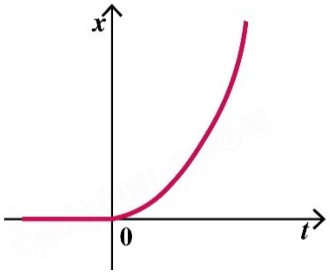


படம் 3.20

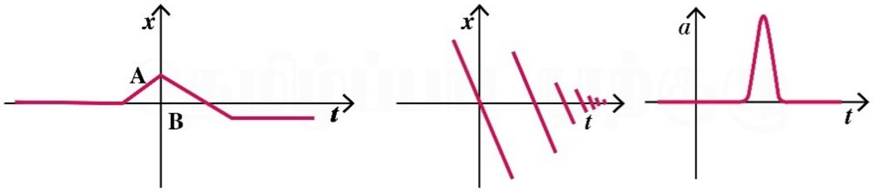
3.17 படம் 3.21 ஒரு துகளின் ஒற்றைப்பருமான அசைவின் $x\ t$ வரைகோட்டை காட்டுகிறது. இந்த வளைவரைவிலிருந்து துகள் $t < 0$இல் நேர்க்கோட்டிலும் $t > 0$இல் பரவளைவிலும் அசைகிறது என்று சொல்வது சரியா? இல்லையெனில், இந்த வரைபடத்துக்கு பொருத்தமான ஒரு சூழமைவை கூறுக.

3.18 ஒரு நெடுஞ்சாலையில் $30\ km\ h^{-1}$ வேகத்தில் அசையும் காவற்றுறைமூடுந்து அதே திசையில் $192\ km\ h^{-1}$ வேகத்தில் தப்பியோடும் திருடனின் சிற்றுந்தில் ஒரு குண்டை எய்கிறது. குண்டின் முகப்புவேகம் $150\ m\ s^{-1}$ எனில், குண்டு திருடனின் சிற்றுந்தில் என்ன வேகத்தில் மோதுகிறது? (குறிப்பு: திருடனின் சிற்றுந்தை பாதிப்பதில் பயன்படும் வேகத்தை கணக்கிடுக.)

3.19 படம் 3.22இலுள்ள ஒவ்வொரு படவரைவுக்கும் பொருத்தமான ஒரு இயல்சூழ்நிலையை கூறுக.



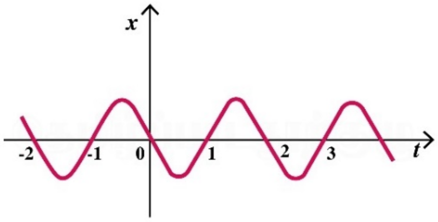
படம் 3.21



(அ) (ஆ) (இ)

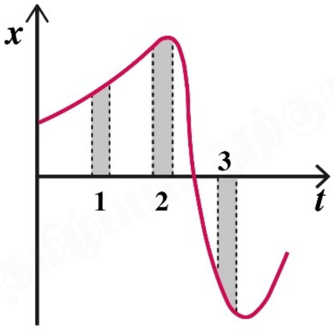
படம் 3.22

3.20 படம் 3.23 ஒற்றைப்பருமானத்தில் எளிய ஒத்திசையசைவை மேற்கொள்ளும் ஒரு துகளின் $x\ t$ வரைகோட்டை தருகிறது. (இந்த அசைவைப்பற்றி 14ஆம் படலத்தில் விரிவாக படிப்பீர்கள்.) $t = 0.3\ s, 1.2\ s, -1.2\ s$ ஆகிய நேரங்களில் துகளின் இடநிலை, திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகிய மாறிகளின் குறிகளை தருக.



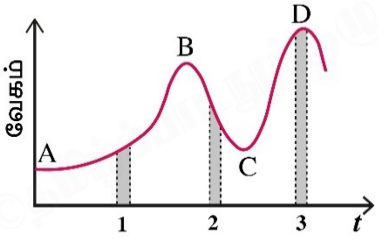
படம் 3.23

3.21 படம் 3.24 ஒற்றைப்பருமான அசைவிலுள்ள ஒரு துகளின் $x\ t$வரைகோட்டை தருகிறது. வெவ்வேறு சமமான மூன்று நேர இடைவெளிகளை இது காட்டுகிறது. எந்த இடைவெளியில் சராசரிவேகம் மீப்பெருமமானது? எந்த இடைவெளியில் மீச்சிறுமமானது? ஒவ்வொரு இடைவெளியிலும் சராசரித்திசைவேகத்தின் குறியை தருக.



படம் 3.24

3.22 படம் 3.25 மாறாத்திசையில் அசையும் ஒரு துகளின் வேகநேர வரைபடத்தை காட்டுகிறது. அதில் மூன்று சமமான நேர இடைவெளிகளையும் காட்டுகிறது. எந்த இடைவெளியில் சராசரிமுடுக்கம் மீப்பெரும பருமனளவுள்ளது? எந்த இடைவெளியில் சராசரிவேகம் மீப்பெருமமானது? அசைவின் மாறாத்திசையை நேர்மத்திசையாக கொண்டு, மூன்று இடைவெளிகளிலும் v, a ஆகியவற்றின் குறிகளை தருக. A, B, C, D ஆகிய புள்ளிகளில் முடுக்கங்கள் யாவை?



படம் 3.25

மேலும் பயிற்சிகள்

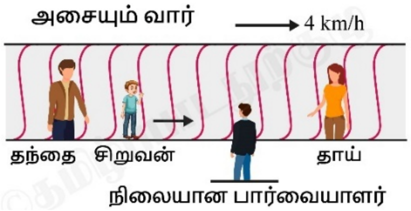
3.23 ஒரு மூவுருளி ஓய்விலிருந்து தொடங்கி ஒரு நேர்ச்சாலையில் $10\ s$க்கு $1\ m\ s^{-2}$ முடுக்கமடைந்து பிறகு சீரான திசைவேகத்தில் அசைகிறது. ஊர்தி nஆம் நொடியில் கடக்கும் தொலைவை nக்கு எதிராக வரைக. முடுக்கமுற்ற அசைவின்போது இந்த வரைகோடு எவ்வாறிருக்கும் என்று எதிர்பார்க்கிறீர், நேர்க்கோடா பரவளைவா?

3.24 நிலையான ஒரு தூக்கியில் (மேலே திறந்தது) நின்றிருக்கும் ஒரு பையன் ஒரு பந்தை அவனால் இயன்ற மீப்பெரும திசைவேகமான $49\ m\ s^{-1}$ இல் மேனோக்கி எறிகிறான். பந்து மீண்டும் அவன்கையை வந்தடைய எவ்வளவு நேரம் ஆகும்? தூக்கி $5\ m\ s^{-1}$ சீரான வேகத்துடன் மேலே அசையும்போது பையன் அவனால் இயன்ற மீப்பெரும திசைவேகத்தில் பந்தை மேனோக்கி எறிந்தால் அப்போது பந்து அவன்கையை வந்தடைய எவ்வளவு நேரமாகும்?

3.25 கிடைமட்டமாக அசையும் ஒரு நீண்ட வாரில் (படம் 3.26) ஒரு சிறுவன் $50\ m$ இடைவெளியில் நிற்கும் தாய்க்கும் தந்தைக்குமிடையில் முன்னும் பின்னுமாக $9\ km\ h^{-1}$ வேகத்தில் (வாரின் ஒப்பளவில்) ஓடுகிறான். வார் $4\ km\ h^{-1}$ வேகத்தில் அசைகிறது. நிலையான நடைமேடையில் நிற்கும் ஒருவருக்கு

a. வார் அசையும் திசையில் சிறுவன் ஓடும் வேகம் என்ன?

b. வார் அசைவதற்கு எதிர்த்திசையில் சிறுவன் ஓடும் வேகம் என்ன?

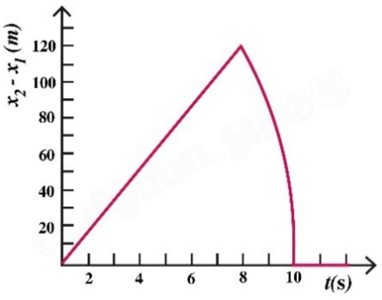


படம் 3.26

c. (a)யிலும் (b)யிலும் சிறுவன் எடுக்கும் நேரம் என்ன?

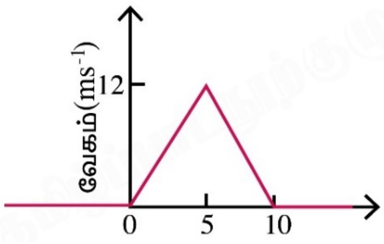
அசைவை பெற்றோரில் ஒருவர் பார்க்கும்போது எந்தெந்த விடைகள் மாறுகின்றன?

3.26 இரண்டு கற்களை $200\,m$ உயரமான ஒரு மலைவிளிம்பிலிருந்து முறையே $15\,m\,s^{-1}$, $30\,m\,s^{-1}$ தொடக்கவேகங்களில் ஒரே நேரத்தில் மேனோக்கி எறிகிறோம். முதற்கல்லைப்பொறுத்து இரண்டாங்கல்லின் ஒப்பளவ இடநிலை நேரத்துடன் மாறுவதை படம் 3.27சரியாக குறிக்கிறது என்பதை சரிபார்க்க. வளித்தடையத்தை புறக்கணித்து கற்கள் தரையில் மோதியதும் பின்றெறிக்கவில்லை எனக்கொள்க. $g = 10\,m\,s^{-2}$ எனக்கொள்க. வரைகோட்டின் நேரான பகுதிக்கும் வளைந்த பகுதிக்குமான சமன்பாடுகளை தருக.



படம் 3.27

3.27 மாறாத்திசையில் அசையும் ஒரு துகளின் வேகநேர வரைபடத்தை படம் 3.28 காட்டுகிறது. (அ) $t = 0\,s$ இலிருந்து $10\,s$ வரை (ஆ) $t = 2\,s$ இலிருந்து $6\,s$ வரை ஆகிய இடைவெளிகளில் துகள் கடக்கும் தொலைவுகளை பெறுக. இந்த இரண்டு இடைவெளிகளிலும் துகளின் சராசரிவேகங்கள் யாவை?



படம் 3.28

3.28 படம் 3.29 ஒற்றைப்பருமானத்தில் அசையும் ஒரு துகளின் திசைவேகநேர வரைபடத்தை காட்டுகிறது. கீழ்க்காணும் வாய்ப்பாடுகளுள் எவை t_1 இலிருந்து t_2 வரையான இடைவெளியில் துகளின் அசைவை சரியாக விவரிக்கின்றன?

a. $x(t_2) = x(t_1) + v(t_1)(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a\,(t_2 - t_1)^2$

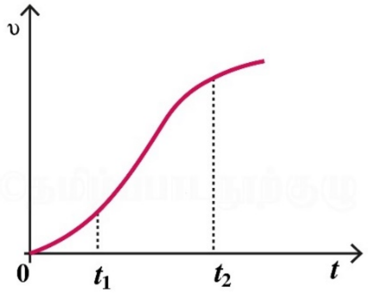
b. $v(t_2) = v(t_1) + a\,(t_2 - t_1)$

c. $v_{\text{சராசரி}} = \big(x(t_2) - x(t_1)\big)/(t_2 - t_1)$

d. $a_{\text{சராசரி}} = \big(v(t_2) - v(t_1)\big)/(t_2 - t_1)$

e. $x(t_2) = x(t_1) + v_{\text{சராசரி}}(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a_{\text{சராசரி}}(t_2 - t_1)^2$

f. $x(t_2) - x(t_1) = (v\ t$ வளைவரையின்கீழ் புள்ளியிட்ட கோடுகளும் xஅச்சும் வரப்பிடும் பரப்பளவு)



படம் 3.29

பிற்சேர்க்கை 3.1 நுண்கணிதத்தின் அடிப்படை

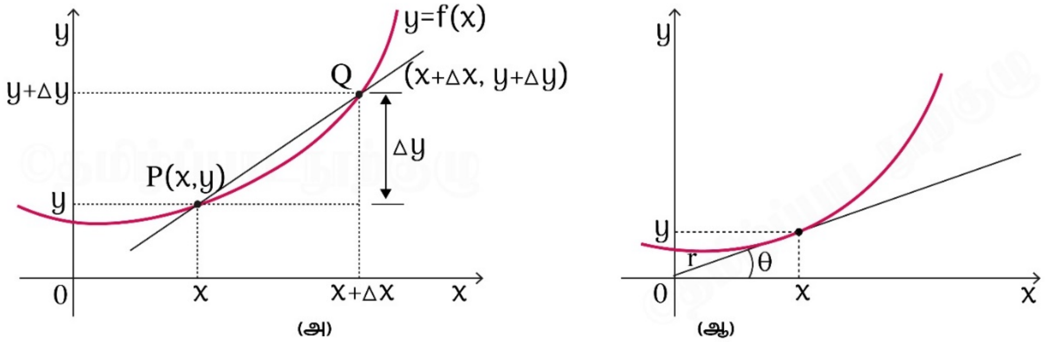
வகையீட்டு நுண்கணிதம்

வகையீட்டுக்கெழு என்ற கருத்துருவை பயன்படுத்தி திசைவேகத்தையும் முடுக்கத்தையும் எளிதில் வரையறுக்கலாம். வகையீட்டைப் பற்றி கணிதத்தில் நீங்கள் விவரமாக படிப்பீர்கள்; எனினும் அசைவில் இடம்பெறும் இயலளவுகளை விவரிப்பதில் இந்த கருத்துருவின் பயன்பாட்டை எளிதாக்க அதை இந்த பிற்சேர்க்கையில் சுருக்கமாக அறிமுகமாக்குகிறோம்.

y என்ற அளவு x என்ற ஒற்றைமாறியை சார்ந்திருப்பதாகவும் இந்த உறவை yஐ xஇன் சார்பனாக வரையறுக்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட சமன்பாடு விவரிப்பதாகவும் கொள்வோம். இதை

$$y = f(x) \qquad (3.15)$$

என்று குறிக்கிறோம். இந்த உறவை மனங்காண xஐயும் yயையும் காருட்டீசிய ஒருங்களவுகளாக கருதி $y = f(x)$ என்ற சார்பனின் வரைபடத்தை படம் 3.30(அ)வில் காணும்படி வரைகிறோம்.



(அ) (ஆ)

படம் 3.30

$y = f(x)$ என்ற வளைவரையிலுள்ள (x, y) ஒருங்களவுகளுள்ள P என்ற புள்ளியையும் $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ ஒருங்களவுகளுள்ள Q என்ற புள்ளியையும் கருதுக. Pயையும் Qவையும் இணைக்கும் கோட்டின் சாய்மையை

$$\text{தொவி}\,\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y + \Delta y\,) - y}{\Delta x} \qquad (3.16)$$

தருகிறது. இப்போது Q வளைவரையின்வழியாக P யைநோக்கி அசைகிறது என்க. இந்த நிகழ்வின் போது Δx உம் Δy உம் குறைந்து சுழியத்தை நெருங்குகின்றன; ஆனால் அவற்றின் விகிதம் சுழியமாக வேண்டியதில்லை. $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ என்ற எல்லையில் PQ என்ற கோட்டுக்கு என்னாகிறது? படம் 3.30(ஆ)வில் இந்த கோடு Pயில் வளைவரையின் தொடுகோடாவதை காண்கிறோம். அதாவது தொவி θ Pயில் தொடுகோட்டின் சாய்மையை அணுகுகிறது. இந்த சாய்மையை m என்று குறிக்கிறோம்.

$$m = \underset{\Delta x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{(y + \Delta y) - y}{\Delta x} \qquad (3.17)$$

Δx சுழியத்தை அணுகும்போது $\Delta y/\Delta x$ என்ற விகிதத்தின் எல்லையை xஐப்பொறுத்து yயின் வகைக்கெழு என்று அழைத்து அதை dy/dx என்று குறிக்கிறோம். இது (x, y) என்ற புள்ளியில் $y = f(x)$ என்ற வளைவரையின் தொடுகோட்டின் சாய்மையை காட்டுகிறது.

$y = f(x)$, $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ என்பதால், வகைக்கெழுவின் வரையறையை

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{எல்லை}} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$$

என்று எழுதலாம். சார்பன்களின் வகைக்கெழுக்கான சில வாய்ப்பாடுகளை கீழே தருகிறோம். இவற்றில் $u(x)$ உம் $v(x)$ உம் x இன் குறிப்பற்ற சார்பன்கள்; a xஐ சாராத மாறிலி. சில வழக்கமான சார்பன்களின் வகைக்கெழுக்களும் இடம்பெறுகின்றன.

$$\frac{d(au)}{dx} = a\frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}.\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{1}{v^2}\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right)$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{du}{dx}\bigg/\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{வவி}\, x) = \text{உவவி}\, x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{உவவி}\, x) = -\,\text{வவி}\, x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{தொவி}\, x) = \text{வெவி}^2\, x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{உதொவி}\, x) = -\,\text{உவெவி}^2\, x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{வெவி } x) = \text{தொவி } x \text{ வெவி } x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{உவெவி } x) = -\text{உதொவி } x \text{ உவெவி } x$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{மட } x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^x$$

வகைக்கெழுக்களின்வழி உடனடித்திசைவேகத்தையும் உடனடிமுடுக்கத்தையும்

$$v = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

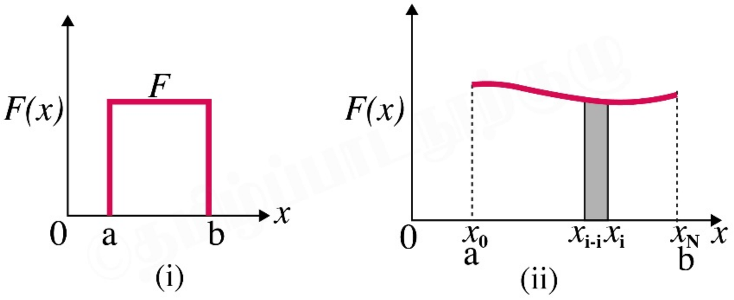
$$a = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

என்று வரையறுக்கிறோம்.

தொகையீட்டு நுண்கணிதம்

பரப்பளவைப்பற்றி நாம் அறிவோம். எளிய வடிவங்களின் பரப்பளவுகளுக்கான வாய்ப்பாடுகளையும் அறிவோம். சான்றாக, செவ்வகத்தின் பரப்பளவு நீளம், அகலம் ஆகியவற்றின் பெருக்கல்; முக்கோணத்தின் பரப்பளவு அடியையும் உயரத்தையும் பெருக்கியதில் பாதி. ஆனால் ஒழுங்கற்ற வடிவத்தின் பரப்பளவை எவ்வாறு காண்பது? இவ்வாறான சிக்கல்களுடன் தொகையீடு என்ற கணிதக்கருத்துரு தொடர்புடையது.

ஒரு திண்ணுருவ சான்றை எடுப்போம். ஒரு துகளின் xஅச்சுக்கு நேரான அசைவின்போது $x = a$இலிருந்து $x = b$வரை துகளின்மீது ஒரு மாறும் விசையான $f(x)$ செயலாற்றுகிறது என்க. இந்த அசைவின்போது துகளின்மீது செயலாற்றும் இந்த விசை செய்யும் வேலையை தீர்மானிப்பது நம் சிக்கல். இந்த சிக்கலை 6ஆம் படலத்தில் இல் விரிவாக உரையளிப்போம்.



படம் 3.31

படம் 3.31 x உடன் $f(x)$ மாறுவதை காட்டுகிறது. விசை மாறிலியாயிருந்தால், படம் 3.31(அ)வில் காட்டியபடி, வேலை $F(b-a)$ என்ற பரப்பளவாயிருக்கும். ஆனால் பொதுவ வேற்றுவத்தில் விசை மாறுகிறது.

படம் 3.31(ஆ)விலுள்ள வளைவரையின் கீழுள்ள பரப்பளவை கணக்கிட கீழ்க்காணும் உத்தியை கையாள்வோம். x அச்சின் a யிலிருந்து b வரையான இடைவெளியை பேரெண்ணிக்கையான சிறு இடைவெளிகளாக பிரித்துக்கொள்வோம். அதாவது, $x_0(=a)$ இலிருந்து x_1 வரை, x_1 இலிருந்து x_2 வரை, இவ்வாறே x_{N-1}இலிருந்து $x_N(=b)$வரை என்ற N சிறு இடைவெளிகளாக பிரிக்கிறோம். இவ்வாறு வளைவரையின்கீழுள்ள பரப்பை N சிறு துண்டுகளாக பிரிக்கிறோம். ஒவ்வொரு துண்டும் தோராயமாக ஒரு செவ்வகம்; ஏனெனில், ஒவ்வொரு துண்டிலும் $F(x)$ இன் மாற்றம் புறக்கணிக்கத்தக்கது. அப்படியெனில், படம் 3.31(ஆ)வில் காட்டிய iஆம் துண்டின் பரப்பளவு தோராயமாக

$$\Delta A_i = F(x_i)(x_i - x_{i-1}) = F(x_i)\Delta x_i$$

இங்கு Δx துண்டின் அகலம்; எல்லாத்துண்டுகளையும் ஒரே அகலமுள்ளவையாக எடுக்கிறோம்.

மேற்கண்ட கோவையில் $F(x_i)$ஐ இடுவதற்குப்பதிலாக $F(x_{i-1})$ ஐயோ $F(x_i)$ க்கும் $F(x_{i-1})$ க்குமான சராசரியையோ ஏன் இடவில்லை என்று நீங்கள் கேட்கலாம். N மிகப்பேரெண்ணாகும் எல்லையில் $(N \to \infty)$ $F(x_i)$ க்கும் $F(x_{i-1})$ க்குமுள்ள வேறுபாடு சுழியமாகும்வகையில் மிகச்சிறிது. இப்போது, வளைவரையின்கீழ் மொத்தப்பரப்பளவு

$$A = \sum_{i=1}^{N} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{N} F(x_i)\Delta x$$

இந்த கூட்டலின் $N -> \infty$ என்ற எல்லையை a முதல் b வரையான x இன்மீது $F(x)$ இன் தொகையீடு என்கிறோம். இதை கீழ்க்காணும் தனித்துவக் குறியீட்டில் எழுதுகிறோம்.

$$A = \int_a^b F(x)dx = \underset{\Delta x \to 0}{\text{எல்லை}} \sum_{i=1}^{N} F(x_i)\Delta x$$

மிகவும் முக்கியமான கணிதவுண்மை என்னவென்றால், தொகையீடு வகையீட்டின் புரட்டு. $f(x)$ என்ற சார்பனின் வகையீடு $g(x)$ என்க. அதாவது

$$f(x) = \frac{dg(x)}{dx}$$

அப்படியெனில், $g(x)$ என்ற சார்பனை $f(x)$இன் முற்றாத தொகையீடு என்கிறோம். அதை

$$g(x) = \int f(x)dx$$

என்று குறிக்கிறோம். உயரெல்லையும் தாழெல்லையுமுள்ள தொகையீட்டை முற்றிய தொகையீடு என்கிறோம். இது ஒரு எண். முற்றாத தொகையீடுகளுக்கு எல்லைகள் இல்லை. அது ஒரு சார்பன்.

கணிதத்தின் ஒரு அடிப்படைத்தேற்றம்

$$\int_a^b f(x)dx = g(x)|_a^b \equiv g(b) - g(a)$$

என்று உரைக்கிறது.

ஒரு சான்றாக, $f(x) = x^2$ என்க. இந்த சார்பனின் $x = 1$இலிருந்து $x = 2$வரையான முற்றிய தொகையீட்டை தீர்மானிக்க விரும்புகிறோம். இதற்காக $f(x) = x^2$ என்பது எந்த சார்பனின் வகையீடு என்று நாம் காணவேண்டும். சற்று சிந்திக்கும்போது $g(x) = x^3/3$ என்ற சார்பனை வகையிடும்போது $f(x) = x^2$ கிடைப்பதை அறிகிறோம். எனவே

$$\int_1^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

ஒரு முற்றிய தொகையீட்டை மதிப்பறிய நிகரான முற்றாத தொகையீட்டை நாம் அறியவேண்டும் என்பது தெளிவு. பரவலாக பயன்படும் சில முற்றாத தொகையீடுகள்:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \text{மட}\, x, \qquad (x > 0)$$

$$\int \text{வவி}\, x \ dx = -\,\text{உவவி}\, x$$

$$\int \text{உவவி}\, x \ dx = \text{வவி}\, x$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

வகையீட்டு நுண்கணிதத்துக்கும் தொகையீட்டு நுண்கணிதத்துக்குமான இந்த அறிமுகம் இறுக்கமானதன்று. நுண்கணிதத்தின் அடிப்படையான சில கருத்துவங்களை தெரிவிப்பதே இதன் நோக்கம்.