படலம் 4

தளத்தில் அசைவு

4.1 அறிமுகம்
4.2 திசையிலிகளும் திசையன்களும்
4.3 திசையன்களை மெய்யெண்களால் பெருக்குதல்
4.4. திசையன்களின் கூட்டலுக்கும் கழித்தலுக்குமான வரைபடமுறை
4.5 திசையன்களை அகைபிரித்தல்
5.6 திசையன்கூட்டலுக்கான பகுப்பாய்வுமுறை
4.7 தளத்தில் அசைவு
4.8 தளத்தில் மாறா முடுக்கமுள்ள அசைவு
4.9 இருபருமானத்தில் ஒப்பளவத்திசைவேகம்
4.10 எறிவியசைவு
4.11 சீரான வட்டப்பாதையசைவு
சுருக்கவுரை
உங்கள் சிந்தனைக்கு
பயிற்சிகள்
மேலும் பயிற்சிகள்

4.1 அறிமுகம்

சென்ற படலத்தில் ஒரு பொருளின் நேர்க்கோட்டசைவை விவரிக்க தேவையான இடநிலை, இடப்பெயர்ச்சி, திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகிய கருத்துருகளை வளராக்கினோம். இந்த அளவுகளின் திசையப்பண்பை +, – என்ற கணிதக்குறிகளால் குறிக்கலாம் என்று கண்டோம்; ஏனெனில் ஒற்றைப்பருமானத்தில் இரண்டு திசைகளே சாத்தியம். ஆனால் இருபருமானத்திலோ (தளத்தில்) முப்பருமானத்திலோ (வெளியில்) ஒரு பொருளின் அசைவை விவரிக்க மேற்சொன்ன இயலளவைகளை திசையன்களால் குறிக்க வேண்டும். எனவே, முதலில் நாம் திசையன்களைப் பற்றி அறிவோம். திசையன் என்பது என்ன? திசையன்களை கூட்டுவதும் கழிப்பதும் பெருக்குவதும் எவ்வாறு? ஒரு திசையனை மெய்யெண்ணால் பெருக்குவதன் விளைவு என்ன? இவற்றையெல்லாம் நாம் படித்தபின், தளத்தில் திசைவேகத்தையும் முடுக்கத்தையும் வரையறுக்கவியலும். அதன் பின் தளத்தில் ஒரு பொருளின் அசைவைப்பற்றி உரையாடலாம். தளத்தசைவின் ஒரு எளிய வேற்றுவமாக, மாறா முடுக்கமுள்ள அசைவை உரையாடி, எறிவத்தின் அசைவை விரிவாக காண்போம். நமக்கு பழக்கமான அசைவுவகையான வட்டப்பாதையசைவு அன்றாட வாழ்வில் தனித்துவ முக்கியமானது. சீரான வட்டப் பாதையசைவை சற்று விவரமாக உரையாடுவோம்.

தளத்தில் அசைவுக்காக இந்தப்படலத்தில் வளராக்கும் சமன்பாடுகளை முப்பருமானத்துக்கு எளிதில் நீட்டலாம்.

4.2 திசையிலிகளும் திசையன்களும்

இயற்பியலில், அளவுகளை திசையன்களாகவும் திசையிலிகளாகவும் பாகுபடுத்தலாம். திசையனுடன் தொடர்புள்ள ஒரு **திசை** இருப்பதும் திசையிலியில் திசை இல்லாததுமே அடிப்படையான வேறுபாடு. திசையிலி என்பது பருமனளவு மட்டுமே உள்ள ஒரு அளவு. இதை ஒரு எண்ணால் (தகுந்த அலகில்) முற்றிலும்

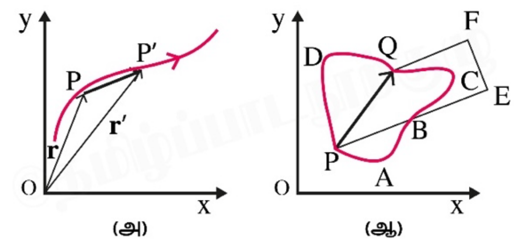
குறித்துவிடலாம். இரண்டு புள்ளிகளிடையான தொலைவு, ஒரு பொருளின் நிறை, ஒரு பொருளின் வெப்பநிலை, ஒரு நிகழ்வு நிகழும் நேரம் ஆகியவை சான்றுகள். திசையிலிகளை சேர்ப்பதற்கான விதிகள் இயல்பான இயற் கணித விதிகளே. அதாவது, எண்களைப் போலவே திசையிலிகளை கூட்டலாம்; கழிக்கலாம்; பெருக்கலாம்; வகுக்கலாம் [1]. சான்றாக, ஒரு செவ்வகத்தின் நீளமும் அகலமும் முறையே $1.0\,m$, $0.5\,m$ எனில், அதன் சுற்றளவு அதன் நான்கு பக்கங்களின் நீளங்களின் கூட்டல் அதாவது, $1.0\,m + 0.5\,m + 1.0\,m + 0.5\,m = 3.0\,m$. ஒவ்வொரு பக்கத்தின் நீளமும் ஒரு திசையிலி; சுற்றளவும் திசையிலி. மற்றொரு சான்றை எடுத்துக்கொள்வோம். ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் மீப்பெரும வெப்பநிலையும் மீச்சிறும வெப்பநிலையும் முறையே $35.6\,°C$, $24.2\,°C$. அப்படியெனில், இந்த இரண்டு வெப்பநிலைக ளிடையான வேறுபாடு $11.4\,°C$. இதைப் போலவே, $10\ cm$ பக்கமுள்ள ஒரு சீரான திண்ம அலுமினிய கனச்சதுரத்தின் நிறை $2.7\ kg$ எனில், அதன் பருமன் $10^{-3}\ m^3$ (திசையிலி); அதன் அடர்வு $2.7 \times 10^3\ kg\ m^{-3}$ (திசையிலி).

திசையன் என்பது பருமனளவும் திசையுமுள்ள ஒரு அளவு; அது **கூட்டலின் முக்கோணவிதி**யை பின்பற்றுகிறது; இந்த விதிக்கு, **கூட்டலின் இணைகரவிதி** சமானம். எனவே ஒரு திசையனை குறிக்க அதன் பருமனளவை ஒரு எண்ணாலும் அதன் திசையையும் குறிக்கவேண்டும். இடப்பெயர்ச்சி, திசைவேகம், முடுக்கம், விசை ஆகியவை திசையன்களால் குறிக்கவேண்டிய சில இயலளவுகள்.

ஒரு திசையனை இந்த நூலில் தடித்த எழுத்தால் குறிக்கிறோம். திசைவேகத்திசை யனை $\boldsymbol{v}$ என்று குறிக்கிறோம். ஒரு திசையனின் பருமனளவை பலநேரங்களில் அதன் மட்டுமதிப்பு என்கிறோம்; அதை $|\boldsymbol{v}| = v$ என்று குறிக்கிறோம். சான்றாக, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ ஆகியவை திசையன்கள்; முறையே A, a, p, q, r, x, y, z ஆகியவை அவற்றின் மட்டு மதிப்புகள்.

4.2.1 இடநிலைத்திசையனும் இடப்பெயர்ச்சித்திசையனும்

தளத்தில் அசையும் ஒரு பொருளின் இடநிலையை விவரிக்க ஒரு வசதியான புள்ளியை (O என்க) மூலமாக எடுக்கவேண்டும். t, t' ஆகிய நேரங்களில் பொருளின் இடநிலை முறையே P, P' என்க (படம் 4.1(அ)). O வையும் P யையும் ஒரு நேர்க்கோட்டால் இணைக்கிறோம். அப்படியெனில், t என்ற நேரத்தில் பொருளின் இடநிலை $\boldsymbol{OP}$. இதை $\boldsymbol{r}$ என்றும் குறிக்கிறோம். அதாவது, $\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{r}$. திசையனின் பருமனளவை கோட்டின் நீளம் குறிக்கிறது. அதாவது, $OP = r$. அதன் திசை மூலத்திலிருந்து P என்ற புள்ளியைநோக்கி இருக்கிறது. இதை கோட்டின்மீது ஒரு அம்புத்தலையால் காட்டுகிறோம். இவ்வாறே, P' ஐ $\boldsymbol{OP'} = \boldsymbol{r'}$ என்ற இடநிலைத்திசையனால் குறிக்கிறோம். பொருள் Pயிலிருந்து P'க்கு நகர்ந்தால், $\boldsymbol{PP'}$ என்ற திசையனை **இடப்பெயர்ச்சித்திசையன்** என்கிறோம். இந்த இடப்பெயர்ச்சித்திசையன் பொருள் t என்ற நேரத்தில் P என்ற இடத்திலும் t'இல் P'இலும் இருப்பதை குறிக்கிறது.



படம் 4.1 (அ) இடநிலைத்திசையனும் திசைவேகத்திசையனும். (ஆ) PQ என்ற இடநிலைத்திசையனும் அசைவின் வெவ்வேறு பாதைகளும்.

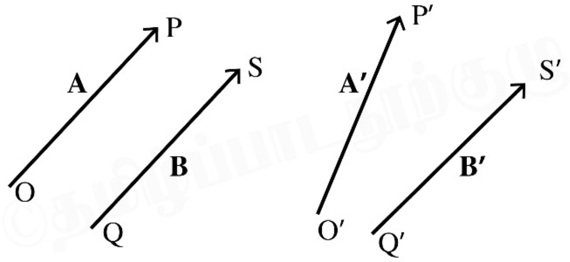
இடப்பெயர்ச்சித்திசையன் தொடக்க இடநிலையையும் இறுதி இடநிலையையும் இணைக்கும் ஒரு நேர்க்கோடு என்பது முக்கியம். அது பொருள் உண்மையில் இந்த இரண்டு இடங்களிடையில் பயணிக்கும் பாதையை சார்ந்திருக்கவில்லை. சான்றாக, படம் 4.1(ஆ)இல் தொடக்கப்புள்ளி P யாகவும் இறுதிப்புள்ளி Q வாகவும் இருக்கும்போது, $PABCQ$, $PBEFQ$ போன்ற வெவ்வேறு பயணப்பாதைகளுக்கு இடப்பெயர்ச்சித்திசையன் $\boldsymbol{PQ}$ என்ற ஒன்றே. எனவே, **இரண்டு புள்ளிகளிடையான இடப்பெயர்ச்சியின் பருமனளவு பொருளின் பாதைநீளத்துக்கு சமமாகவோ குறைவாகவோ இருக்கலாம்**. இந்த உண்மையை முந்தைய பாடத்தில் நேர்க்கோட்டசைவை உரையாடும்போதும் வலியுறுத்தினோம்.

4.2.2 திசையன்களின் சமன்மை

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ என்ற இரண்டு திசையன்கள் சமம் எனிலும் எனில் மட்டுமேயும் அவற்றுக்கு சமமான பருமனளவும் ஒரே திசையும் இருக்கின்றன.[2]

[1] கூட்டலும் கழித்தலும் ஒரே அலகுள்ள திசையிலிகளுக்கே பொருளுடையவை. ஆனால் வெவ்வேறு அலகுகளுள்ள திசையிலிகளை பெருக்கவோ வகுக்கவோ செய்யலாம்.

[2] நம் பாடங்களில் திசையன்களுக்கு நிலையான இருப்பிடங்கள் இல்லை. எனவே ஒரு திசையனை அதன் திசையை மாற்றாமல் நகர்த்துவது திசையனை மாற்றவில்லை. இவ்வாறான திசையன்களை கட்டற்ற



(அ) (ஆ)

படம் 4.2 (அ) A, B என்ற இரண்டு சமமான திசையன்கள். (ஆ) A', B' என்ற திசையன்களின் நீளங்கள் சமமாயினும் அவை சமமற்ற திசையன்கள்.

படம் 4.2(அ) $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ என்ற இரண்டு சமமான திசையன்களை காட்டுகிறது. இவற்றின் சமத்துவத்தை நாம் எளிதில் சரிபார்க்கலாம். $\boldsymbol{B}$யை அதற்கே இணையாக அதன் வால் $\boldsymbol{A}$யின் வாலுடன் பொருந்தும்படி நகர்த்துவோம். அதாவது Q Oவுடன் பொருந்துகிறது. அப்போது அவற்றின் நுனிகளான Sஉம் Pயும் பொருந்துவதால் அவை சமநீளமானவை. $\boldsymbol{B}$யை $\boldsymbol{A}$க்கு நகர்த்தும்போது திசையும் மாறவில்லை. எனவே இரண்டு திசையன்களும் சமம். பொதுவாக சமத்துவத்தை $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ என்றவாறு சமக்குறியால் குறிக்கிறோம். படம் 4.2(ஆ)வில் $\boldsymbol{A}'$ உம் $\boldsymbol{B}'$ உம் சமநீள மாயிருப்பினும் அவை வெவ்வேறு திசைகளில் இருப்பதால் அவை சமமல்ல. $\boldsymbol{B}'$ ஐ அதற்கே இணையாக இருக்கும்படியும் அதன் வாலான Q' $\boldsymbol{A}'$ இன் வாலான O' உடன் பொருந்தும்படியும் நகர்த்தினாலும், $\boldsymbol{B}'$இன் நுனியான S' $\boldsymbol{A}'$இன் நுனியான P' உடன் பொருந்தவில்லை. இதனால் இவை வெவ்வேறு திசைகளில் இருக்கின்றன.

4.3 திசையன்களை மெய்யெண்களால் பெருக்குதல்

$\boldsymbol{A}$ என்ற ஒரு திசையனை λ என்ற ஒரு திசையிலியால் பெருக்குவதால் கிடைக்கும் திசையனின் பருமனளவு $\boldsymbol{A}$இன் பருமனளவின் λ மடங்கு; அதன் திசை $\boldsymbol{A}$இன் திசையே. அதாவது,

$$|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda |\boldsymbol{A}| \quad (\lambda > 0 \text{ எனில்})$$

சான்றாக, $\boldsymbol{A}$ யை 2ஆல் பெருக்கும்போது, விளைவுத் திசையன் படம் 4.3(அ)வில் காட்டியபடி அதே திசையில் இரண்டு மடங்கான பருமனளவானது.

$\boldsymbol{A}$ என்ற திசையனை $-\lambda$ என்ற ஒரு எதிர்ம எண்ணால் பெருக்குவது $\boldsymbol{A}$ யின் திசைக்கு எதிர்த் திசையிலும் $\lambda|A|$ பருமனளவும் உள்ள ஒரு திசையனை தருகிறது. $\boldsymbol{A}$ என்ற திசையனை -1 , -1.5 ஆகியவற்றால் பெருக்கவதால் கிடைக்கும் திசையன்களை படம் 4.3(ஆ) காட்டுகிறது.

(அ) (ஆ)

படம் 4.3 (அ) A என்ற திசையனும் அதை 2 என்ற நேர்ம எண்ணால் பெருக்குவதால் கிடைக்கும் விளைவும். (ஆ) A என்ற திசையனும் அதை $-1, -1.5$ என்ற எதிர்ம எண்களால் பெருக்குவதால் கிடைக்கும் விளைவுகளும்

$\boldsymbol{A}$ என்ற திசையனை பெருக்கும் λ என்ற திசையிலிக்கு அதற்கேயுரிய இயற்பருமானம் இருக்கலாம். $\lambda\boldsymbol{A}$ யின் பருமானம் λ , $\boldsymbol{A}$ ஆகியவற்றின் பருமானங்களின் பெருக்கல். சான்றாக, ஒரு மாறா திசைவேகத்திசையனை அதன் நேர இடைவெளியால் பெருக்கினால் இடப்பெயர்ச்சித்திசையனை பெறுகிறோம்.

4.4 திசையன்களின் கூட்டலுக்கும் கழித்தலுக்குமான வரைபடமுறை

4.2ஆம் பகுதியில் சொன்ன வரையறையின் படி, திசையன்கள் கூட்டலின் முக்கோண விதியையோ சமானமான இணைகரவிதி யையோ பின்பற்றுகின்றன. இப்போது கூட்டல்விதியை வரைபடமுறையால் விவரிக்கி றோம். $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ என்ற இரண்டு திசையன்கள் படம் 4.4(அ)வில் காட்டியபடி ஒரு தளத்தில் கிடப்பதை கருதுவோம். இந்த திசையன்களை குறிக்கும் கோட்டுத்துண்டுகளின் நீளங்கள் திசையன்க ளின் பருமனளவுகளின் விழுக்காட்டில் உள்ளன. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ என்ற கூட்டலை காண, $\boldsymbol{B}$யை அதன் வால் $\boldsymbol{A}$ யின் தலைக்கு வரும்படியும் தனக்கே இணையாக நிலைக்கும் படியும் படம் 4.4(ஆ)வில் கண்டபடி நகர்த்துகிறோம். பிறகு $\boldsymbol{A}$ யின் வாலிலிருந்து $\boldsymbol{B}$ யின் தலைக்கு ஒரு நேர்க் கோட்டை வரைந்து அதன் முடிவில் ஒரு அம்புத்தலையையும் இடுகிறோம். இந்த செய்முறையில் திசையன்களை தலையை வால் தொடும்படி அடுக்குவதால், இதை தலைவால முறை என்கிறோம். இரண்டு திசையன்களும் அவற்றின் விளைவுமமும் ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களில் இருப்பதால், இதை **திசையன்கூட்டலின் முக்கோணமுறை** என்றும் அழைக்கிறோம்.

$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ என்ற கூட்டலின் விளைவுமத்தை இவ்வாறே படம் 4.4(இ)யில் காட்டியபடி

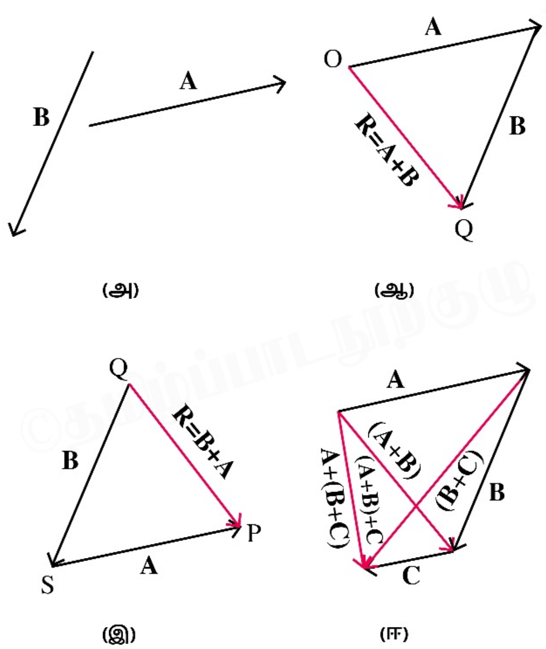
திசையன்கள் என்கிறோம். ஆனால், சில இயற்பியப்பயன்பாடுகளில் திசையனின் இருப்பிடமோ பயணத்திசையோ முக்கியமாகலாம். அவ்வாறான திசையன்களை அருகிடத்திசையன்கள் என்கிறோம்.

வரைந்தால் $\boldsymbol{R}$ என்ற அதே திசையனை பெறுகிறோம். எனவே, திசையன்கூட்டல் **முறைமைமாற்றத்தக்கது**. அதாவது,

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \qquad (4.1)$$

திசையன்கூட்டலுக்கு சேர்க்கைப்பண்பும் உள்ளது. இதை படம் 4.4(ஈ) காட்டுகிறது. முதலில் $\boldsymbol{A}$ யையும் $\boldsymbol{B}$ யையும் கூட்டி பிறகு $\boldsymbol{C}$ யை கூட்டுவதன் விளைவு முதலில் $\boldsymbol{B}$ யையும் $\boldsymbol{C}$ யையும் கூட்டி பிறகு $\boldsymbol{A}$ யை கூட்டுவதன் விளைவுக்கு சமம். அதாவது,

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) \qquad (4.2)$$



படம் 4.4 (அ) A, B என்ற திசையன்கள். (ஆ) Aயை Bயுடன் வரைபடத்தால் கூட்டல். (இ) Bயை Aயுடன் வரைபடத்தால் கூட்டல். (ஈ)

திசையன்கூட்டலின் சேர்க்கைப்பண்பை எடுத்துக்காட்டல்.

எதிரெதிர்த்திசைகளிலுள்ள இரண்டு சமமான திசையன்களை கூட்டுவதன் விளைவு என்ன? படம் 4.3(ஆ)வில் காட்டிய $\boldsymbol{A}$, $-\boldsymbol{A}$ ஆகிய இரண்டு திசையன்களை கருதுக. இவற்றின் கூட்டல் $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})$. இரண்டு திசையன்களின் பருமனளவுகள் சமமாகவும் திசைகள் எதிரெதிராகவும் இருப்பதால், அவற்றை தலைவாலாக வைக்கும்போது விளைவுமத் திசையனின் நீளம் சுழியமாகிறது. இத்தகைய திசையனை வெற்றுத்திசையன் என்றோ சுழியத்திசையன் என்றோ அழைத்து $\mathbf{0}$ என்று குறிக்கிறோம். அதாவது

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\mathbf{0}, \qquad |\mathbf{0}|=0 \qquad (4.3)$$

வெற்றுத்திசையனின் பருமனளவு சுழியமாவதால் அதன் திசையை குறிக்கவியலாது.

$\boldsymbol{A}$ என்ற எந்த திசையனையும் சுழியத்தால் பெருக்கும்போதும் வெற்றுத்திசையன் கிடைக்கிறது. வெற்றுத்திசையனின் முக்கியப் பண்புகள்

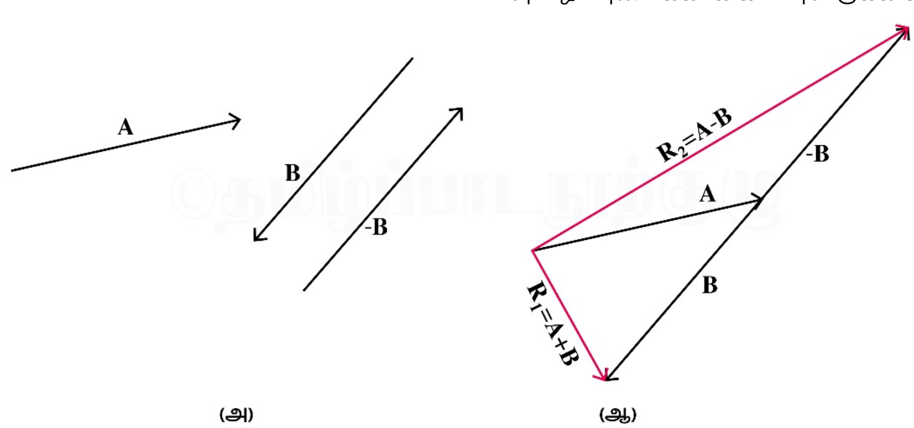
$$\boldsymbol{A}+\mathbf{0}=\boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{\lambda}\mathbf{0}=\mathbf{0}, \qquad 0\,\boldsymbol{A}=\mathbf{0} \qquad (4.4)$$

இயலுலகில் வெற்றுத்திசையனின் பொருள் என்ன? படம் 4.1(அ)வில் காட்டியபடி ஒரு தளத்தில் இடநிலை, இடப்பெயர்ச்சி ஆகிய திசையன் களை கருதுக. இப்போது, t என்ற நேரத்தில் P என்ற இடத்திலிருக்கும் ஒரு பொருள் $\boldsymbol{P'}$ க்கு நகர்ந்து மீண்டும் $\boldsymbol{P}$க்கு திரும்புவதாக கொள்க. இந்த அசைவில் இடப்பெயர்ச்சி என்ன? தொடக்க நிலையும் இறுதிநிலையும் ஒன்றே என்பதால், இடப்பெயர்ச்சி வெற்றுத்திசையன்.

திசையக்கழித்தலை திசையன்கூட்டலின் அடிப்படையில் வரையறுக்கலாம். $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ என்ற இரண்டு திசையன்களின் வேறுபாட்டை $\boldsymbol{A}$, $-\boldsymbol{B}$ ஆகியவற்றின் கூட்டலாக வரையறுக்கிறோம். அதாவது,

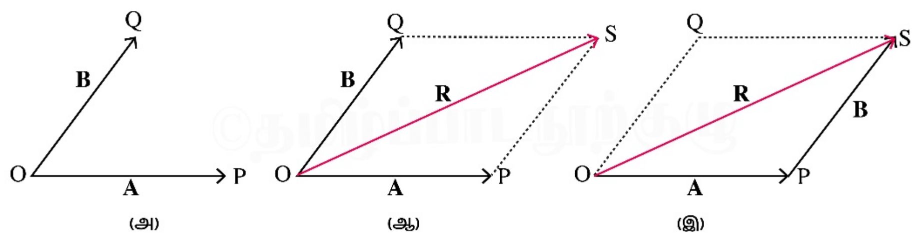
$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}) \qquad (4.5)$$

இதை படம் 4.5 காட்டுகிறது. $\boldsymbol{A}$ யுடன் $-\boldsymbol{B}$ யை கூட்டி $\boldsymbol{R_2}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ என்பதை பெறுகிறோம். அதை படத்தில் $\boldsymbol{R_1}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ என்ற திசையனையும் ஒப்புமைக்காக காட்டியிருக்கிறோம்.



படம் 4.5 (a) $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ என்ற திசையன்கள். $-\boldsymbol{B}$யும் காட்டப்பட்டுள்ளது. (ஆ) $\boldsymbol{A}$யிலிருந்து $\boldsymbol{B}$யை கழித்தல். விளைவு $\boldsymbol{R_2}$. ஒப்புமைக்காக, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ யின் கூட்டலான $\boldsymbol{R_1}$உம் காட்டப்பட்டுள்ளது.

இரண்டு திசையன்களின் கூட்டலை காண **இணைகரமுறை**யையும் பயன்படுத்தலாம். $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ என்ற திசையன்களை மீண்டும் கருதுவோம். இவற்றை இணைகரமுறையில் கூட்ட, அவற்றின் வால்களை ஒரு பொதுவான மூலத்தில் வைக்கிறோம். படம் 4.6(அ)வில் மூலத்தை O என்று குறித்திருக்கிறோம். பிறகு, $\boldsymbol{A}$ யின் தலையிலிருந்து $\boldsymbol{B}$ க்கு இணையாக ஒரு கோட்டையும் $\boldsymbol{B}$ யின் தலையிலி ருந்து $\boldsymbol{A}$ க்கு இணையாக மற்றொரு கோட்டையும் வரைந்து படம் 4.6(ஆ)வில் காட்டிய $OQSP$ என்ற இணைகரத்தை முழுமையாக்குகிறோம். அடுத்து, இந்த இரண்டு கோடுகளின் இடைவெட்டுப்புள்ளி யான S இலிருந்து O என்ற மூலத்துக்கு ஒரு நேர்க் கோட்டை வரைகிறோம். அதாவது இணை கரத்தின் ஒரு மூலைவிட்டத்தை வரைகிறோம். மூலத்திலிருந்து இடைவெட்டுப்புள்ளியைநோக் கிய இந்த திசையனே கூட்டலின் விளைவுமத் திசையன். படம் 4.6(இ)இல் இதே கூட்டலைப்பெற முக்கோணவிதி பயன்படுகிறது. இரண்டு முறைகளும் ஒரே விளைவை தருவதை காண்கிறோம். எனவே இந்த இரண்டு முறைகளும் சமானமானவை.



படம் 4.6 (அ) வால்களை பொதுவான மூலத்தில் வைத்த $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ என்ற திசையன்கள். (ஆ) இணைகரமுறையை பயன்படுத்தி பெற்ற $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$. (இ) இணைகரமுறை முக்கோணமுறைக்கு சமானம்.

சிக்கல் 4.1

மழை நெடுநிற்பமாக $35\, m\, s^{-1}$ திசைவேகத் தில் விழுகிறது. காற்று $12\, m\, s^{-1}$ வேகத்தில் கிழக்கிலிருந்து மேற்காக வீசத்தொடங்குகிறது. பேருந்துநிறுத்தத்தில் நின்றிருக்கும் ஒருவரின்மீது மழைநீர் தாக்கும் வேகம் என்ன? அவர் எந்தத்திசையில் குடையை பிடிக்கவேண்டும்?

தீர்வு

மழையின் திசைவேகத்தையும் காற்றின் திசைவேகத்தையும் படம் 4.7இல் $\boldsymbol{v}_{ம}$, $\boldsymbol{v}_{கா}$ என்று குறிக்கிறோம். இவை கேள்வியில் குறித்த திசைகளில் இருக்கின்றன. திசையன்கூட்டலின் விதியை பயன்படுத்தி $\boldsymbol{v}_{ம}$, $\boldsymbol{v}_{கா}$ ஆகியவற்றின் கூட்டலை படத்தில் $\boldsymbol{R}$ என்று காட்டியபடி காண்கிறோம். $\boldsymbol{R}$ இன் பருமனளவு

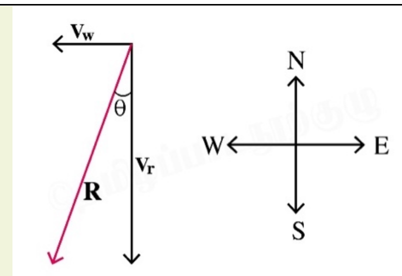
$$R = \sqrt{v_{ம}^2 + v_{கா}^2} = \sqrt{35^2 + 12^2}\, m\, s^{-1}$$
$$= 37\, m\, s^{-1}$$

நெடுநிற்பத்துடன் $\boldsymbol{R}$ தாங்கும் கோணம்

தொவி $\theta = \frac{v_{கா}}{v_{ம}} = \frac{12}{35} = 0.343$; அதாவது

$\theta =$ தொவி$^{-1}(0.343) = 19°$

எனவே, குடைக்காரர் நெடுநிற்பத்தி லிருந்து $19°$ கிழக்குநோக்கி சரித்து குடையை பிடிக்கவேண்டும்.



படம் 4.7

4.5 திசையன்களை அகைபிரித்தல்

$\boldsymbol{a}$ யும் $\boldsymbol{b}$ யும் ஒரு தளத்தில் கிடக்கும் வெவ்வேறு திசைகளுள்ள சுழியமிலாத் திசையன்கள் என்க. $\boldsymbol{A}$ என்ற மற்றொரு திசையன் அதே தளத்தில் கிடப்பதாகவும் கொள்க (படம் 4.8(அ)). $\boldsymbol{A}$ யை, ஒன்று $\boldsymbol{a}$ யின் மெய்யெண்மடங்கும் மற்றது $\boldsymbol{b}$ யின் மெய்யெண்மடங்குமான இரண்டு திசையன்க ளின் கூட்டலாக குறிக்கலாம். இதை புரிந்துகொள்ள, O வும் P யும் $\boldsymbol{A}$ யின் வாலும் தலையும் என்க. O வின் வழியாக $\boldsymbol{a}$ க்கு இணையாக ஒரு நேரக்கோட்டையும் P யின் வழியாக $\boldsymbol{b}$க்கு இணையாக ஒரு நேர்க்கோட்டை யும் வரைவோம். அவை Q வில் இடைவெட்டுவ தாக கொள்வோம். அப்படியெனில்,

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OQ} + \boldsymbol{QP} \qquad (4.6)$$

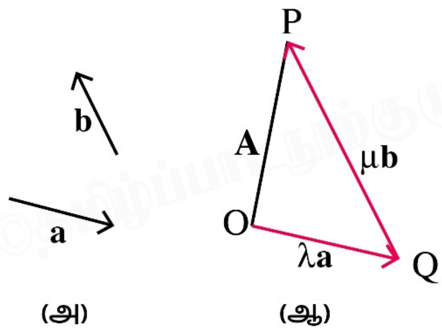
ஆனால், $\boldsymbol{OQ}\quad \boldsymbol{a}$ க்கு இணையானதும் $\boldsymbol{QP}\quad \boldsymbol{b}$ க்கு இணையானதும் என்பதால்

$$\boldsymbol{OQ} = \lambda\, \boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{QP} = \mu\, \boldsymbol{b} \qquad (4.7)$$

என்று எழுதலாம்; இங்கு λ வும் μ வும் மெய்யெண்கள். எனவே,

$$\boldsymbol{A} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} \qquad (4.8)$$

$\boldsymbol{A}$ யை இரண்டு அகைகளாக பிரித்துவிட்டதாக சொல்கிறோம். அவற்றுளொன்று $\lambda \boldsymbol{a}$; மற்றது $\mu \boldsymbol{b}$.

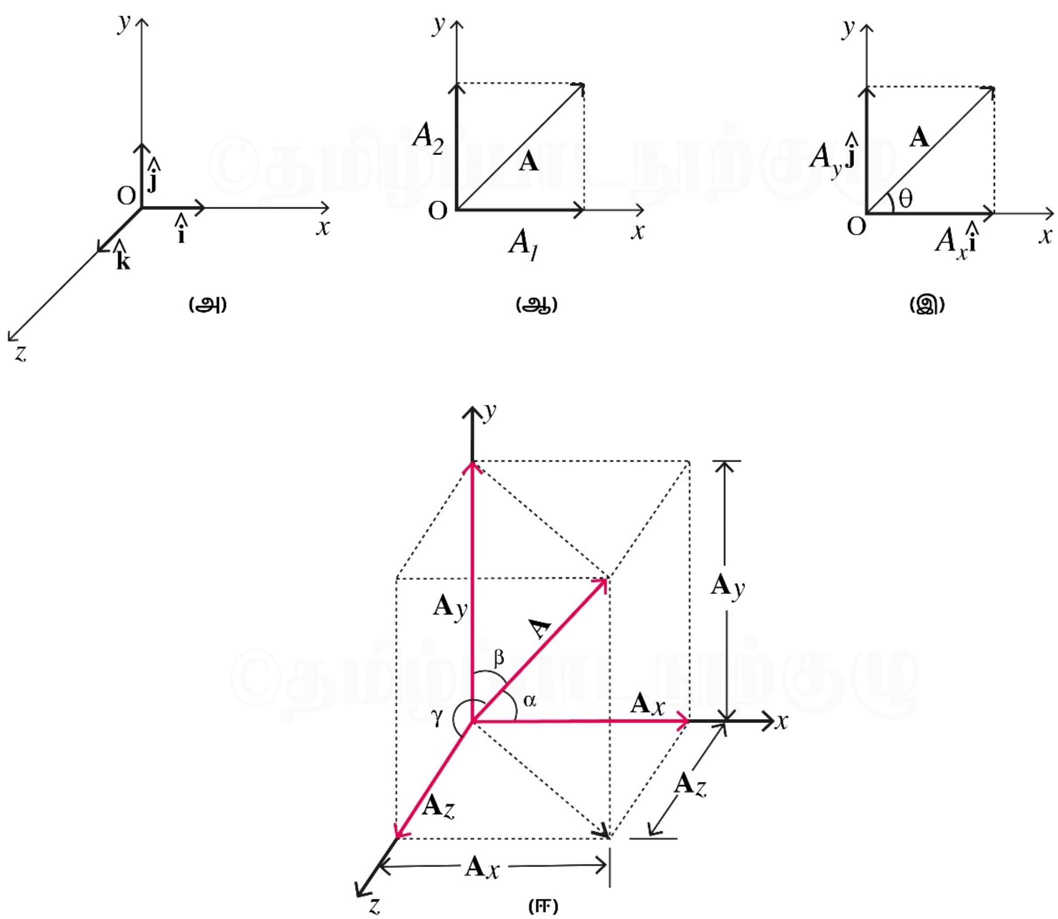


படம் 4.8 (அ) a, b என்ற இரண்டு கோடமையாத திசையன்கள். (ஆ) A என்ற திசையனை a, b ஆகியவற்றின்வழி அகைபிரித்தல்.

இந்த முறையால் எந்தவொரு திசையனையும் அதே தளத்தில் கிடக்கும் இரண்டு திசையன்களின் திசைகளிலுள்ள இரண்டு அகைகளாக, மூன்றும் ஒரே தளத்தில் கிடக்குமாறு, பிரிக்கலாம். ஒரு பொதுவான திசையனை செவ்வக ஒருங்களவமைப்பின் அச்சுகளுக்கு நேரான இரண்டு அலகுத்திசையன்களால் அகைபிரிப்பது வசதியானது. அலகுத்திசையன் என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட திசையும் ஓரலகு பருமனளவுமுள்ள ஒரு திசையன். அதற்கு எவ்விதமான அளவலகும் பருமானமும் இல்லை. இது ஒரு திசையை மட்டும் குறிக்க பயன்படுகிறது. முப்பருமானத்தில் செவ்வக ஒருங்களவமைப்பின் x , y , z அச்சுகளுக்கு நேரான அலகுத்திசையன்களை முறையே $\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, $\hat{\boldsymbol{k}}$ என்று குறிக்கிறோம். இதை படம் 4.9(அ) காட்டுகிறது. இவை அலகுத்திசையன்கள் என்பதால்

$$|\hat{\boldsymbol{\imath}}| = |\hat{\boldsymbol{\jmath}}| = |\hat{\boldsymbol{k}}| = 1 \qquad (4.9)$$

இந்த அலகுத்திசையன்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை. இந்த உரையில், மற்றத்திசையன்களிலிருந்து வேறுபடுத்துவதற்காக இவற்றை தடித்த எழுத்துகளில் ஒரு தலைப் பாகையுடன் குறிக்கிறோம். இந்தப்படலத்தில் நாம் இருபருமான அசைவுகளில் கவனஞ்செலுத்துவதால், இரண்டு அலகுத்திசையன்களே தேவைப்படுகின்றன.



படம் 4.9 (அ) x, y, z அச்சுகளுக்கு நேரான $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ ஆகிய அலகுத்திசையன்கள். (ஆ) A என்ற திசையனை x, y அச்சுகளுக்கு நேரான A_1, A_2 ஆகிய அகைகளாக பிரித்தல். (இ) A_1, A_2 ஆகியவற்றை $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$இன்வழி குறித்தல். (ஈ) x,y,zஅச்சுகளுக்கு நேராக அகைபிரித்த A.

ஒரு அலகுத்திசையனை ($\hat{\boldsymbol{n}}$ என்க) ஒரு திசையிலியால் பெருக்கினால், விளைவு ஒரு திசையன். அதாவது $\lambda\hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\lambda}$. பொதுவாக, $\boldsymbol{A}$ என்ற ஒரு திசையனை

$$\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\,\hat{\boldsymbol{n}} \qquad (4.10)$$

என்று எழுதலாம்; இங்கு, $\hat{\boldsymbol{n}}$ என்பது $\boldsymbol{A}$ யின் திசையிலுள்ள ஒரு அலகுத்திசையன்.

இனி, $\boldsymbol{A}$ என்ற திசையனை $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ என்ற அலகுத் திசையன்களுக்கு நேராகக்கிடக்கும் அகைக ளாக பிரிக்கலாம். படம் 4.9(ஆ)வில் காட்டியபடி xy தளத்தில் கிடக்கும் $\boldsymbol{A}$ என்ற திசையனை கருதுவோம். $\boldsymbol{A}$ யின் தலையிலிருந்து ஒருங்கள வச்சுகளுக்கு செங்குத்தான கோடுகளை படத்தில் காட்டியவாறு வரைவோம். இவ்வாறு $\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}$ என்றுள்ள $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ ஆகிய இரண்டு திசையன்களை பெறுகிறோம். $\boldsymbol{A}_1$ $\hat{\imath}$ க்கு இணையாகவும் $\boldsymbol{A}_2$ $\hat{\jmath}$ க்கு இணையாகவுமிருப் பதால்

$$\boldsymbol{A_1} = A_x\hat{\boldsymbol{\imath}}, \qquad \boldsymbol{A_2} = A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (4.11)$$

இங்கு, A_xஉம் A_yஉம் மெய்யெண்கள். இவ்வாறு,

$$\boldsymbol{A} = A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (4.12)$$

இதை படம் 4.9(இ)யில் குறித்திருக்கிறோம். A_x, A_y ஆகிய அளவுகளை $\boldsymbol{A}$ யின் முறையே x , y அகைகள் என்கிறோம். A_x திசையனன்று என்பதையும் $A_x\hat{\boldsymbol{\imath}}$ திசையன் என்பதையும் நோக்குக. இதைப்போலவே $A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ உம் திசையன். எளிய முக்கோணவியலை பயன்படுத்தி A_xஐயும் A_y ஐயும் $\boldsymbol{A}$ யின் பருமனளவு, அது x அச்சுடன் தாங்கும் கோணமான θ ஆகியவற்றின் வழி எழுதலாம்.

$$A_x = A\,\text{உவவி}\,\theta, \qquad A_y = A\,\text{வவி}\,\theta \qquad (4.13)$$

θ வின் மதிப்பைச்சார்ந்து, ஒரு திசையனின் அகை நேர்மமாகவோ சுழியமாகவோ எதிர்மமாகவோ இருக்கலாம் என்பது (4.13)ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து தெளிவாகிறது.

இப்போது, தளத்தில் $\boldsymbol{A}$ என்ற திசையனை குறிக்க நமக்கு இரண்டு வழிகள் உள்ளன.

(அ) அதன் பருமனளவையும் (A) அது x அச்சுடன் தாங்கும் கோணத்தையும் (θ) குறிப்பிடுவது.

(ஆ) அதன் அகைகளான A_xஐயும் A_yஐயும் குறிப்பிடுவது.

Aயும் θவும் தெரிந்தால், A_xஐயும் A_yஐயும் (4.13) ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து பெறலாம். A_x உம் A_y உம் தெரிந்தால், A யையும் θ வையும் கீழ்க்காணு மாறு பெறலாம்.

$$A_x^2 + A_y^2 = A^2 \text{ உவவி}^2\, \theta + A^2 \text{ வவி}^2\, \theta = A^2$$

அதாவது,

$$A^2 = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad (4.14)$$

மேலும்,

$$\text{தொவி}\, \theta = \frac{A_y}{A_x},\ \theta = \text{தொவி}^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) \qquad (4.15)$$

இதுவரை xyதளத்தில் கிடக்கும் திசையன்களை கருதினோம். இதே செய்முறையை பயன்படுத்தி பொதுவாக முப்பருமானத்தில் ஒரு திசையனை x,y,zஅச்சுகளுக்கு நேரான மூன்று அகைகளாக பிரிக்கலாம். $\boldsymbol{A}$ என்ற திசையன் x , y , z அச்சுகளுடன் தாங்கும் கோணங்கள் முறையே α, β, γ எனில்[3] (படம் 4.9(ஈ)),

$$A_x = A \text{ உவவி}\, \alpha, \qquad A_y = A \text{ உவவி}\, \beta,$$
$$A_z = A \text{ உவவி}\, \gamma \qquad (4.16)$$

பொதுவாக,

$$\boldsymbol{A} = A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}} \qquad (4.17)$$

$\boldsymbol{A}$யின் பருமனளவு

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (4.18)$$

$\boldsymbol{r}$ என்ற ஒரு இடநிலைத்திசையனை

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\hat{\boldsymbol{k}} \qquad (4.19)$$

என்று எழுதலாம். இங்கு x , y , z ஆகியவை முறையே x , y , z அச்சுகளுக்கு நேராக $\boldsymbol{A}$ யின் அகைகள்.

4.6 திசையன்கூட்டலுக்கான பகுப்பாய்வுமுறை

திசையன்கூட்டலின் படவரைவுமுறை திசையன்களையும் விளைவுமத்தையும் மனங்காண உதவுகிறது. எனினும், அது எப்போதும் எளிதானதும் துல்லியமானதுமன்று. திசையன்களின் அகைகளை கூட்டிச்சேர்க்கும் முறை எளிதானது. xy தளத்தில் A_x , A_y என்ற அகைகளுள்ள $\boldsymbol{A}$ யையும் B_x , B_y அகைகளுள்ள $\boldsymbol{B}$யையும் கருதுக.

$$\boldsymbol{A} = A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}}, \qquad \boldsymbol{B} = B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (4.20)$$

இவற்றின் கூட்டல் $\boldsymbol{R}$ என்க. அப்படியெனில்

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \left(A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right) + \left(B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right) \quad (4.21)$$

திசையன்களுக்கு முறைமமாற்றுப்பண்பும் சேர்க்கைப்பண்பும் இருப்பதால், (4.21) ஆம் சமன் பாட்டில் உருபுகளை நம் வசதிப்படி மாற்றமைத்துக் கொள்ளலாம்.

$$\boldsymbol{R} = (A_x + B_x)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (4.22)$$

மேலும்,

$$\boldsymbol{R} = R_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + R_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (4.23)$$

என்பதால்,

$$R_x = A_x + B_x, \qquad R_y = A_y + B_y \qquad (4.24)$$

இவ்வாறு, $\boldsymbol{R}$ இன் ஒவ்வொரு அகையும் $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ ஆகியவற்றின் நிகரான அகைகளின் கூட்டல்.

முப்பருமானத்தில்,

$$\boldsymbol{A} = A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}}, \qquad \boldsymbol{B} = B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + B_z\hat{\boldsymbol{k}}$$
$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = R_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + R_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + R_z\hat{\boldsymbol{k}}$$
$$R_x = A_x + B_x, \qquad R_y = A_y + B_y,$$
$$R_z = A_z + B_z$$

இந்த முறையை பல திசையன்களின் கூட்டலுக்கும் கழித்தலுக்கும் நீட்டலாம். சான்றாக, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ ஆகிய திசையன்கள்

$$\boldsymbol{a} = a_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + a_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + a_z\hat{\boldsymbol{k}}, \qquad \boldsymbol{b} = b_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + b_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + b_z\hat{\boldsymbol{k}},$$
$$\boldsymbol{c} = c_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + c_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + c_z\hat{\boldsymbol{k}} \qquad (4.25)$$

எனில், $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ என்ற திசையனின் அகைகள்

$$T_x = a_x + b_x - c_x, \qquad T_y = a_y + b_y - c_y,$$
$$T_z = a_z + b_z - c_z \qquad (4.26)$$

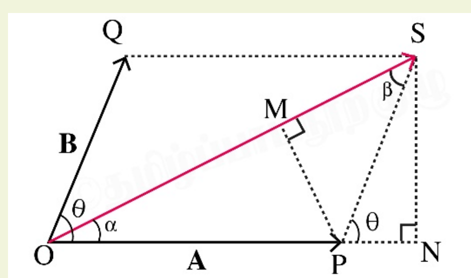
சிக்கல் 4.2

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ என்ற இரண்டு திசையன்களின் விளைவுமத்தின் பருமனளவையும் திசையை யும் அவற்றின் பருமனளவுகளின்வழியும் அவற்றிடையான கோணத்தின்வழியும் காண்க.

தீர்வு

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ என்ற திசையன்களை படம் 4.10இல் $\boldsymbol{OP}$, $\boldsymbol{OQ}$ என்று காட்டுகிறோம். திசையக் கூட்டலின் இணைகரவிதியால், $\boldsymbol{R}$ என்ற விளைவுமத்திசையனை $\boldsymbol{OS}$ குறிக்கிறது.

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$$



3 α, β, γ என்ற கோணங்கள் இடவெளியிலுள்ளவை என்பதை நோக்குக. இவை சமத்தளமற்ற கோடுகளுள் ஒவ்வொரு சோடிகளுக்குமிடையான கோணங்கள்.

படம் 4.10

SN OP க்கு செங்குத்தாகவும் PM OS க்கு செங்குத்தாகவும் இருக்கின்றன. படத்திலிருந்து

$$OS^2 = ON^2 + SN^2$$

என்று காண்கிறோம். ஆனால், $ON = OP + PN = A + B$ உவவி θ , $SN = B$ வவி θ .
எனவே,

$$OS^2 = (A + B \text{ உவவி } \theta)^2 + (B \text{ வவி } \theta)^2$$

அதாவது, $R^2 = A^2 + B^2 + 2AB$ உவவி θ.

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \text{ உவவி } \theta} \qquad (4.27)$$

$\Delta\, OSN$ இல் (OSN என்ற முக்கோணத்தில்), $SN = OS$ வவி $\alpha = R$ வவி α ; $\Delta\, PSN$ இல் $SN = PS$ வவி $\theta = B$ வவி θ . எனவே R வவி $\alpha = B$ வவி θ; அதாவது,

$$\frac{R}{\text{வவி } \theta} = \frac{B}{\text{வவி } \alpha} \qquad (4.28)$$

அதைப்போலவே, $PM = A$ வவி $\alpha = B$ வவி β . அதாவது,

$$\frac{A}{\text{வவி } \beta} = \frac{B}{\text{வவி } \alpha} \qquad (4.29)$$

(4.28) , (4.29) ஆகிய சமன்பாடுகளை சேர்த்து,

$$\frac{R}{\text{வவி } \theta} = \frac{A}{\text{வவி } \beta} = \frac{B}{\text{வவி } \alpha} \qquad (4.30)$$

என்றும், அதிலிருந்து

$$\text{வவி } \alpha = \frac{B}{R} \text{வவி } \theta \qquad (4.31)$$

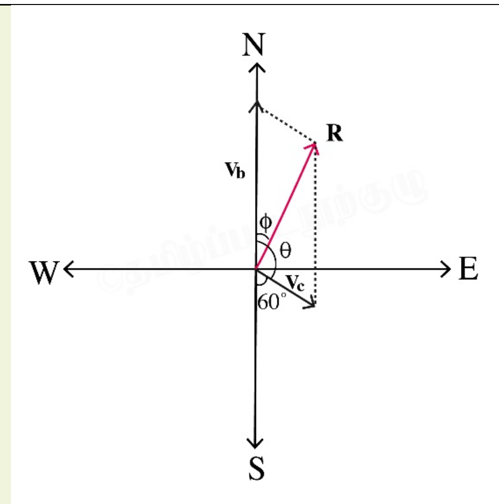
என்றும் பெறுகிறோம். இங்கு, R ஐ (4.27) ஆம் சமன்பாடு தருகிறது. அதாவது,

$$\text{தொவி } \alpha = \frac{SN}{OP + PN} = \frac{B \text{ வவி } \theta}{A + B \text{ உவவி } \theta} \quad (4.32)$$

(4.27) ஆம் சமன்பாடு விளைவுமத்தின் பருமனளவையும், (4.31) , (4.32) ஆகிய சமன்பாடுகள் அதன் திசையையும் தருகின்றன. (4.31) ஆம் சமன்பாட்டை உடன்வளைவிவிதி என்றும் (4.30) ஆம் சமன்பாட்டை வளைவிவிதி என்றும் அழைக்கிறோம்.

சிக்கல் 4.3

ஒரு உந்துபடகு வடக்குநோக்கி $25\, km/h$ வேகத்தில் ஓடுகிறது. அந்தப்பகுதியில் நீரோட்டம் தெற்கிலிருந்து $60°$ கிழக்குநோக்கி $10\, km/h$ வேகமானது. படகின் விளைவும திசைவேகத்தை காண்க.



படம் 4.11

தீர்வு

உந்துபடகின் திசைவேகத்தை $\boldsymbol{v}_b$ என்றும் நீரோட்டத்தின் திசைவேகத்தை $\boldsymbol{v}_c$ என்றும் படம் 4.11 காட்டுகிறது. கூட்டலின் இணைகரவிதியை பயன்படுத்தி விளைவும $\boldsymbol{R}$ ஐ படத்தில் காட்டியவாறு பெறுகிறோம். $\boldsymbol{R}$ இன் பருமனளவை உடன் வளைவிவிதியிலிருந்து

$$R = \sqrt{v_b^2 + v_c^2 + 2v_b v_v \cos 120°}$$

$$= \sqrt{25^2 + 10^2 + 2 \times 25 \times 10 \times \left(-\frac{1}{2}\right)}\ km/h$$

$$= 22\ km/h$$

என்று பெறுகிறோம். திசையை பெற வளைவிவிதியை பயன்படுத்துகிறோம்.

$$\frac{R}{\text{வவி } \theta} = \frac{v_c}{\text{வவி } \phi}$$

$$\text{வவி } \phi = \frac{v_c}{R} \text{வவி } \theta = \frac{10 \times \text{வவி } 120°}{21.8}$$

$$= \frac{10\sqrt{3}}{2 \times 21.8} = 0.397$$

$$\phi = 23.4°$$

4.7 தளத்தில் அசைவு

இந்தப்பகுதியில் இருபருமான அசைவுகளை திசையன்களால் விவரிப்போம்.

4.7.1 இடநிலைத்திசையனும் இடப்பெயர்ச்சியும்

xy தளத்தில் அசையும் ஒரு துகளின் r என்ற இடநிலைத்திசையனை படம் 4.12இல் காட்டியபடி

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

என்று குறிக்கலாம்; இங்கு x , y ஆகியவை திசைய னின் அகைகள். இவை துகளின் இடநிலைப்புள்ளி யின் ஒருங்களவுகளே.

துகள் படம் 4.12(ஆ)வில் காட்டிய தடித்த கோட்டில் அசைவதாக கொள்வோம். அது t என்ற நேரத்தில் P என்ற இடநிலையிலும் t' இல் P' இலும் இருப்பதாக கொள்வோம். அப்படியெனில், இடப்பெயர்ச்சியான

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} \qquad (4.33)$$

Pயிலிருந்து P'ஐநோக்கிய திசையில் உள்ளது. (4.33)ஆம் சமன்பாட்டை அகைகளின்வழி

$$\Delta\boldsymbol{r} = (x'\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + y'\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) - (x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) = \Delta x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \Delta y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

என்று எழுதலாம்; இங்கு,

$$\Delta x = x' - x, \qquad \Delta y = y' - y \qquad (4.34)$$

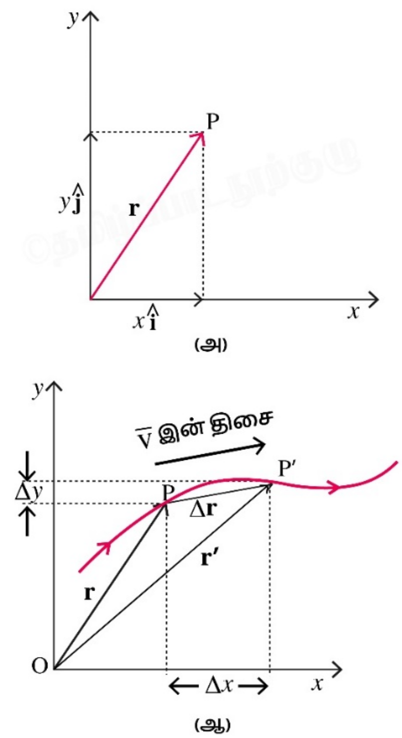
4.7.2 திசைவேகம்

ஒரு பொருளின் சராசரித்திசைவேகம் என்பது இடப்பெயர்ச்சிக்கும் அதற்கு ஆகும் நேர இடைவெளிக்குமான விகிதம்.

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \Delta y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$
$$= \overline{v}_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + \overline{v}_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (4.35)$$

$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$ என்பதால், சராசரித்திசைவேகத்தின் திசை $\Delta\boldsymbol{r}$ இன் திசையே (படம் 4.12(ஆ)). **திசைவேகம்** (உடனடித்திசைவேகம்) என்பது நேர இடைவெளி சுழியத்தை அணுகும்போது சராசரித்திசைவேகத் தின் எல்லைமதிப்பு என்று வரையறுக்கிறோம். அதாவது,

$$\boldsymbol{v} = \underset{\Delta t\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \qquad (4.36)$$



படம் 4.12 (அ) இடநிலைத்திசையனான r. (ஆ) துகளின் இடப்பெயர்ச்சியும் (Δr) சராசரி திசைவேகமும் (v)

இந்த எல்லையாக்கும் நிகழ்முறையை படம் 4.13(அ)முதல் (ஈ)வரையான படவரைவுகளி லிருந்து எளிதில் உணரலாம். இந்த படங்களில் வளைந்த கோடு பொருளின் பாதையை குறிக்கிறது பொருள் t என்ற நேரத்தில் P என்ற இடத்திலுள்ளது. Δt_1 , Δt_2 , Δt_3 ஆகிய நேர இடைவெளிகளுக்குப்பின் அதன் இடநிலைகள் முறையே P_1 , P_2 , P_3 ஆகியவை; அந்த நேரங்களில் அதன் இடப்பெயர்ச்சிகள் முறையே $\Delta\boldsymbol{r}_1, \Delta\boldsymbol{r}_2, \Delta\boldsymbol{r}_3$ ஆகியவை. குறைந்துவரும் மூன்று Δt மதிப்புகளுக்கு $(\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3)$ சராசரித் திசைவேகமான $\overline{\boldsymbol{v}}$இன் திசைகளை படத்திலுள்ள (அ), (ஆ), (இ) ஆகிய பகுதிகள் காட்டுகின்றன. $\Delta t \to 0$ என்ற எல்லையில் $\Delta\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{0}$; அதன் திசை (ஈ)யில் காட்டியபடி பாதையின் தொடுகோட்டை நெருங்குகிறது. எனவே, **எந்தப்புள்ளியிலும் ஒரு பொருளின் திசைவேகத்தின் திசை அந்தப் புள்ளியில் அதன் பாதையின் தொடுகோட்டில் அசைவின் திசையில் இருக்கிறது**.

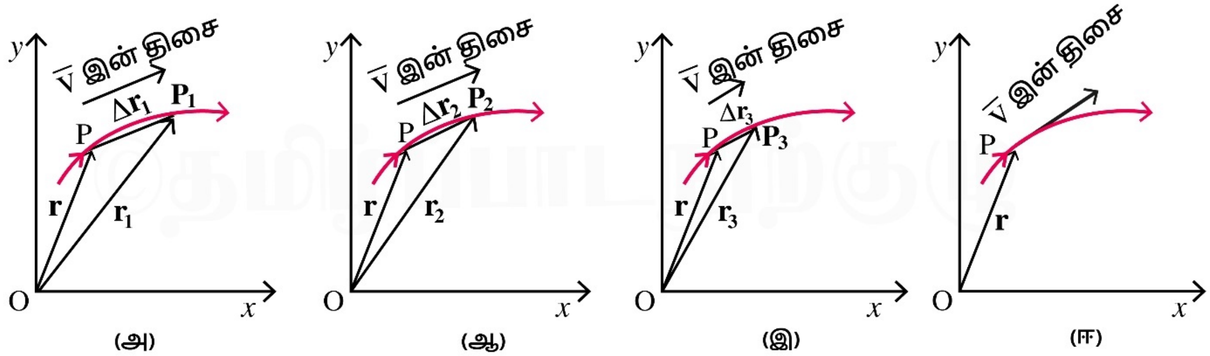
$\boldsymbol{v}$ஐ அகைகளின் வடிவத்தில் எழுதலாம்.

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \underset{\Delta t\to 0}{\text{எல்லை}}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)$$
$$= \left(\underset{\Delta t\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \left(\underset{\Delta t\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$= \frac{dx}{dt}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{dy}{dt}\hat{\boldsymbol{\jmath}} = v_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + v_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (4.37)$$

இங்கு,

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad (4.38)$$



படம் 4.13 நேர இடைவெளியான Δt சுழியத்தை அணுகும்போது, சராசரித்திசைவேகம் திசைவேகத்தை (v) அணுகுகிறது. v இன் திசை பாதையின் தொடுகோட்டுக்கு இணையாகிறது.

எனவே, பொருளின் இடநிலையின் x, y ஒருங்களவுகள் நேரத்தின் சார்பன்களாக நமக்கு தெரிந்தால், இந்த சமன்பாடுகளை பயன்படுத்தி எந்த நேரத்திலும் திசைவேகத்தின் அகைகளான v_x, v_y ஆகியவற்றை கண்டுபிடிக் கலாம்.

அப்படியெனில் $\boldsymbol{v}$இன் பருமனளவு

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (4.39)$$

அதன் திசையை

$$\text{தொவி}\,\theta = \frac{v_y}{v_x}, \qquad \theta = \text{தொவி}^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \qquad (4.40)$$

என்ற கோணம் குறிக்கிறது. இந்த திசைவேகத் தின் அகைகளையும் θ என்ற கோணத்தையும் P என்ற புள்ளியில் படம் 4.14 காட்டுகிறது.

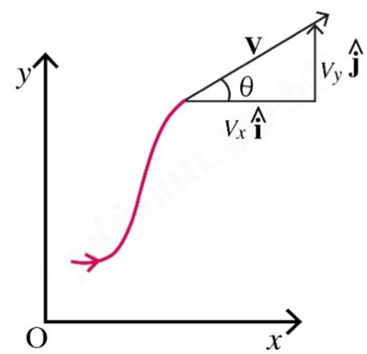
4.7.3 முடுக்கம்

xy தளத்தில் அசையும் ஒரு பொருளின் திசை வேகத்தில் Δt என்ற நேர இடைவெளியில் ஏற்படும் மாற்றத்தை அந்த இடைவெளியால் வகுத்துப்பெறு வதை அந்த இடைவெளியில் பொருளின் சராசரி முடுக்கம் என்கிறோம். முடுக்கத்தை $\boldsymbol{a}$ என்று குறிக்கிறோம்.

$$\overline{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\left(v_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + v_y\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (4.41)$$

அதாவது,

$$\overline{\boldsymbol{a}} = a_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + a_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (4.42)$$



படம் 4.14 திசைவேகத்தின் அகைகளான v_x, v_y, அது xஅச்சுடன் தாங்கும் கோணமான θ ஆகியவற்றை காட்டும் படம். $v_x = v$ உவவி θ, $v_y = v$ வவி θ என்பதை நோக்குக.

முடுக்கம் (உடனடிமுடுக்கம்) என்பது நேர இடைவெளி சுழியத்தை நெருங்கும்போது சராசரிமுடுக்கத்தின் எல்லைமதிப்பு.

$$\boldsymbol{a} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} \qquad (4.43)$$

$\Delta\boldsymbol{v} = \Delta v_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + \Delta v_y\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ என்பதால்,

$$\boldsymbol{a} = \left(\underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \left(\underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

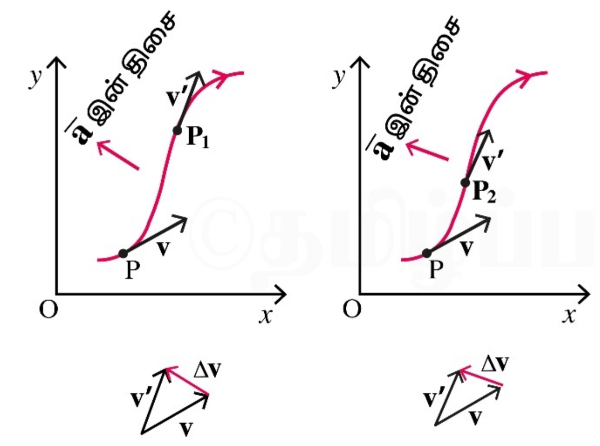
அதாவது,

$$\boldsymbol{a} = a_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + a_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (4.44)$$

இங்கு,

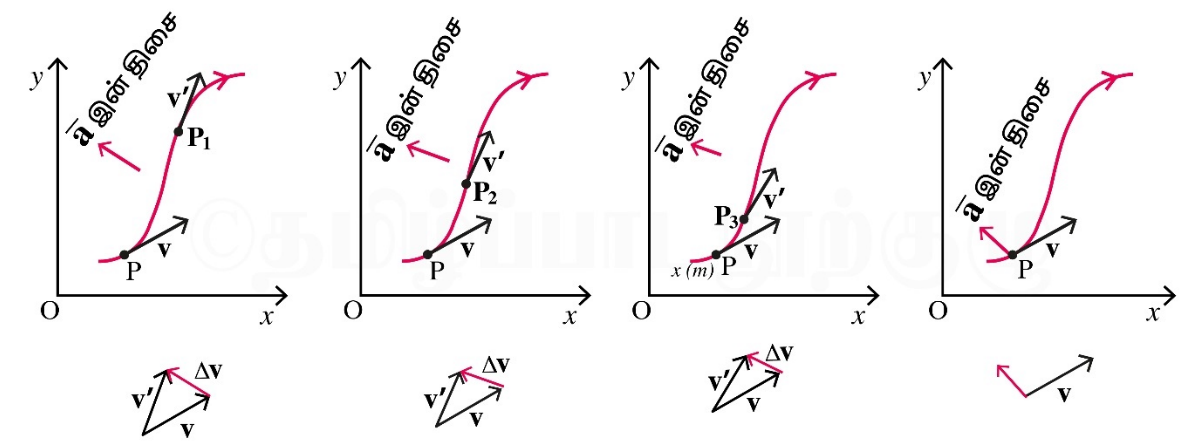
$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad (4.45)$$ [4]

திசைவேகத்தில் செய்ததுபோலவே, முடுக்கத்தின் வரையறையில் பயன்படும் எல்லையாக்க நிகழ்முறையை பொருளசைவின் பாதையை காட்டும் வரைபடங்களால் புரிந்துகொள்ளலாம். இதை



படம் 4.15 காட்டுகிறது. t என்ற நேரத்தில் பொருளின் இடநிலையை P குறிக்கிறது; $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3$ $(\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3)$ ஆகிய நேரங்களுக்குப் பின் இடநிலையை P_1 , P_2 , P_3 ஆகியவை குறிக்கின்றன. இந்த இடநிலைகளில் திசைவேகங்களையும் படங்கள் காட்டுகின்றன. ஒவ்வொரு நேரத்திலும் திசையன்கூட்டலின் முக்கோணவிதியை பயன்படுத்தி $\Delta \boldsymbol{v}$ ஐ பெறுகிறோம். Δt குறையும்போது $\Delta \boldsymbol{v}$இன் திசை மாறுவதை காண்கிறோம்; இதன் விளைவாக முடுக்கத்தின் திசையும் மாறுகிறது. இறுதியில், $\Delta t \to 0$ என்ற எல்லையில் (ஈ) சராசரி முடுக்கம் உடனடிமுடுக்கமாகிறது. அதன் திசை படத்தில் காட்டியபடி உள்ளது.

நோக்குக: ஒற்றைப்பருமானத்தில் ஒரு பொருளின் திசைவேகமும் முடுக்கமும் எப்போதும் ஒரே நேர்க்கோட்டிலிருந்தன. அவை நேர்க்கோட்டின் ஒரே திசையிலோ எதிரெதிர்த் திசைகளிலோ இருந்தன. ஆனால் இரண்டோ மேற்பட்டதோவான பருமானங்களில் திசைவேகத்துக்கும் முடுக்கத் துக்குமிடையான கோணம் $0°$ யிலிருந்து $180°$ வரை எந்த மதிப்பிலும் இருக்கலாம்.



படம் 4.15 மூன்று நேர இடைவெளிகளில் சராசரிமுடுக்கம்: (அ) Δt_1 (ஆ) Δt_2 (இ) Δt_3 $(\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t3)$ (ஈ) $\Delta t \to 0$ என்ற எல்லையில் சராசரிமுடுக்கம் முடுக்கமாகிறது.

சிக்கல் 4.4

ஒரு துகளின் இடநிலையை $\boldsymbol{r} = 3.0\, t\, \hat{\boldsymbol{\imath}} + 2.0\, t^2\, \hat{\boldsymbol{\jmath}} + 5.0\, \hat{\boldsymbol{k}}$ தருகிறது; இங்கு, t நொடியிலும் கெழுக்கள் $\boldsymbol{r}$ மீட்டரில் இருப்பதற்கு பொருத்தமான அலகுகளிலும் உள்ளன. (அ) துகளின் $\boldsymbol{v}(t)$ யையும் $\boldsymbol{a}(t)$ யையும் காண்க. (ஆ) $t = 1.0\ s$ இல் $\boldsymbol{v}(t)$ இன் பருமனளவையும் திசையையும் காண்க.

தீர்வு

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3.0\, t\, \hat{\boldsymbol{\imath}} + 2.0\, t^2\, \hat{\boldsymbol{\jmath}} + 5.0\, \hat{\boldsymbol{k}}\right)$$
$$= 3.0\, \hat{\boldsymbol{\imath}} + 4.0\, t\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

[4] a_x a_y களை x, y இன்வழி கீழ்க்காணுமாறு எழுதலாம்:

$$a_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 4.0\,\hat{\boldsymbol{j}}$$

அதாவது, முடுக்கம் நேரிய y அச்சின் திசையில் $4.0\ m\,s^{-2}$

$t = 1\,s$ என்றபோது $\boldsymbol{v} = 3.0\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + 4.0\,\hat{\boldsymbol{j}}$. அதன் பருமனளவு $v = \sqrt{3^2+4^2}\ m\,s^{-2} = 5.0\ m\,s^{-2}$; அதன் திசை

$$\theta = \text{தொவி}^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \text{தொவி}^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53°,$$

x அச்சுடன்

4.8 தளத்தில் மாறா முடுக்கமுள்ள அசைவு

ஒரு பொருள் xy தளத்தில் அசைவதாகவும் அதன் முடுக்கமான $\boldsymbol{a}$ மாறிலி எனவும் கொள்வோம். ஒரு நேர இடைவெளியில் சராசரிமுடுக்கம் இந்த மாறாமதிப்புக்கு சமம். பொருளின் திசைவேகம் $t = 0$ என்ற நேரத்தில் $\boldsymbol{v}_0$ எனவும் t யில் $\boldsymbol{v}$ எனவும் கொள்க. அப்படியெனில், வரையறையின்படி

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0}{t-0} = \frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0}{t}$$

அதாவது,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t \qquad (4.46)$$

அகைகளின்வழி

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \qquad v_y = v_{0y} + a_y t \qquad (4.47)$$

இடநிலையான $\boldsymbol{r}$ நேரத்துடன் மாறுவதை இப்போது கருதுவோம். ஒற்றைப்பருமானத்தில் நாம் பயன்படுத்திய முறையை பயன்படுத்துவோம். 0 , t ஆகிய நேரங்களில் துகளின் இடநிலைகள் $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}$ என்றும் திசைவேகங்கள் $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{v}$ என்றும் கொள்வோம். அப்படியெனில் t அளவான இந்த நேர இடைவெளியில் சராசரித் திசைவேகம் $(\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v})/2$. சராசரித்திசைவேகத்தை நேரத்தால் பெருக்குவதால் இடநிலையை பெறுகிறோம்.

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0 = \frac{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_0}{2}t = \frac{\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{v}_0}{2}t$$
$$= \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$$

அதாவது,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2 \qquad (4.48)$$

(4.48) ஆம் சமன்பாட்டின் வகைக்கெழுவான $d\boldsymbol{r}/dt$ (4.46) ஆம் சமன்பாட்டை தருவதையும் $t = 0$த்தில் $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$ என்பதை நிறைவேற்றுவதையும் எளிதில் சரிபார்க்கலாம். (4.48) ஆம் சமன்பாட்டை அகைவடி வத்தில்

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2,$$
$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \qquad (4.49)$$

என்று எழுதலாம். (4.49)ஆம் சமன்பாட்டின் ஒரு உடனடியான பொருளுணர்வு என்னவென்றால், x, y திசையசைவுகளை ஒன்றுக்கொன்று சாராதவையாக கருதலாம். அதாவது, **இருபருமானத்தளத்தில் நிகழும் ஒரு பொருளின் அசைவுகளை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான திசைகளில் மாறா முடுக்கமுள்ள இரண்டு தனித்தனியான உடனிகழும் ஒற்றைப்பருமான அசைவுகளாக கருதலாம்**. இது பொருள்களின் இருபருமான அசைவில் மிகவும் பயன்படும் ஒரு முக்கியமான முடிபு. முப்பருமானத்திலும் இதைப்போன்ற ஒரு முடிபை பெறலாம். செங்குத்தான திசைகளை தேர்வது பல நிலைமைகளில் வசதியானது; இதை 4.10ஆம் பகுதியில் எறிவத்தின் அசைவில் காண்போம்.

சிக்கல் 4.5

ஒரு துகள் $t = 0$ த்தில் மூலத்தில் $5.0\,\hat{\boldsymbol{\imath}}\ m/s$ என்ற திசைவேகத்துடன் தொடங்கி, xy தளத்தில் அசைகிறது. அதை $3.0\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + 2.0\,\hat{\boldsymbol{j}}\ m/s^2$ என்ற முடுக்கத்தை விளைவிக்கும் ஒரு விசை உந்துகிறது. (அ) துகளின் x ஒருங்களவு $84\ m$ ஆயிருக்கும்போது y இன் ஒருங்களவு என்ன? (ஆ) இந்த நேரத்ததில் துகளின் வேகம் என்ன?

தீர்வு

(4.48) ஆம் சமன்பாட்டில் $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{0}$ என்று வைத்து, துகளின் இடநிலையை

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$$
$$= 5.0\,\hat{\boldsymbol{\imath}}\,t + \frac{1}{2}(3.0\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + 2.0\,\hat{\boldsymbol{j}})t^2$$
$$= (5.0\,t + 1.5\,t^2)\hat{\boldsymbol{\imath}} + 1.0\ t^2\,\hat{\boldsymbol{j}}$$

எனவே, $x(t) = 5.0\,t + 1.5\,t^2,\ \ y(t) = +1.0\,t^2$

$x = 84\ m$ என்றபோது y என்னவென்று காணவேண்டும். அதாவது,

$$5.0\,t + 1.5\,t^2 = 84\ m$$

இதிலிருந்து $t = 6\ s$ என்று அறிகிறோம்.

$t = 6\ s$ என்றபோது,

$$y = 1.0 \times 6^2\ m = 36.0\ m$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (5.0 + 3.0\,t)\hat{\boldsymbol{\imath}} + 2.0\,t\,\hat{\boldsymbol{j}}$$
$$= 23.0\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + 12.0\,\hat{\boldsymbol{j}}$$

வேகம் $= |\boldsymbol{v}| = \sqrt{23^2+12^2} = 26\ m\,s^{-1}$

4.9 இருபருமானத்தில் ஒப்பளவத்திசைவேகம்

3.7ஆம் பகுதியில் நேர்க்கோட்டசைவில் அறிமுகமான ஒப்பளவத்திசைவேகம் என்ற கருத்துருவை தளத்தசைவுக்கும் முப்பருமானத் தசைவுக்கும் எளிதில் நீட்டலாம். A , B என்ற பொருள்கள் (தரைபோன்ற ஒரு பொதுவான நோக்கீட்டுச்சட்டத் தைப்பொறுத்து) $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$ என்ற

திசைவேகங்களில் அசைவதாக கொள்வோம். அப்போது, B **யின் ஒப்பளவில்** A யின் திசைவேகம்

$$\boldsymbol{v}_{AB} = \boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B \qquad (4.50)$$

இதைப்போலவே, A**யின் ஒப்பளவில்** Bயின் திசைவேகம்

$$\boldsymbol{v}_{BA} = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A \qquad (4.51)$$

எனவே,

$$\boldsymbol{v}_{AB} = -\boldsymbol{v}_{BA} \qquad (4.52)$$

மேலும்

$$|\boldsymbol{v}_{AB}| = |\boldsymbol{v}_{BA}| \qquad (4.53)$$

சிக்கல் 4.6

மழை நெடுநிற்பமாக $35\, m\, s^{-1}$ வேகத்தில் பெய்கிறது. ஒருவர் மிதிவண்டியில் $12\, m\, s^{-1}$ வேகத்தில் மேற்குநோக்கி பயணிக் கிறார். அவர் எந்தத்திசையில் குடையை பிடிக்கவேண்டும்?

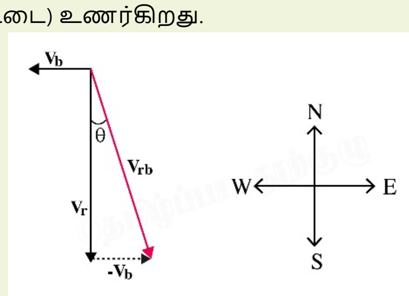
தீர்வு

படம் 4.16இல் $\boldsymbol{v}_{ம}$ மழையின் திசைவேகத் தையும் $\boldsymbol{v}_{மி}$ மிதிவண்டியின் திசைவேகத்தை யும் குறிக்கின்றன. இரண்டு திசைவேகங்க ளும் தரையைப்பொறுத்தவை. மிதிவண்டியில் பயணிப்பவர் உணரும் மழையின் திசை வேகம் மிதிவண்டியைப்பொறுத்த மழையின் திசைவேகமான $\boldsymbol{v}_{மமி} = \boldsymbol{v}_{ம} - \boldsymbol{v}_{மி}$. படம் 4.16இல் காட்டிய இந்த திசைவேகம் நெடுநிற்பத்துடன் θ என்ற கோணத்தை தாங்குகிறது. அதை

$$\text{தொவி}\, \theta = \frac{\boldsymbol{v}_{மி}}{\boldsymbol{v}_{ம}} = \frac{12}{35} = 0343, \qquad \theta \cong 19^{\circ}$$

தருகிறது. எனவே, மிதிவண்டிப்பயணி குடையை நெடுநிற்பத்திலிருந்து மேற்கில் சுமார் 19° சாய்த்து பிடிக்கவேண்டும்.

இந்த சிக்கலுக்கும் சிக்கல் 4.1க்குமுள்ள வேறுபாட்டை கவனமாக நோக்குக. அங்கு ஒரு பொருள் இரண்டு திசைவேகங்களின் விளைவு மத்தை (திசையன்கூட்டலை) உணர்ந்தது. இங்கு பொருள் தன் வினைவேகத்தின் ஒப்பள வில் மற்றொரு திசையனின் விளைவை (இரண்டு திசையன்களின் திசையவேறு பாட்டை) உணர்கிறது.

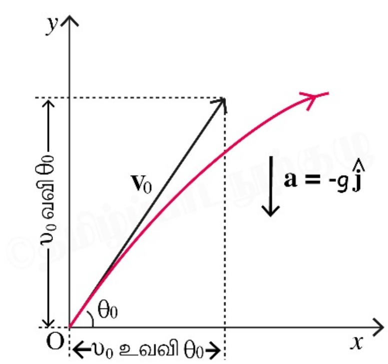


படம் 4.16

4.10 எறிவத்தின் அசைவு

முந்திய பகுதிகளில் வளராக்கிய கருத்துகளின் ஒரு பயன்பாடாக ஒரு எறிவத்தின் அசைவை கருதுவோம். எறியப்பட்ட ஒரு பொருள் பயணத்திலிருக்கும்போது அதை **எறிவம்** என்கி றோம். இவ்வாறான ஒரு எறிவம் காற்பந்தாகவோ, மட்டைப்பந்தாகவோ வேறு பொருளாகவோ இருக்கலாம். ஒரு எறிவத்தின் அசைவை இரண்டு தனித்தனி உடனிகழும் அசைவகைகளின் விளைவாக நாம் எண்ணலாம். ஒரு அகை கிடை மட்டத்திசையில் முடுக்கமின்றியும் மற்றது நெடுநிற்பத்திசையில் புவியீர்ப்புவிசையால் ஏற்படும் மாறிலியான முடுக்கத்துடனும் நிகழ்கின்றன. எறிவத்தின் அசைவில் கிடைமட்ட அசைவும் நெடுநிற்ப அசைவும் ஒன்றையொன்று சாராதிருப்பதை முதன்முதலில் கலிலியோ 1632இல் ***மாபெரும் உலகமைப்புகளைப் பற்றிய உரையாடல்*** என்ற தன் நூலில் உரைத்தார்.

நம் உரையளிப்பில், வளித்தடையம் எறிவத்தின் அசைவில் எவ்வித விளைவையும் ஏற்படுத்தவில்லை என்று எடுகொள்வோம். ஒரு எறிவம் $\boldsymbol{v}_0$ என்ற திசைவேகத்துடன் எறியப் படுவதாகவும் அது படம் 4.17இல் காட்டியபடி x அச்சுடன் θ_0 என்ற கோணத்தை தாங்குவதாக வும் கொள்வோம்.



படம் 4.17 v_0 என்ற திசைவேகத்துடன் θ_0 என்ற கோணத்தில் எறிந்த ஒரு எறிவத்தின் அசைவு

பொருள் எறியப்பட்டபின் அதன்மீது செயலாற்றும் முடுக்கம் புவியீர்ப்பினால் ஏற்படுகிறது. இந்த முடுக்கம் கீழ்நோக்கியது. அதாவது

$$\boldsymbol{a} = -g\hat{\boldsymbol{j}}$$

$$\text{அதாவது}\ a_x = 0, \qquad a_y = -g \qquad (4.54)$$

தொடக்கத்திசைவேகமான $\boldsymbol{v}_0$த்தின் அகைகள்

$$v_{0x} = v_0\, \text{உவவி}\, \theta_0\,, \qquad v_{0y} = v_0\, \text{வவி}\, \theta_0 \quad (4.55)$$

தொடக்க இடநிலையை படம் 4.17இல் காட்டியவாறு நோக்கீட்டுச்சட்டத்தின் மூலமாக எடுத்தால், $x_0 = 0,\ y_0 = 0$. அப்படியெனில், (4.49)ஆம் சமன்பாடு

$$x = v_{0x}\, t = v_0 t\, \text{உவவி}\, \theta_0\,,$$

$$y = v_0 t\, \text{வவி}\, \theta_0 - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (4.56)$$

என்றாகிறது. t என்ற நேரத்தில் திசைவேகத்தின் அகைகளை (4.47)ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$v_x = v_{0x} = v_0 \text{ உவவி } \theta_0 ,$$
$$v_y = v_0 \text{ வவி } \theta_0 - gt \qquad (4.57)$$

என்று பெறுகிறோம். (4.56) ஆம் சமன்பாடு t என்ற எந்த நேரத்திலும் எறிவத்தின் இடநிலையின் x , y அகைகளை தொடக்கத்திசைவேகமான v_0, எறிவக்கோணமான θ_0 ஆகிய இரண்டு அளவுருக்களின்வழி தருகிறது. ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான x , y என்ற இரண்டு திசைகளை பயன்படுத்துவது எறிவத்தசைவின் பகுப்பாய்வை எளிதாக்குவதை நோக்குக. திசைவேகத்தின் அகைகளுள் ஒன்றான x அகை அசைவுமுழுவதிலும் மாறிலியாகிறது; y யகை மட்டுமே நெடுநிற்பத்திசையில் தடங்கலற்று விழும் ஒரு பொருளைப்போல் மாறுகின்றது. இதை சில குறிப்பிட்ட நேரங்களில் படம் 4.18 காட்டுகிறது. உயரம் மீப்பெருமமாயிருக்கும் இடத்தில் $v_y = 0$ என்பதை நோக்குக. எனவே இங்கு

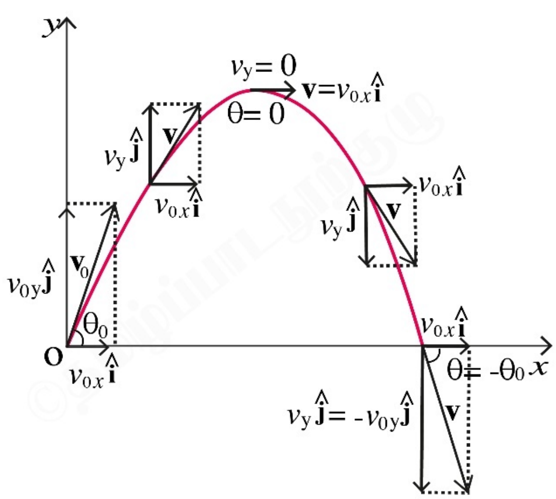
$$\theta = \text{தொவி}^{-1} \frac{v_y}{v_x} = 0$$

4.10.1 எறிவியப்பாதையின் சமன்பாடு

எறிவம் செல்லும் பாதையின் வடிவம் என்ன? இதைக்காண, (4.56) ஆம் சமன்பாட்டில் x க்கும் yக்குமான கோவைகளிலிருந்து tயை நீக்கி

$$y = (\text{தொவி } \theta)x - \frac{g}{2(v_0 \text{ உவவி } \theta_0)^2} x^2 \qquad (4.58)$$

என்பதை பெறுகிறோம். g, θ_0 , v_0 ஆகியவை மாறிலிகள் என்பதால் (4.58)ஆம் சமன்பாடு $y = ax + bx^2$ என்ற வடிவில், a , b ஆகிய மாறிலிகளுடன், இருக்கிறது. இது பரவளைவின் சமன்பாடு. அதாவது, எறிவத்தின் பாதை பரவளைவு (படம் 4.18).



படம் 4.18 எறிவத்தின் பாதை ஒரு பரவளைவு

4.10.2 மீப்பெரும உயரத்தை அடையும் நேரம்

எறிவம் மீப்பெரும உயரத்தை அடைய எவ்வளவு நேரம் ஆகிறது? இந்த நேரத்தை $t_{\text{மீ}}$ என்று குறிப்போம். இந்த இடத்தில் $v_y = 0$ என்பதால், (4.57)ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$v_y = v_0 \text{ வவி } \theta_0 - g\, t_{\text{மீ}} = 0,$$

$$\text{அதாவது } t_{\text{மீ}} = \frac{v_0 \text{ வவி } \theta_0}{g} \qquad (4.59)$$

எறிவம் பறப்பிலிருக்கும் மொத்த நேரத்தை $(T_{\text{பு}})$ பெற, (4.56) ஆம் சமன்பாட்டில் $y = 0$ என்று வைத்து

$$T_{\text{பு}} = \frac{2\, v_0 \text{ வவி } \theta_0}{g} \qquad (4.60)$$

என்று பெறுகிறோம். $T_{\text{பு}}$ ஐ எறிவத்தின் **பறப்புநேரம்** என்று அழைக்கிறோம். $T_{\text{பு}} = 2\, t_{\text{மீ}}$ என்பதை நோக்குக. இது பரவளைவுப்பாதையின் சமச்சீர்மையிலிருந்து நாம் எதிர்பார்ப்பதே.

4.10.3 மீப்பெரும உயரம்

எறிவம் அடையும் மீப்பெரும உயரத்தை $(h_{\text{மீ}})$ கணக்கிட (4.56)ஆம் சமன்பாட்டில் $t = t_{\text{மீ}}$ என்று மாற்றிட்டு

$$y = h_{\text{மீ}} = (v_0 \text{ வவி } \theta_0)\left(\frac{v_0 \text{ வவி } \theta_0}{g}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \text{ வவி } \theta_0}{g}\right)^2$$

என்று பெறுகிறோம். அதாவது

$$h_{\text{மீ}} = \frac{(v_0 \text{ வவி } \theta_0)^2}{2g} \qquad (4.61)$$

4.10.4 எறிவத்தின் கிடைமட்ட வீச்சளவு

எறிவம் $x = y = 0$ என்ற தன் தொடக்க இடநிலையிலிருந்து $y = 0$ அச்சுக்கு விழும்வரை பயணிக்கும் தொலைவை **கிடைமட்ட வீச்சளவு** என்கிறோம்; $x_{\text{வீ}}$ என்று குறிப்போம். அப்படியெனில்

$$x_{\text{வீ}} = (v_0 \text{ உவவி } \theta_0)\, T_{\text{பு}}$$
$$= (v_0 \text{ உவவி } \theta_0)\,(2v_0 \text{ வவி } \theta_0)/g$$

அதாவது

$$x_{\text{வீ}} = \frac{v_0^2 \text{ வவி } 2\theta_0}{g} \qquad (4.62)$$

v_0 என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட எறிவத்திசைவேகத்துக்கு, வவி $2\theta_0$ மீப்பெருமமாகும்போது $x_{\text{வீ}}$ மீப்பெருமமாகிறது என்று இந்த சமன்பாடு காட்டுகிறது; அதாவது $\theta_0 = 45°$ என்றபோது. எனவே, மீப்பெரும கிடைமட்ட வீச்சளவு

$$x_{\text{மீவீ}} = \frac{v_0^2}{g} \qquad (4.63)$$

சிக்கல் 4.7

கலிலியோ ***இரண்டு புதிய அறிவியல்கள்*** என்ற தன் நூலில், "$45°$க்கு சம அளவில் அதிகமாக வும் குறைவாகவும் உள்ள எறிவக்கோணங்களுக்கு வீச்சளவுகள் சமம்" என்று உரைத்தார். இந்த கூற்றை நிறுவுக.

தீர்வு

v_0 என்ற வேகத்தில் θ_0 என்ற கோணத்தில் எறிந்த ஒரு பொருளின் வீச்சளவு

$$x_{வீ} = \frac{v_0^2 \text{ வவி } 2\theta_0}{g}$$

$(45° + \alpha), (45° - \alpha)$ ஆகிய எறிகோணங்களுக்கு $2\theta_0$ முறையே $(90° + 2\alpha)$, $(90° - 2\alpha)$. இரண்டு வேற்றுவங்களிலும் வவி$(90° - 2\alpha)$, வவி$(90° + 2\alpha)$ ஆகிய இரண்டும் உவவி 2α என்ற மதிப்புக்கு சமமாவதால் ஒன்றுக்கொன்று சமம். எனவே, $45°$க்கு சம அளவில் அதிகமாகவும் குறைவாகவும் உள்ள எறிவக்கோணங்களுக்கு வீச்சளவுகள் சமம்.

சிக்கல் 4.8

ஒரு மலையேறுநர் தரையிலிருந்து $490\ m$ உயரமுள்ள ஒரு மலையுச்சியிலிருந்து ஒரு கல்லை $15\ m\ s^{-1}$ கிடைமட்டத்திசை வேகத்தில் வீசுகிறார். வளியுராய்வை புறக்கணித்து, கல் தரையை வந்தடைய ஆகும் நேரத்தையும் அது தரையில் மோதும் வேகத்தையும் காண்க. ($g = 9.8\ m\ s^{-2}$ எனக்கொள்க).

தீர்வு

மலையுச்சியை x, y யச்சுகளின் மூலமாகவும், கல்லை எறியும் நேரத்தை $t = 0$ என்றும், கல்லெறிந்த திசையை x அச்சின் நேர்மத் திசையாகவும், மேனோக்கிய நெடுநிற்பத் திசையை y யச்சின் நேர்மத்திசையாகவும் கொள்வோம். அசைவின் x, y அகைகளை தனித்தனியாக கையாளலாம். அசைவின் சமன்பாடுகள்

$$x(t) = x_0 + v_{0x}\, t$$

$$y(t) = y_0 + v_{ay}\, t + \frac{1}{2} a_y\, t^2$$

இங்கு, $x_0 = y_0 = 0$, $v_{0y} = 0$, $a_{0y} = -g = -9.8\ m\ s^{-2}$, $v_{0x} = 15\ m\ s^{-1}$.

கல் தரையில் விழும்போது $y(t) = -490\ m$. அதாவது $-490\ m = -\frac{1}{2}(9.8\ m\ s^{-2})\ t^2$.

இது $t = 10\ s$ என்று தருகிறது.

திசைவேகத்தின் அகைகள் $v_x = v_{0x}$, $v_y = v_{0y} - g\ t$.

கல் தரையில் விழும்போது, $v_x = 15\ m\ s^{-1}$, $v_y = (0 - 9.8 \times 10)\ m\ s^{-1} = -98\ m\ s^{-1}$.

எனவே கல்லின் வேகம் $= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{15^2 + 98^2} = 99\ m\ s^{-1}$

சிக்கல் 4.9

ஒரு மட்டைப்பந்தை கிடைமட்டத்துக்கு மேல் $30°$யில் $28\ m\ s^{-1}$ வேகத்தில் எறிகிறோம். (அ) மீப்பெரும உயரம், (ஆ) பந்து அதே மட்டத்துக்கு மீண்டும் வர ஆகும் நேரம், (இ) எறிந்தவரிலிருந்து பந்து அதே மட்டத்தை அடையுமிடத்துக்கான தொலைவு ஆகிய வற்றை கணக்கிடுக.

தீர்வு

(அ) மீப்பெரும உயரம்

$$h_{மீ} = \frac{(v_0 \text{ வவி } \theta_0)^2}{2g} = \frac{(28 \text{ வவி } 30°)^2}{2(9.8)}\ m$$

$$= \frac{14^2}{19.6}\ m = 10.0\ m$$

(ஆ) அதே மட்டத்துக்கு திரும்ப ஆகும் நேரம்

$$T_{ப} = \frac{2v_0 \text{ வவி } \theta_0}{g} = \frac{2 \times 28 \times \text{வவி } 30°}{9.8} = 2.9\ s$$

(இ) எறிந்தவரிலிருந்து பந்து அதே மட்டத்தை அடையும் இடத்தின் தொலைவு

$$x_{வீ} = \frac{v_0^2 \text{ வவி } 2\theta_0}{g} = \frac{28 \times 28 \times \text{வவி } 60°}{9.8}\ m$$

$$= 69\ m$$

வளித்தடையத்தை புறக்கணிப்பதன் பொருள் என்ன?

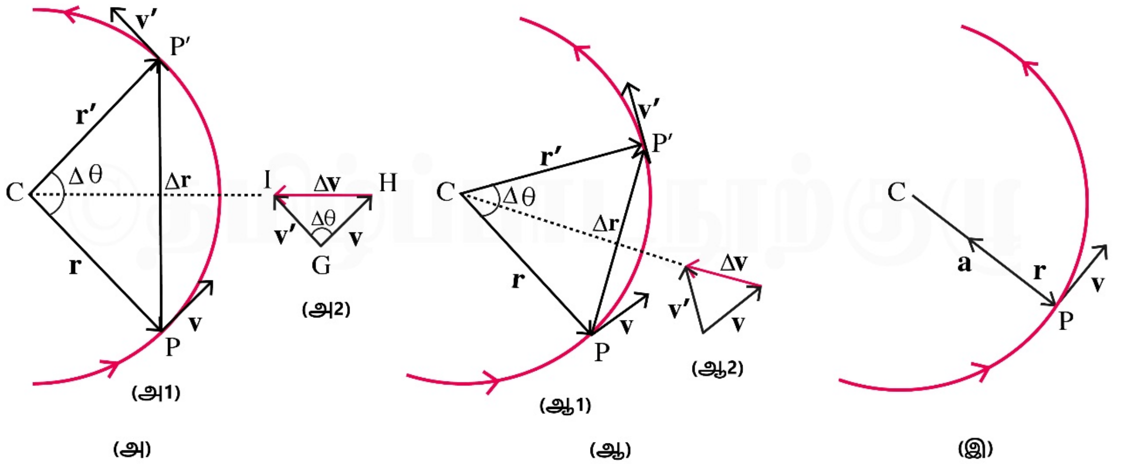
எறிவத்தின் அசைவை கையாளும்போது வளித்தடையம் பொருளின் அசைவின்மீது எந்த விளைவையும் ஏற்படுத்தவில்லை என்ற எடுகோளை உரைத்தோம். அந்த கூற்றின் உண்மையான பொருளை நீங்கள் அறிந்து கொள்ளவேண்டும். உராய்வு, பாகுமையின் விசை, வளித்தடையம் ஆகியவையெல்லாம் வெளிக்கசிவாக்கும் விசைகள். அசைவை எதிர்க்கும் இவ்வாறான ஒரு விசை இருக்கும் போது எந்தப்பொருளும் தன் தொடக்க ஆற்றலின் ஒரு பகுதியை இழக்கிறது; அதனால் உந்தத்தின் ஒரு பகுதியையும் இழக்கிறது. இவ்வாறு, பரவளைவுப்பாதையில் பயணிப்பதாக எதிர்பார்க்கும் ஒரு பொருளின் பாதை தடையம் இருக்கும்போது பரவளைவிலிருந்து விலகுகிறது. அது எறிந்த வேகத்திலே மீண்டும் வந்து விழாது. தடையம் இல்லாதபோது திசைவேகத்தின் x அகை மாறிலியாயிருந்து y அகை மட்டுமே தொடர்ச்சியாக மாறுகிறது. ஆனால், தடையம் இருக்கும்போது, இரண்டு அகைகளிலும் விளைவு ஏற்படுகிறது. இதனால், வீச்சளவு (4.63) ஆம் சமன்பாடு தருவதைவிட குறைகிறது. பறப்புநேரத்தில் ஏற்படும் மாற்றத்தை நீங்கள் சிந்திக்கலாம்.

வளித்தடையத்தை தவிர்க்க பரிசோதனையை வெற்றிடத்திலோ குறைந்த அழுத்தத்திலோ செயலாக்கவேண்டும். இது எளிதன்று. வளித்தடையத்தை புறக்கணிப்பது போன்ற சொற்றொடரை நாம் பயன்படுத்தும்போது,

வீச்சளவு, உயரம் போன்ற அளவுருக்களில் வளித்தடையத்தால் ஏற்படும் மாற்றங்கள் குறைவானவை என்பதையே உள்ளுரைக்கிறோம். வளித்தடையமற்ற கணக்கீடுகள் வளித்தடையத்தை கணக்கிலெடுக்கும் கணக்கீடுகளைவிட எளிமையானவை.

4.11 சீரான வட்டப்பாதையசைவு

ஒரு பொருள் வட்டமான பாதையில் மாறா வேகத்துடன் அசைவதை **வட்டச்சீரசைவு** என்கிறோம். சீரான என்ற சொல் அசைவுமுழுவதிலும் வேகம் சீராயிருப்பதை அதாவது மாறிலியாயிருப்பதை குறிக்கிறது. படம் 4.19இல் காட்டியபடி ஒரு பொருள் R ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில் v என்ற சீரான வேகத்தில் அசைவதாக கொள்வோம். பொருளின் திசைவேகத்தின் திசை எப்போதும் மாறிக்கொண்டிருப்பதால் பொருள் முடுக்கத்துக்கு உட்பட்டது. இந்த முடுக்கத்தின் பருமனளவையும் திசையையும் காண்போம்.



படம் 4.19 வட்டச்சீரசைவிலுள்ள பொருளின் திசைவேகமும் முடுக்கமும். Δt என்ற நேர இடைவெளி (அ)விலிருந்து (இ)க்கு குறைந்து அங்கு சுழியமாகிறது. பாதையின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் முடுக்கம் வட்டத்தின் மையத்தைநோக்கியுள்ளது.

படத்தில் P, P' என்று காட்டிய இடங்களில் பொருளின் இடநிலைத்திசையன்கள் $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$ என்றும் அதன் திசைவேகங்கள் $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$ என்றும் கொள்வோம். வரையறையின்படி, அந்தப்புள்ளியிலுள்ள திசைவேகம் அசைவின் திசையில் அந்தப்புள்ளியிலுள்ள தொடுகோட்டுக்கு நேரானது. $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$ ஆகிய திசைவேகங்களை படத்தின் ஆ1 காட்டுகிறது. ஆ2இல் திசையன்கூட்டலின் முக்கோணவிதியை பயன்படுத்தி $\Delta\boldsymbol{v}$ யை காண்கிறோம். பாதை வட்டமாயிருப்பதால் $\boldsymbol{v}$ என்ற திசைவேகம் $\boldsymbol{r}$க்கு செங்குத்தானது; $\boldsymbol{v}'$ என்பது $\boldsymbol{r}'$ க்கு செங்குத்தானது. எனவே, $\Delta\boldsymbol{v}$ $\Delta\boldsymbol{r}$க்கு செங்குத்தானது. சராசரிமுடுக்கமான $\overline{\boldsymbol{a}} = (\Delta\boldsymbol{v}/\Delta t)$ $\Delta\boldsymbol{v}$க்கு நேரானதால் $\Delta\boldsymbol{r}$க்கு செங்குத்தானது. $\Delta\boldsymbol{v}$ ஐ $\boldsymbol{r}$ க்கும் $\boldsymbol{r}'$ க்குமிடையிலான கோணத்தை இருசமவெட்டும்படி வைத்தால், அது வட்டத்தின் மையத்தைநோக்கி இருப்பதை காண்கிறோம். படம் 4.19(ஆ) சிறிய நேர இடைவெளிக்கான இதே அளவுகளை காட்டுகிறது. இங்கும் $\Delta\boldsymbol{v}$ யும் $\overline{\boldsymbol{a}}$ உம் மையத்தைநோக்கியவை படத்தின் (இ)யில் $\Delta t \to 0$ என்ற எல்லையில், சராசரிமுடுக்கம் உடனடி முடுக்கமாகிறது. இது மையத்தைநோக்கியது. இவ்வாறு, வட்டச்சீரசைவிலுள்ள ஒரு பொருளின் முடுக்கம் எப்போதும் வட்டத்தின் மையத்தை நோக்கி இருப்பதை அறிகிறோம்.

$\boldsymbol{a}$ யின் பருமனளவு, வரையறையின்படி

$$|\boldsymbol{a}| = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

இடநிலைத்திசையன்களான $\boldsymbol{r}$க்கும் $\boldsymbol{r}'$க்குமிடையான கோணம் $\Delta\theta$ என்க. திசைவேகங்களான $\boldsymbol{v}$யும் $\boldsymbol{v}'$உம் எப்போதும் இடநிலைத் திசையன்களுக்கு செங்குத்தானவை என்பதால், அவற்றுக்கிடையான கோணமும் $\Delta\theta$. எனவே, படம் 4.19(அ)வில் இடநிலைத்திசையன்களால் உருவாகும் CPP' என்ற முக்கோணமும் திசைவேகங்களால் உருவாகும் GHI என்ற முக்கோணமும் வடிவொத்தவை. எனவே, ஒரு முக்கோணத்தின் அடிநீளத்துக்கும் பக்கநீளத்துக்குமான விகிதம் மற்றதன் விகிதத்துக்கு சமம். அதாவது,

$$\frac{|\Delta\boldsymbol{v}|}{v} = \frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{R}, \qquad |\Delta\boldsymbol{v}| = v\frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{R}$$

எனவே

$$|\boldsymbol{a}| = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{|\Delta\boldsymbol{v}|}{\Delta t} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{v|\Delta\boldsymbol{r}|}{R\Delta t}$$
$$= \frac{v}{R} \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta t}$$

Δt சிறியது எனில், $\Delta\theta$வும் சிறியது. அப்போது PP' என்ற வில்லை தோராயமாக $|\Delta\boldsymbol{r}|$ என்று கொள்ளலாம்.

$$|\Delta \boldsymbol{r}| = v\Delta t, \qquad \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t} = v$$

அதாவது

$$\underset{\Delta t\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t} = v$$

எனவே, மையநோக்கு முடுக்கம்

$$a_{\text{மை}} = \left(\frac{v}{R}\right)v = \frac{v^2}{R} \qquad (4.64)$$

என்றாகிறது. இவ்வாறு, R ஆரமுள்ளள வட்டப் பாதையில் v வேகத்தில் அசையும் ஒரு பொருளின் முடுக்கத்தின் பருமனளவு v^2/R. அதன் திசை எப்போதும் மையத்தைநோக்கியது. இதனால் இதை **மையநோக்கிய** முடுக்கம் என்கிறோம் இந்த கலைச்சொல்லை முதலில் நியூட்டன் சொன்னார். மையநோக்கிய முடுக்கத்தைப்பற்றிய ஒரு விரிவான பகுப்பாய்வை நெதரிலாந்திய அறிவியலரான கிருத்தியான் கய்கன்சு (1629-1695) பதிப்பித்தார். ஆனால் நியூட்டனும் பல ஆண்டுகளுக்குமுன் இதை அறிந்திருக்க வாய்ப்புள்ளது. v யும் R உம் மாறிலிகளாதலால், மையநோக்கிய முடுக்கத்தின் பருமனளவும் மாறிலி. ஆனால், அதன் திசை எப்போதும் மையத்தைநோக்கி இருக்கும்படி மாறுகிறது. எனவே மையநோக்கிய முடுக்கம் ஒரு மாறிலித் திசையனன்று.

வட்டச்சீரசைவிலுள்ள ஒரு பொருளின் திசைவேகத்தையும் முடுக்கத்தையும் விவரிக்க மற்றொரு வழி உள்ளது. பொருள் ($t' - t$ க்கு சமமான) Δt என்ற நேரத்தில் P யிலிருந்து P' க்கு அசையும் போது படம் 4.19இன் CP என்ற கோடு படத்தில் காட்டியபடி $\Delta\theta$ என்ற கோணத்தில் திரும்புகிறது. இந்த கோணத்தை கோணத் தொலைவு என்கிறோம். கோணவிடப்பெயர்ச்சி மாறும் வீதத்தை கோணவேகம் என்றழைத்து ω (ஒமேகா) என்ற கிரேக்க எழுத்தால் குறிக்கிறோம்.

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (4.65)$$

பொருள் Δt என்ற நேரத்தில் பயணிக்கும் தொலைவு Δs எனில், அதாவது $PP' = \Delta s$ எனில்,

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

ஆனால், $\Delta s = R\,\Delta\theta$. எனவே,

$$v = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

அதாவது

$$v = R\omega \qquad (4.66)$$

மையநோக்கிய முடுக்கத்தை கோணவேகத்தின்வழி

$$a_{\text{மை}} = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R}$$

அதாவது

$$a_{\text{மை}} = \omega^2 R \qquad (4.67)$$

என்று எழுதலாம். பொருள் ஒரு சுற்றலை முடிக்க ஆகும் நேரத்தை சீரொழுங்குநேரம் (T) என்கிறோம். இந்த நேரத்தில் பொருள் பயணிக்கும் தொலைவு $s = 2\pi R$. ஒரு நொடியில் நிகழும் சுற்றல்களை அதன் அலைவெண் என்றழைத்து ν எனறு குறிக்கிறோம். அதாவது, $\nu = 1/T$. எனவே

$$v = \frac{2\pi R}{T} \qquad (4.68)$$

அலைவெண்ணின்வழி

$$\omega = 2\pi\nu, \qquad v = 2\pi R\nu$$

$$a_{\text{மை}} = 4\pi^2\nu^2 R \qquad (4.69)$$

சிக்கல் 4.10

$12\ cm$ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டமான வரிப்பள்ளத்தில் சிக்கிக்கொண்ட ஒரு பூச்சி வரிப்பள்ளத்தின்வழியாக சீராக அசைந்து $100\ s$இல் 7 சுற்றல்களை முடிக்கிறது. (அ) அசைவின் கோணவேகமும் நேரியவேகமும் யாவை? (ஆ) முடுக்கத்திசையன் மாறிலித் திசையனா? அதன் பருமனளவு என்ன?

தீர்வு

இது ஒரு வட்டச்சீரசைவு. இங்கு $R = 12\ cm$. கோணவேகம்

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \times \frac{7}{100} = 0.44\ rad/s$$

நேரியவேகம்

$$v = \omega R = 0.44\ s^{-1} \times 12\ cm = 5.3\ cm\ s^{-1}$$

நேரியத்திசைவேகத்தின் திசை ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வட்டத்தின் தொடுகோட்டுக்கு நேராக உள்ளது. முடுக்கம் வட்டத்தின் மையத்தை நோக்கியது. இந்த திசை தொடர்ச்சியாக மாறிக்கொண்டிருப்பதால் இங்கு முடுக்கம் மாறிலித்திசையனன்று. ஆனால், முடுக்கத்தின் பருமனளவு மாறிலி:

$$a = \omega^2 R = (0.44\ s^{-1})^2\ (12\ cm) = 2.3\ cm\ s^{-2}$$

சுருக்கவுரை

1. **திசையிலி**யளவுகளுக்கு பருமனளவு மட்டும் உள்ளது. தொலைவு, வேகம், நிறை, வெப்பநிலை ஆகியவை சான்றுகள்.
2. **திசையன**ளவுகளுக்கு பருமனளவும் திசையும் உள்ளன. இடப்பெயர்ச்சி, திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவை சான்றுகள்.
3. $\boldsymbol{A}$ என்ற திசையனை λ என்ற மெய்யெண்ணால் பெருக்குவதன் விளைவும் ஒரு திசையன். அதன் பருமனளவு $\boldsymbol{A}$யின் பருமனளவின் λ மடங்கு. அதன் திசை λ நேர்மமா எதிர்மமா என்பதைச்சார்ந்து $\boldsymbol{A}$யின் திசையிலோ எதிர்த்திசையிலோ உள்ளது.

4. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ என்ற இரண்டு திசையன்களை **முக்கோணமுறை**யையோ **இணைகரமுறை**யையோ பயன்படுத்தி படவரைவால் கூட்டலாம்.
5. திசையன்கூட்டல் **முறைமைமாற்ற**த்தக்கது. அதாவது, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}.$
6. **சுழியத்திசைய**னின் பருமனளவு சுழியம். இதனால் அதன் திசையை நாம் குறிப்பிடவேண்டியதில்லை.
7. $\boldsymbol{A}$ யிலிருந்து $\boldsymbol{B}$ யை கழிக்கும் திசையக்கழித்தலை $\boldsymbol{A}$, $-\boldsymbol{B}$ ஆகியவற்றின் கூட்டல் என்று வரையறுக்கிறோம். அதாவது $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.
8. $\boldsymbol{A}$ என்ற திசையனை அதன் தளத்தில் கிடக்கும் $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ என்ற இரண்டு திசையன்களுக்கு நேரான அகைகளாக **அகைபிரி**க்கலாம்.
$$\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$$
இங்கு λவும் μவும் மெய்யெண்கள்.
9. $\boldsymbol{A}$ என்ற திசையனுடன் தொடர்பான அலகுத்திசையனின் பருமனளவு 1; அதன் திசை $\boldsymbol{A}$ யின் திசைக்கு நேரானது. அதாவது
$$\hat{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{A}/|\boldsymbol{A}|$$
$\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, $\hat{\boldsymbol{k}}$ ஆகியவை வலக்கையொருங்களவமைப்பின் x,y,z அச்சுகளுக்கு நேரான அலகுத்திசையன்கள்.
10. $\boldsymbol{A}$ என்ற திசையனை
$$\boldsymbol{A}=A_x\hat{\boldsymbol{\imath}}+A_y\boldsymbol{j}$$
என்று குறிப்பிடலாம். இங்கு, A_xயும் A_yயும் முறையே x,yஅச்சுகளுக்குநேரான அகைகள். $\boldsymbol{A}$ என்ற திசையன் x அச்சுடன் தாங்கும் கோணம் θ எனில் $A_x=A$ உவவி θ , $A_y=A$ வவி θ , $A=|\boldsymbol{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2}$**,** தொவி $\theta=\frac{A_y}{A_x}$.
11. திசையன்களை **பகுப்பாய்வுமுறை**யில் கூட்டுவது வசதியானது. xyதளத்தில் கிடக்கும் $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ என்ற இரண்டு திசையன்களின் கூட்டல்
$$\boldsymbol{R}=R_x\hat{\boldsymbol{\imath}}+R_y\hat{\boldsymbol{\jmath}},\qquad \text{இங்கு } R_x=A_x+B_x,\qquad R_y=A_y+B_y$$
12. xyதளத்திலுள்ள ஒரு பொருளின் இடநிலைத்திசையன் $\boldsymbol{r}=x\hat{\boldsymbol{\imath}}+y\hat{\boldsymbol{\jmath}}$. இந்த இடநிலையிலிருந்து $\boldsymbol{r}'$க்கு **இடப்பெயர்ச்சி**
$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}=(x'-x)\hat{\boldsymbol{\imath}}+(y'-y)\hat{\boldsymbol{\jmath}}=\Delta x\hat{\boldsymbol{\imath}}+\Delta y\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$
13. ஒரு பொருள் Δt என்ற நேர இடைவெளியில் $\Delta\boldsymbol{r}$ என்ற இடப்பெயர்ச்சிக்கு உட்பட்டால், அதன் சராசரி திசைவேகம் $\boldsymbol{v}=\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$. t என்ற நேரத்தில் ஒரு பொருளின் திசைவேகத்தை Δt சுழியத்தை அணுகும்போது சராசரித்திசைவேகத்தின் எல்லை என்று வரையறுக்கிறோம்.
$$\boldsymbol{v}=\underset{\Delta t\to 0}{\text{எல்லை}}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$
திசையக்குறியீட்டில்
$$\boldsymbol{v}=v_x\hat{\boldsymbol{\imath}}+v_y\hat{\boldsymbol{\jmath}}+v_z\hat{\boldsymbol{k}},\qquad \text{இங்கு,}\qquad v_x=\frac{dx}{dt},\qquad v_y=\frac{dy}{dt},\qquad v_z=\frac{dz}{dt}$$
பொருளின் இடநிலையை ஒருங்களவமைப்பில் வரையும்போது $\boldsymbol{v}$ எப்போதும் பொருளின் பாதையைக்குறிக்கும் வளைவரையின் தொடுகோட்டுக்கு நேராக இருக்கிறது.
14. பொருளின் திசைவேகம் Δt என்ற நேரத்தில் $\boldsymbol{v}$யிலிருந்து $\boldsymbol{v}'$க்கு மாறினால், அதன் சராசரிமுடுக்கம்
$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'}{\Delta t}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$$
t என்ற நேரத்தில் முடுக்கம் சராசரிமுடுக்கத்தின் $\Delta t\to 0$ என்ற எல்லைமதிப்பு
$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$
அகைவடிவத்தில்
$$\boldsymbol{a}=a_x\hat{\boldsymbol{\imath}}+a_y\hat{\boldsymbol{\jmath}}+a_z\hat{\boldsymbol{k}},\qquad \text{இங்கு,}\qquad a_x=\frac{dv_x}{dt},a_y=\frac{dv_y}{dt},a_z=\frac{dv_z}{dt}$$
15. தளத்தில் அசையும் ஒரு பொருளின் மாறாமுடுக்கம் $a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$ என்றும் $t=0$ என்ற நேரத்தில் அதன் இடநிலைத்திசையன் $\boldsymbol{r}_0$ என்றும் இருந்தால், t என்ற எந்த நேரத்திலும் இடநிலை

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$$

திசைவேகம

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t$$

இங்கு $\boldsymbol{v}_0$ என்பது $t = 0$ என்ற நேரத்திலுள்ள தொடக்கத்திசைவேகம். இவற்றின் அலகுவடிவம்

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2, \qquad y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

தளத்திலுள்ள அசைவை இரண்டு செங்குத்துத்திசைகளிலுள்ள தனித்தனி உடனிகழும் ஒற்றைப்பருமான அசைவுகளின் சேர்க்கையாக கருதலாம்.

16. ஒரு பொருளை எறிந்தபின் அது பறப்பிலிருக்கும்போது அதை **எறிவம்** என்றழைக்கிறோம். ஒரு பொருளை x அச்சுடன் θ_0 என்ற கோணத்தைத்தாங்கும் $\boldsymbol{v}_0$ என்ற தொடக்கத்திசைவேகத்துடன் எறிந்தால், அதன் தொடக்க இடநிலை ஒருங்களவமைப்பின் மூலத்தில் இருப்பதாகக்கொண்டு, எறிவத்தின் இடநிலையையும் திசைவேகத்தையும்

$$x = v_0\, t \text{ உவவி } \theta_0\,, \qquad y = v_0\, t \text{ வவி } \theta_0 - \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

$$v_x = v_{0x} = v_0 \text{ உவவி } \theta_0\,, \qquad v_y = v_0 \text{ வவி } \theta_0 - g\, t$$

என்று பெறுகிறோம். எறிவத்தின் பாதை

$$y = x \text{ தொவி } \theta_0 - \frac{g\, x^2}{2(v_0 \text{ உவவி } \theta_0)^2}$$

எனும் **பரவளைவானது**. எறிவம் அடையும் **மீப்பெரும உயரம்**

$$h_m = \frac{(v_0 \text{ வவி } \theta_0)^2}{2g}$$

இந்த உயரத்தை அடைய ஆகும் **நேரம்**

$$t_{\text{மீ}} = \frac{v_0 \text{ வவி } \theta_0}{g}$$

எறிவம் தன் தொடக்க இடநிலையிலிருந்து $y = 0$ என்ற கோட்டைக்கடக்கும் இடத்துக்கு உள்ள தொலைவை அதன் **வீச்சளவு** என்கிறோம். அது

$$x_{\text{வீ}} = \frac{v_0^2}{g} \text{ வவி } 2\theta_0$$

17. ஒரு பொருள் சீரான வேகத்துடன் R ஆரமுள்ள ஒரு ஒரு வட்டப்பாதையில் அசைவதை **வட்டச்சீரசைவு** என்கிறோம். அதன் முடுக்கத்தின் பருமனளவு $a_{\text{வ}} = v^2/R$. இந்த முடுக்கத்தின் திசை எப்போதும் வட்டத்தின் மையத்தைநோக்கியது. கோணத்தொலைவு மாறும் வீதத்தை கோணவேகம் (ω) என்கிறோம். இது திசைவேகத்துடன் $v = \omega R$ என்ற தொடர்புள்ளது. வட்டச்சீரசைவிலுள்ள பொருளின் சுழற்சியின் சீரொழுங்குநேரம் T, அதன் அலைவெண் ν எனில்,

$$\omega = 2\pi\nu, \qquad v = 2\pi\nu R, \qquad a_{\text{வ}} = 4\pi^2\nu^2 R$$

இயலளவு	குறியீடு	பருமானங்கள்	அலகு	குறிப்பு
இடநிலைத்திசையன் இடப்பெயர்ச்சி	$\boldsymbol{r}$ $\boldsymbol{\Delta r}$	$[L]$ $[L]$	m m	திசையன். வேறு எந்த குறியீட்டாலும் குறிக்கலாம்.
திசைவேகம் சராசரி உடனடி	$\bar{\boldsymbol{v}}$ $\boldsymbol{v}$	$[LT^{-1}]$	$m\,s^{-1}$	திசையன் $= \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ $= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$
முடுக்கம் சராசரி உடனடி	$\bar{\boldsymbol{a}}$ $\boldsymbol{a}$	$[LT^{-2}]$	$m\,s^{-2}$	திசையன் $= \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ $= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$

எறிவியசைவு மீயதிய உயர நேரம் மீப்பெரும உயரம் கிடைமட்ட வீச்சளவு	$t_{\text{மீ}}$ $h_{\text{மீ}}$ $x_{\text{வீ}}$	$[T]$ $[L]$ $[L]$	s m m	$= \frac{v_0 \text{ வவி } \theta_0}{g}$ $= \frac{(v_0 \text{ வவி } \theta_0\ )^2}{2g}$ $= \frac{(v_0^2 \text{ வவி } 2\theta_0)}{g}$
வட்டசைவு கோணவேகம் மையநோக்கிய முடுக்கம்	ω $a_{\text{மை}}$	$[T^{-1}]$ $[LT^{-2}]$	$rad\ s^{-1}$ $m\ s^{-2}$	$= \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ $= \frac{v}{r}$ $= \frac{v^2}{r}$

உங்கள் சிந்தனைக்கு

1. ஒரு பொருள் இரண்டு புள்ளிகளிடையில் பயணிக்கும் பாதையின் நீளம் பொதுவாக இடப்பெயர்ச்சியின் பருமனளவுக்கு சமமன்று. இடப்பெயர்ச்சி நுனிப்புள்ளிகளை மட்டுமே சார்ந்தது. பாதை நீளம், அதன் பெயருக்கேற்றபடி, பாதையை சார்ந்தது. பயணத்தின்போது பொருள் திசைமாறாதபோது மட்டுமே இரண்டு அளவுகளும் சமமானவை. மற்ற எல்லா வேற்றுவங்களிலும் பாதைநீளம் இடப்பெயர்ச்சியின் பருமனளவைவிட அதிகமானது.
2. மேற்சொன்ன அதே நோக்கில், ஒரு நேர இடைவெளியில் பொருளின் சராசரிவேகம் அதன் சராசரித்திசைவேகத்தின் பருமனளவைவிட அதிகமாகவோ சமமாகவோ இருக்கவேண்டும். அவை சமமாவது பாதைநீளம் இடப்பெயர்ச்சியின் பருமனளவுக்கு சமமாயிருக்கும்போது மட்டுமே.
3. (4.46), (4.48)ஆகிய திசையச்சமன்பாடுகள் ஒருங்களவமைப்பை சார்ந்திருக்கவில்லை. அவற்றை எந்த இரண்டு சாரா அச்சுகளுக்குநேராகவும் அகைபிரிக்கலாம்.
4. சீரான முடுக்கத்துக்கான அசைவியச்சமன்பாடுகள் வட்டச்சீரசைவுக்கு பயனாகவில்லை; ஏனெனில், இந்த வேற்றுவத்தில் முடுக்கத்தின் பருமனளவு மாறிலி எனினும் அதன் திசை மாறுகிறது.
5. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ ஆகிய இரண்டு திசைவேகங்களுக்கு உட்பட்ட பொருளின் விளைவுமத்திசைவேகம் $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$. இதை முதற்பொருளின் திசைவேகத்தின் ஒப்பளவில் இரண்டாந்திசைவேகமான $\boldsymbol{v}_{12} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ என்பதிலிருந்து கவனமாக வேறுபடுத்துக. இங்கு $\boldsymbol{v}_1$ உம் $\boldsymbol{v}_2$ உம் ஒரு பொதுவான நோக்கீட்டுச்சட்டத்தில் குறித்த திசைவேகங்கள்.
6. வட்டத்தில் அசையும் ஒரு பொருளின் வேகம் மாறிலியாயிருந்தால் மட்டுமே அதன் விளைவும முடுக்கம் மையத்தை நோக்கியது.
7. ஒரு பொருளின் அசைவுப்பாதையின் வடிவம் அதன் முடுக்கத்தை மட்டும் சார்ந்திருக்கவில்லை; அது அசைவின் தொடக்கநிலவரங்களையும் (தொடக்க இடநிலையையும் திசைவேகத்தையும்) சார்ந்தது. சான்றாக, புவியீர்ப்பின் முடுக்கத்திலிருக்கும் ஒரு பொருளின் வீசுபாதை தொடக்கநிலவரத்தைப்பொறுத்து நேர்க்கோட்டிலோ பரவளைவிலோ இருக்கலாம்.

பயிற்சிகள்

4.1 கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு அளவும் திசையிலியா திசையனா என்று கூறுக: பருமன், நிறை, வேகம், முடுக்கம், அடர்வு, மோலெண்ணிக்கை, திசைவேகம், கோண அலைவெண், இடப்பெயர்ச்சி, கோணத்திசைவேகம்.

4.2 கீழுள்ள பட்டியலிலிருந்து இரண்டு திசையிலிகளை தேர்க: விசை, கோணவுந்தம், வேலை, மின்னோட்டம், நேரியவுந்தம், மின்புலம், சராசரித்திசைவேகம், காந்தத்திருப்புமை, ஒப்புமத்திசைவேகம்.

4.3 கீழ்க்காணும் பட்டியலில் ஒரே ஒரு திசையன் உள்ளது. அது எது? வெப்பநிலை, அழுத்தம், கணத்தாக்கம், நேரம், திறன், மொத்தப்பாதைநீளம், ஆற்றல், நிறையீர்ப்பின் ஆற்றநிலை, உராய்வுக்கெழு, மின்மம்.

4.4 திசையிலிகளும் திசையன்களுமான இயலளவுகளுக்கிடையில் கீழ்க்காணும் குறிக்கணிதச்செயலங்கள் பொருளுள்ளவையா என்பதை காரணங்களுடன் கூறுக.

a. எந்த இரண்டு திசையிலிகளையும் கூட்டல்
b. ஒரு திசையனுடன் அதே பருமானங்களுள்ள ஒரு திசையிலியை கூட்டல்
c. எந்த திசையனையும் ஒரு திசையிலியால் பெருக்கல்
d. எந்த இரண்டு திசையிலிகளையும் பெருக்கல்
e. எந்த இரண்டு திசையன்களையும் கூட்டல்
f. ஒரு திசையனின் அகையை அதே திசையனுடன் கூட்டல்

4.5 கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு கூற்றையும் கவனமாக வாசித்து அது சரியா தவறா என்று உரைக்க

a. ஒரு திசையனின் பருமனளவு எப்போதும் திசையிலி.
b. ஒரு திசையனின் ஒவ்வொரு அகையும் எப்போதும் திசையிலி.
c. ஒரு துகளின் இடப்பெயர்ச்சித்திசையனின் பருமனளவு எப்போதும் அதன் பாதையின் நீளத்துக்கு சமம்.
d. துகளின் சராசரி வேகம் (பாதையின் மொத்தநீளத்தை அதை கடக்க ஆகும் நேரத்தால் வகுத்தது) அதே நேர இடைவெளியில் துகளின் சராசரித்திசைவேகத்தின் பருமனளவைவிட அதிகமானதோ அதற்கு சமமானதோ.
e. ஒரே தளத்தில் இல்லாத மூன்று திசையன்களை கூட்டி சுழியத்திசையனை பெறவியலாது.

4.6 வடிவியலாலோ வேறு வழியிலோ கீழ்க்காணும் திசையமுற்றொருமைகளை நிறுவுக.

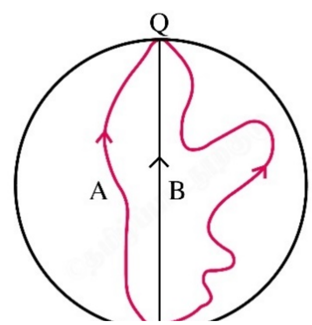
a. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$
b. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \geq \big||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\big|$
c. $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$
d. $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \geq ||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$

சமக்குறி எப்போது பயனாகிறது?

4.7 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$ எனில், கீழ்க்கண்ட கூற்றுகளுள் எவை சரியானவை?

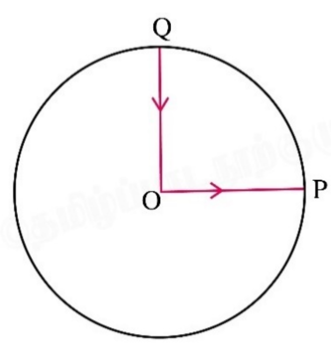
a. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ ஆகிய ஒவ்வொன்றும் சுழியமாயிருக்கவேண்டும்
b. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$யின் பருமனளவு $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$யின் பருமனளவுக்கு சமம்
c. $\boldsymbol{a}$ யின் பருமனளவு $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ ஆகியவற்றின் பருமனளவுகளின் கூட்டலைவிட அதிகமாயிருக்க இயலாது.
d. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{d}$ கோடமையாதவை எனில் $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ அவற்றின் தளத்திலும் கோடமைந்தவை எனில் அவற்றின் கோட்டிலும் இருக்கவேண்டும்.

4.8 $200\ m$ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டமான பனியரங்கில் பனிச்சறுக்கும் மூன்று பெண்கள் அரங்கத்தின் விளிம்பிலுள்ள P என்ற புள்ளியில் தொடங்கி படம் 4.20இல் காட்டியபடி வெவ்வேறு பாதைகளில் சறுக்கி அரங்கத்தின் விட்டமெதிரான Q என்ற புள்ளியை வந்தடைகிறார்கள். ஒவ்வொருவருக்கும் இடப்பெயர்ச்சித்திசையனின் பருமனளவு என்ன? யாருக்கு இது சறுக்கற்பாதையின் நீளத்துக்கு சமம்?



படம் 4.20

4.9 ஒரு மிதிவண்டியர் $1\ km$ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டமான பூங்காவின் மையத்தில் தொடங்கி P என்ற விளிம்பை அடைகிறார் (படம் 4.21). பிறகு வட்டத்தின் பரிதியிலே பயணித்து Q என்ற இடத்தை அடைந்து அதன்பின் நேராக மையத்துக்கு திரும்புகிறார். இந்த மீட்பயணத்துக்கு 10 நிமிடங்கள் ஆனால், (அ) நிகர இடப்பெயர்ச்சி, (ஆ) சராசரி திசைவேகம், (இ) சராசரி வேகம் ஆகியவை யாவை?



4.10 ஒரு திறந்த வெளியில் ஒருவர் 500 மீட்டருக்கொருமுறை $60°$ இடப்பக்கமாக திரும்பும் ஒரு பாதையில் உந்துவண்டியில் பயணிக்கிறார். ஒரு குறிப்பிட்ட திருப்பத்திலிருந்து மூன்றாவது, ஆறாவது, எட்டாவது திருப்பங்களில் அவரது இடப்பெயர்ச்சியை குறிப்பிடுக. ஒவ்வொரு வேற்றுவத்திலும் இடப்பெயர்ச்சியின் பருமனளவை பாதையின் மொத்த நீளத்துடன் ஒப்பிடுக.

4.11 புது நகரில் வந்திறங்கிய ஒரு பயணி நிலையத்திலிருந்து நேர்ச்சாலையில் $10\ km$ தொலைவிலுள்ள ஒரு விடுதிக்கு செல்ல விரும்புகிறார். ஒரு ஏமாற்றுக்கார வாடகைவண்டியர் $23\ km$ தொலைவுள்ள ஒரு சுற்றுப்பாதையில் 28 நிமிடங்கள் பயணித்து விடுதியை அடைகிறார். (அ) வாடகைவண்டியின் சராசரிவேகம் என்ன? (ஆ) சராசரி திசைவேகத்தின் பருமனளவு என்ன? (இ) அவை சமமா?

படம் 4.21

4.12 மழை நெடுநிற்பமாக $30\ m\ s^{-1}$ வேகத்தில் விழுகிறது. ஒரு மனிதி $10\ m\ s^{-1}$ வேகத்தில் வடக்கிலிருந்து தெற்காக மிதிவண்டியில் செல்கிறாள். இவள் எந்தத்திசையில் குடையை பிடிக்கவேண்டும்?

4.13 ஒரு மனிதனுக்கு நிலையான நீரில் $4.0\ km/h$ வேகத்தில் நீந்தவியலும். $1.0\ km$ அகலமுள்ள ஒரு ஆறு $3.0\ km/h$ வேகத்தில் சீராக ஓடும்போது நீந்துநர் நீரோட்டத்துக்கு செங்குத்தாக நீந்தினால், ஆற்றை கடக்க இவருக்கு எவ்வளவு நேரம் ஆகும்? மறுகரையை அடையும்போது ஆற்றின் திசையில் எவ்வளவு தொலைவு சென்றிருப்பார்?

4.14 ஒரு துறைமுகத்தில், காற்று $72\ km/h$ வேகத்தில் வீசுகிறது. நங்கூரமிட்ட ஒரு படகின் பாய்மரத்திலுள்ள கொடி வடகிழக்குத்திசையில் படபடக்கிறது. படகு வடக்குநோக்கி $51\ km/h$ வேகத்தில் பயணிக்கத் தொடங்கினால், கொடியின் திசை எது?

4.15 ஒரு நீண்ட கூடத்தின் கூரை $25\ m$ உயரமானது. $40\ m\ s^{-1}$ வேகத்தில் எறியப்படும் ஒரு பந்து கூரையை தட்டாமல் செல்லக்கூடிய மீப்பெரும தொலைவு எவ்வளவு?

4.16 ஒரு மட்டைப்பந்தர் மீப்பெருமமாக $100\ m$ கிடைமட்டத்தொலைவில் பந்தை வீசலாம். அதே பந்தை அவர் தரைக்குமேல் மீப்பெருமமாக எவ்வளவு உயரத்துக்கு வீசலாம்?

4.17 $80\ cm$ நீளமான ஒரு கயிற்றில் கட்டிய ஒரு கல்லை கிடைமட்டத்தளத்தில் ஒரு வட்டப்பாதையில் சீரான வேகத்தில் சுற்றுகிறோம். கல் $25\ s$யில் 14 முறை சுற்றினால், கல்லின் முடுக்கத்தின் பருமனளவும் திசையும் யாவை?

4.18 ஒரு வானூர்தி கிடைமட்டத்தளத்தில் சீரான $900\ km/h$ வேகத்தில் $1.00\ km$ ஆரத்தில் வட்டமடிக்கிறது. அதன் மையநோக்கிய முடுக்கத்தை புவியீர்ப்புமுடுக்கத்துடன் ஒப்பிடுக.

4.19 கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு கூற்றையும் கவனமாக வாசித்து அது மெய்யா பொய்யா என்பதை காரணங்களுடன் கூறுக

a. வட்டத்தில் அசையும் ஒரு துகளின் நிகரமுடுக்கம் *எப்போதும்* வட்டத்தின் ஆரத்துக்குநேராக மையத்தைநோக்கியது.

b. ஒரு புள்ளியில் ஒரு துகளின் திசைவேகத்திசையன் *எப்போதும்* அந்தப்புள்ளியில் துகளின் பாதையின் தொடுகோட்டுக்கு நேரானது.

c. *வட்டச்சீரசை*விலுள்ள ஒரு துகளின் ஒரு முழுச்சுற்றின்போது அதன் முடுக்கத்திசையனின் சராசரி சுழியம்.

4.20 ஒரு துகளின் இடநிலையை $\boldsymbol{r} = 3.0\,t\,\hat{\boldsymbol{\imath}} - 2.0\,t^2\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 4.0\,\hat{\boldsymbol{k}}\,m$ தருகிறது; இங்கு, t நொடியிலும் கெழுக்கள் $\boldsymbol{r}$ மீட்டரில் இருக்கத்தகுந்த அலகுகளிலும் உள்ளன. (அ) துகளின் $\boldsymbol{v}$ யையும் $\boldsymbol{a}$ யையும் காண்க. (ஆ) $t = 2.0\ s$யில் துகளின் திசைவேகத்தின் பருமனளவும் திசையும் யாவை?

4.21 $t = 0\ s$ யில் ஒரு துகள் மூலத்தில் $10.0\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\,m\,s^{-1}$ திசைவேகத்தில் தொடங்கி xy தளத்தில் $(8.0\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + 2.0\,\hat{\boldsymbol{\jmath}})\ m\ s^{-2}$ என்ற சீரான முடுக்கத்துடன் அசைகிறது. (அ) எந்த நேரத்தில் துகளின் xஒருங்களவு $16\ m$ ஆகிறது? (ஆ) அந்த நேரத்தில் அதன் yஒருங்களவு என்ன? (இ) அந்த நேரத்தில் துகளின் வேகம் என்ன?

4.22 $\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ முறையே x, y திசைகளிலுள்ள அலகுத்திசையன்கள். $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ ஆகிய திசையன்களின் பருமளவுகளும் திசைகளும் யாவை? இவற்றின் திசைகளில் $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 3\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ என்ற திசையனின் அகைகள் யாவை? (படவரைவுமுறையை பயன்படுத்தலாம்).

4.23 வெளியில் ஒரு குறிப்பற்ற அசைவுக்கு, கீழ்க்காண்பவற்றுள் எவை மெய்?

a.
$$\boldsymbol{v}_{\text{சராசரி}} = \frac{1}{2\big(\boldsymbol{v}(t_1) + \boldsymbol{v}(t_2)\big)}$$

b.
$$\boldsymbol{v}_{\text{சராசரி}} = \frac{\Big(\big(\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1)\big)\Big)}{t_2 - t_1}$$

c.
$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(0) + \boldsymbol{a}\,t$$

d.
$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(0) + \boldsymbol{v}(0)t + \frac{1}{2}at^2$$

e.
$$\boldsymbol{a}_{\text{சராசரி}} = \frac{\big(\boldsymbol{v}(t_2) - \boldsymbol{v}(t_1)\big)}{t_2 - t_1}$$

சராசரி t_1முதல் t_2வரையான நேர இடைவெளியின் சராசரியை குறிக்கிறது.

4.24 கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு கூற்றையும் கவனமாக வாசித்து அது மெய்யா பொய்யா என்பதை காரணங்களுடன் கூறுக.

திசையிலி

a. ஒரு நிகழ்வில் அழியாக்காப்புறுவது.

b. எதிர்ம மதிப்பை எடுக்காதது.

c. பருமானமற்றதாக இருக்கவேண்டும்.

d. வெளியில் ஓரிடத்திலிருந்து மற்றோரிடத்துக்கு மாறாதது.

e. அச்சுகளின் வெவ்வேறு திசையமைவுகளுள்ள கண்டறிவோருக்கு ஒரே மதிப்புடையது.

4.25 ஒரு வானூர்தி தரைக்கு $3400\ m$க்குமேல் பறக்கிறது. தரையிலுள்ள ஒரு கண்டறிதற்புள்ளியிலிருந்து $10.0\ s$ இடைவெளியில் வானூர்தியின் இடநிலைகள் $30°$ யை தாங்கினால், வானூர்தியின் வேகம் என்ன?

மேலும் பயிற்சிகள்

4.26 திசையனுக்கு பருமனளவும் திசையும் உள்ளன. அதற்கு இடவெளியில் ஒரு இடமும் உள்ளதா? அது நேரத்துடன் மாறலாமா? இடவெளியில் வெவ்வேறு இடங்களிலுள்ள $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ என்ற சமமான இரண்டு திசையன்கள் முற்றொருமையான இயல்விளைவுகளை தருவது அவசியமா? விடையின் ஆதரவாக சான்றுதருக.

4.27 திசையனுக்கு பருமனளவும் திசையும் உள்ளன. பருமனளவும் திசையும் உள்ள எதுவும் திசையன் என்பது அவசியமா? ஒரு பொருளின் சுழற்சியை சுழற்சியச்சின் திசையாலும் சுழற்சிக்கோணத்தின் பருமனளவாலும் குறிப்பிடலாம். இதனால் சுழற்சி ஒரு திசையனா?

4.28 (அ) வளையமாக வளைத்த ஒரு கம்பி, (ஆ) ஒரு தளப்பரப்பு, (இ) ஒரு கோளம் ஆகிய ஒவ்வொன்றுடனும் ஒரு திசையனை தொடர்புறுத்தலாமா? விளக்குக.

4.29 கிடைமட்டத்திலிருந்து $30°$ யில் எய்த ஒரு குண்டு $3.0\ km$ தொலைவில் தரையில் விழுகிறது. $5.0\ km$ க்கு அப்பாலுள்ள ஒரு இலக்கை அடிக்கும்படி எய்வுக்கோணத்தை சரிக்கட்ட இயலுமா? முகப்புவேகம் குறிப்பிடப்பட்டது எனக்கொள்க. வளித்தடையத்தை புறக்கணிக்க.

4.30 ஒரு போர்விமானம் $1.5\ km$ உயரத்தில் $720\ km/h$ வேகத்தில் கிடைமட்டமாக பறந்து ஒரு வானூர்தியெதிர்ப்பெய்விக்குமேல் வருகிறது. முகப்புவேகம் $600\ m\ s^{-1}$ உள்ள ஒரு குண்டு விமானத்தை தாக்க எய்வி நெடுநிற்பத்திலிருந்து எந்தக்கோணத்தில் எய்யவேண்டும்? தாக்குதலை தவிர்க்க விமானி விமானத்தை பறக்கவேண்டிய மீக்குறைந்த உயரம் என்ன? ($g = 10\ m\ s^{-2}$ எனக்கொள்க.)

4.31 ஒரு மிதிவண்டியர் $27\ km/h$ வேகத்தில் பயணிக்கிறார். சாலையில் $80\ m$ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்திருப்பத்தை அணுகும்போது தடுப்பியை (பிரேக்கை) செயலூட்டி நொடிக்கு $0.50\ m/s$ என்ற மாறாவீதத்தில் வேகத்தை குறைக்கத்தொடங்குகிறார். இந்த வட்டத்திருப்பத்தில் மிதிவண்டியரின் நிகர முடுக்கத்தின் பருமனளவும் திசையும் யாவை?

4.32 (அ) ஒரு எறிவத்தின் திசைவேகத்துக்கும் xஅச்சுக்குமுள்ள கோணம் நேரத்தின் சார்பனாக

$$\theta(t) = \text{தொவி}^{-1}\left(\frac{v_{0y} - gt}{v_{0x}}\right)$$

என்று காட்டுக.

(ஆ) மூலத்திலிருந்து எறிந்த ஒரு எறிவத்தின் எறிகோணம்

$$\theta_0 = \text{தொவி}^{1}\left(\frac{4h_{\text{மீ}}}{x_{\text{வீ}}}\right)$$

என்று காட்டுக; இங்கு, குறியீடுகள் வழக்கமான பொருளுள்ளவை.