படலம் 7

துகளமைப்புகளும் சுழற்சியசைவுகளும்

7.1 அறிமுகம்

முந்தைய பாடங்களில் முதன்மைமயாக ஒற்றைத்துகளின் அசைவுகளையே நாம் கருதினோம். (ஒரு நல்லியல்புத்துகளை சுழிய அளவான ஒரு புள்ளிநிறையாக விவரிக்கிறோம்.). சுழியமற்ற அளவுள்ள பொருள்களின் அசைவுகளையும் துகளின் அசைவுகளின்வழி விவரிக்கலாம் என்ற எடுகோளுடன் அவ்வாறான பொருள்களுக்கும் துகளைப்பற்றிய நம் முடிவுகளை பயனாக்கினோம்.

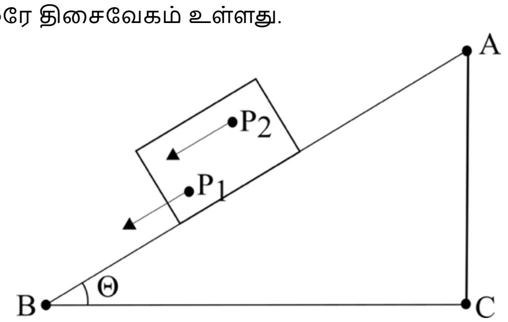
நாம் அன்றாட வாழ்வில் எதிர்கொள்ளும் எந்த இயற்பொருளுக்கும் சுழியற்ற அளவு இருக்கிறது. நீட்சியுற்ற (சுழியற்ற அளவான) பொருள்களை கையாளும்போது நல்லியல்புத் துகளின் ஒப்புரு எப்போதும் போதுமானதாக இல்லை. இந்தப்படலத்தில் இந்த குறையை தாண்டிச்செல்ல முயல்வோம். நீட்டப்பொருள்களின் அசைவுகளை புரிந்துகொள்ள முயல்வோம். ஒரு நீட்டப்பொருளை பல துகள்கள் அடங்கிய ஒரு அமைப்பாக கருதலாம். இங்கு துகளமைப்பின் நிறைமையம் ஒரு முக்கியமான கருத்துரு. ஒரு துகளமைப்பின் நிறைமையத்தின் அசைவையும் நீட்டப்பொருள்களின் அசைவுகளை புரிந்துகொள்வதில் இந்த கருத்துருவின் பயன்களையும் நாம் உரையளிப்போம்.

நீட்டப்பொருள்களின் சிக்கல்களின் ஒரு பெரிய பகுதியை அவற்றை நெளியாப்பொருள்களாக கருதுவதன்மூலம் தீர்க்கலாம். **நல்லியல்பாக, ஒரு நெளியாப்பொருள் கச்சிதமாக திட்டவட்டமானதும் மாறாததுமான வடிவமுள்ளது. இவ்வாறான பொருளிலுள்ள துகள்களின் சோடிகளிடையான தொலைவுகள் மாறுவதில்லை**. எந்த இயற்பொருளும் உண்மையில் நெளியாப்பொருளன்று என்பது இந்த வரையறையிலிருந்து தெளிவாகிறது; ஏனெனில், இயற்பொருள்கள் பல்வேறு விசைகளால் திரிபடைகின்றன. பல நிலமைகளின் இந்த திரிபுகள் புறக்கணிக்கத் தக்கவை. சக்கரங்கள், பம்பரங்கள், எஃகுவுத்தரங்கள், மூலக்கூறுகள், கோள்கள் போன்றவற்றில் அவை நெளிவதையும் வளைவதையும் அதிர்வதையும் புறக்கணித்து அவற்றை நெளியாதவையாக கையாளலாம்.

7.1.1 ஒரு நெளியாப்பொருளுக்கு எவ்வகையான அசைவுகள் இருக்கலாம்?

சில நெளியாப்பொருள்களின் அசைவுகளை சான்றுகளாக எடுத்து இந்த கேள்வியை ஆராயலாம். ஒரு செவ்வகக்கட்டை ஒரு சாய்ந்த தளத்தில் பக்கவாட்டு அசைவின்றி சறுக்குவதை முதலில் கருதுவோம். கட்டையை நெளியாப்பொருளாக எடுகொள்வோம். இது தளத்தில் சறுக்குவது எல்லாத்துகள்களும் ஒன்றிணைந்து அசையும்படி இருக்கிறது; அதாவது ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் அவை ஒரே வேகத்தில் பயணிக்கும்படி இருக்கிறது. இங்கு இந்த நெளியாப்பொருள் தூய நகர்வசைவில் இருக்கிறது (படம் 7.1).

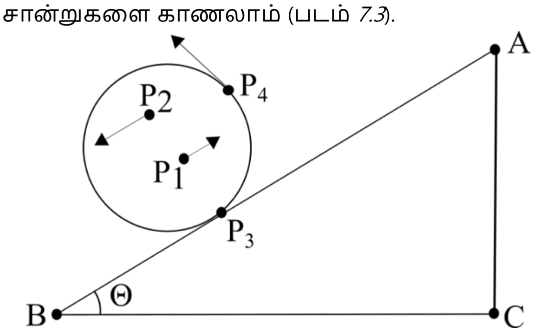
தூய நகர்வசைவில் ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் பொருளின் எல்லாத்துகள்களுக்கும் ஒரே திசைவேகம் உள்ளது.



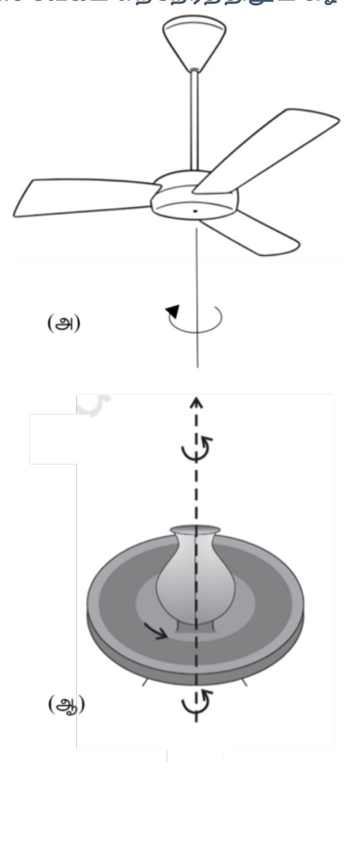
படம் 7.1 கட்டை சாய்தளத்தில் சறுக்குதல் (கட்டையின் P_1, P_2 போன்ற எல்லாப்புள்ளிகளும் ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் ஒரே திசைவேகத்தில் அசைகின்றன).

இப்போது ஒரு மாழையாலோ மரத்தாலோவான ஒரு திண்மவுருளை அதே சாய்தளத்தில் உருள்வதை கருதுக. இங்கு நெளியாப்பொருளான உருளை சாய்தளத்தின் மேலிருந்து கீழ் நகர்வதால் இதற்கு ஒரு நகர்வசைவு இருப்பதாக தோன்றுகிறது. ஆனால், படம் 7.2இல் காட்டியபடி ஒரு நேரத்தில் இதன் எல்லாத்துகள்களும் ஒரே திசைவேகத்தில் அசையவில்லை. எனவே இந்தப்பொருள் தூய நகர்வசைவில் இல்லை. இதன் அசைவில் நகர்வுடன் வேறொன்றும்.இருக்கிறது.

இந்த வேறொன்றை விளங்கிக்கொள்ள, நகர்வசைவு இல்லாதபடி கட்டுறுத்திய ஒரு நெளியாப்பொருளை கருதுவோம். ஒரு நெளியாப்பொருளை நகர்வசைவு இல்லாதபடி கட்டுறுத்த வழக்கமான வழி அதை ஒரு நேர்க்கோட்டில் நிலையாக்குவது. இவ்வாறான நெளியாப்பொருளுக்கு சாத்தியமான ஒரே அசைவு **சுழற்சி**. பொருள் ஒரு **சுழற்சியச்சை**ப் பற்றி சுழல்கிறது. சுற்றுமுற்றும் பார்த்தால் ஒரு அச்சைப்பற்றிய சுழற்சிக்கு முகட்டுவிசிறி, குயவர்ச்சக்கரம், திருவிழாவின் சுழலாட்டி போன்ற பல சான்றுகளை காணலாம் (படம் *7.3*).

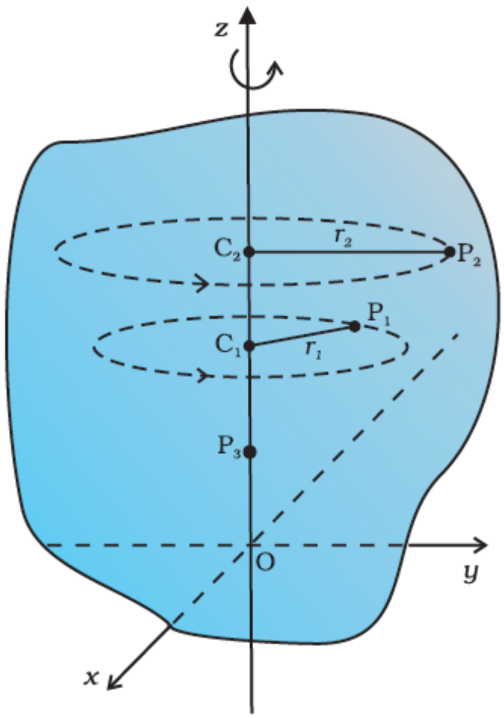


படம் 7.2 உருளையின் உருளலசைவு. இது தூய நகர்வன்று. P_1, P_2, P_3, P_4 ஆகிய புள்ளிகளுக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் (அம்புக்குறிகளால் காட்டியபடி) வெவ்வேறு திசைவேகங்கள் உள்ளன. உண்மையில், உருளை நழுவாமல் உருண்டால், தொடுகைப்புள்ளியான P_3இன் திசைவேகம் எந்நேரத்திலும் சுழியம்.



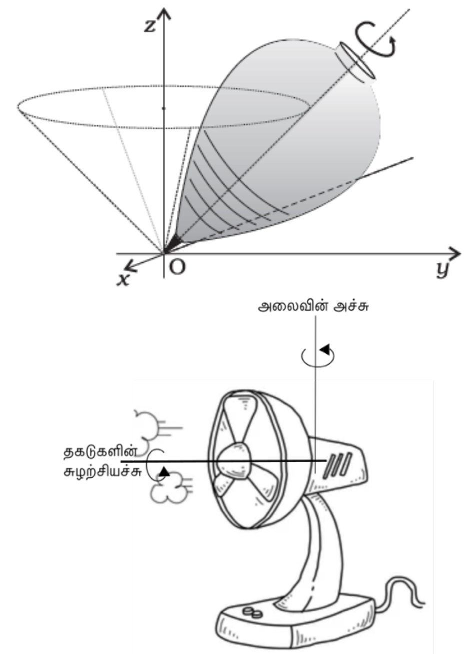
படம் 7.3 நிலையான அச்சைப்பற்றிய சுழற்சி (அ) முகட்டுவிசிறி (ஆ) குயவர்ச்சக்கரம்

சுழற்சி என்றால் என்னவென்றும் அதன் சிறப்பியல்புகளையும் அறிந்துகொள்வோம். ஒரு நெளியாப்பொருளின் நிலையான அச்சைப் பற்றிய சுழற்சியில், பொருளின் ஒவ்வொரு துகளும் ஒரு வட்டத்தில் அசைவதை காணலாம்.



படம் 7.4 ஒரு நெளியாப்பொருளின் zஅச்சைப்பற்றிய சுழற்சி. பொருளின் ஒவ்வொரு புள்ளியின் அசைவும் சுழற்சியச்சிலுள்ள ஒரு புள்ளியை மையமாகக்கொண்ட வட்டத்தை விவரிக்கிறது. இந்த வட்டத்தின் ஆரம் அச்சிலிருந்து புள்ளியின் செங்குத்துத்தொலைவு. P_1 என்ற புள்ளி C_1 மையமாகவும் r_1 ஆரமாகவுமுள்ள வட்டத்தை விவரிக்கிறது. P_2 என்ற புள்ளி C_2 மையமாகவும் r_2 ஆரமாகவுமுள்ள வட்டத்தை விவரிக்கிறது. P_3 போன்று அச்சிலுள்ள ஒரு புள்ளி நிலையாக இருக்கிறது.

ஒரு நிலையான அச்சைப்பற்றி ஒரு நெளியாப் பொருளின் சுழற்சியை படம் 7.4 காட்டுகிறது. நோக்கீட்டுச்சட்டத்தின் zஅச்சை சுழற்சியச்சாக கொண்டோம். நெளியாப் பொருளின் ஒரு குறிப்பற்ற துகளை P_1 என்று குறித்து அது அச்சிலிருந்து r_1 தொலைவிலுள்ளதாக கொள்வோம். இந்த துகள் நிலையான அச்சிலுள்ள C_1 என்ற மையத்தைப்பற்றி r_1 ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்தில் அசைகிறது. இந்த வட்டம் அச்சுக்குச்செங்குத்தான ஒரு தளத்தில் கிடக்கிறது. நெளியாப்பொருளின் P_2 என்ற மற்றொரு துகள் நிலையான அச்சிலிருந்து r_2 தொலைவிலிருப்பதையும் படம் காட்டுகிறது. இந்த துகள் அச்சிலுள்ள C_2 வில் மையமும் r_2 ஆரமும் உள்ள வட்டத்தில் அசைகிறது. இந்த வட்டமும் அச்சுக்குச்செங்குத்தான மற்றொரு தளத்தில் கிடக்கிறது. P_1, P_2 ஆகியவை விவரிக்கும் வட்டங்கள் வெவ்வேறு தளங்களில் இருப்பதை நோக்குக. எனினும் இரண்டும் நிலையான அச்சுக்கு செங்குத்தானவை. அச்சின்மீதுள்ள P_3 போன்ற எந்தத்துகளுக்கும் $r = 0.$ பொருள் சுழலும்போது இவ்வாறான எந்தத் துகளும் நிலையாயிருக்கிறது. சுழற்சியச்சு நிலையானதால் நாம் இதையே எதிர்பார்ப்போம்.

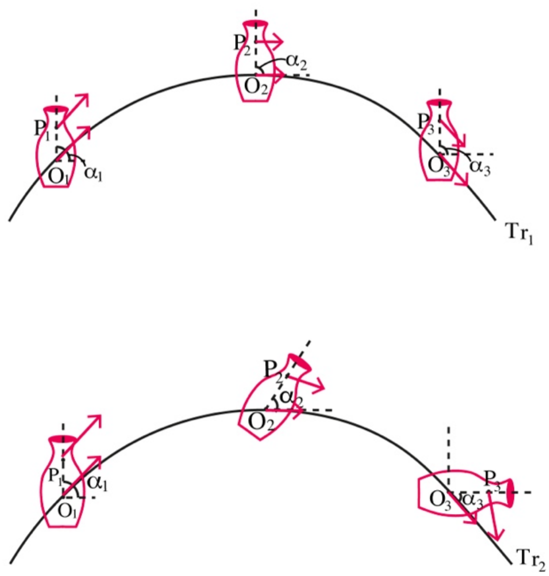


படம் 7.5 (அ) தற்சுழலும் பம்பரம் (பம்பரம் தரையைத்தொடும் முனைப்புள்ளியான O நிலையானது). (ஆ) சுழலும் தகடுகளுள்ள அலைவுறும் மேசைவிசிறி. விசிறியின் சுழனுனியான O என்ற புள்ளி நிலையானது. விசிறியின் தகடுகள் சுழற்சியசைவில் உள்ளன; அவற்றின் சுழற்சியச்சு அலைவுறுகிறது.

சுழற்சியின் சில சான்றுகளில் அச்சு நிலையாக இல்லாமலிருக்கலாம். இவ்வகையான சுழற்சியின் ஒரு முன்னிற்பச்சான்று ஓரிடத்தில் நின்று சுழலும் பம்பரம் (படம் 7.5(அ)). (பம்பரம் இடத்துக்கிடம் நழுவாமலிருப்பதாக, அதாவது நகர்ச்சி இல்லாததாக, நாம் எடுகொள்கிறோம்.) இவ்வாறு சுழலும் பம்பரத்தின் அச்சு தரையில் அதன் தொடுவிடத்தின் வழி செல்லும் நெடுநிற்ப அச்சைப்பற்றி நகர்வதை நம் நடைமுறைப் பட்டறிவிலிருந்து அறிவோம். இது படம் 7.5(ஆ)வில் காட்டியபடி ஒரு கூம்பை விவரிக்கிறது. (பம்பரத்தின் அச்சு நெடுநிற்பைப் பற்றி சுழல்வதை **சாய்சுழற்சி** என்கிறோம். **பம்பரம் தரையைத்தொடும் புள்ளி நிலையானது என்பதை நோக்குக.** பம்பரத்தின்

சுழற்சியச்சு எப்போதும் தொடுகைப்புள்ளி யின்வழி செல்வதாயிருக்கிறது.

இவ்வகையான அசைவின் மற்றொரு சான்றை அலைவுறும் மேசைவிசிறியும் அலைவுறும் தாங்கு மேடைவிசிறியும் தருகின் றன (படம் 7.5(ஆ)). இவ்வாறான விசிறிகளில் சுழற்சியச்சு சுழனுனி யின்வழி (படம் 7.5(ஆ)வில் O என்ற புள்ளி) செல்லும் நெடுநிற்ப அச்சைப் பற்றி கிடைமட்டத்தளத்தில் அலைவுறுவதையும் (பக்கவாட்டில் அசைவதையும்) நாம் கண்டிருக்கிறோம்.



படம் 7.6 (அ) நெளியாப்பொருளின் தூய நகர்ச்சியான அசைவு (ஆ) நெளியாப்பொருளின் நகர்ச்சியும் சுழற்சியும் சேர்ந்த அசைவு. இவை ஒரே பொருளின் வெவ்வேறு அசைவுகளை எடுத்துக்காட்டுகின்றன. P பொருளின் ஒரு குறிப்பற்ற புள்ளி. O பொருளின் நிறைமையம்; இதை அடுத்த பகுதியில் வரையறுப்போம். இங்கு நாம் அறியவேண்டியது Oவின் வீசுபாதைகள் Tr_1, Tr_2 என்று குறித்த நகர்ச்சிவீசுபாதைகள். மூன்று வெவ்வேறு நேரங்களில் O, P ஆகியவற்றின் இடநிலைகளை முறையே $O_1, O_2, O_3, P_1, P_2, P_3$ என்று இரண்டு படங்களிலும் குறித்திருக்கிறோம். (அ)வில் காட்டியபடி தூய நகர்வில் ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் பொருளின் O, P போன்ற எந்தப்புள்ளியின் அசைவும் ஒருமித்தது. OPஇன் திசையைமைவை கருதும்போது, கிடைமட்டம்போன்ற ஒரு நிலையான திசையுடன் OP தாங்கும் கோணம் மாறாமலிருக்கிறது. அதாவது, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. நகர்ச்சியும் சுழற்சியும் சேர்ந்த அசைவைக்காட்டும் (ஆ)வில் ஒரு நேரத்தில் Oவுக்கும் Pக்குமுள்ள திசைவேகங்கள் வேறுபடுகின்றன; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ போன்ற கோணங்களும் வேறுபடலாம்.

விசிறி சுழலும்போது அதன் அச்சு பக்க வாட்டில் அசைந்தபோதிலும் சுழனுனிப்புள்ளி நிலையாயிருக்கிறது. இவ்வாறு, சுழற்சியின் பொதுவமான வேற்றுவத்தில் அதாவது பம்பரம், மேசைவிசிறி போன்றவற்றின் சுழற்சியில் நெளியாப்பொருளின் **ஒரு கோடு நிலையா யில்லாமல் ஒரு புள்ளி நிலையாயிருக்கிறது**. இந்த வேற்றுவத்தில் அச்சு நிலையாயில்லா விடினும் ஒரு நிலையான புள்ளியின்வழி செல்வதாயிருக்கிறது. ஆனால், நம் பாடங்களில் பெரும்பாலும் ஒரு கோடு (அதாவது அச்சு) நிலையாயிருக்கும் எளிய தனித்துவ வேற்றுவமான சுழற்சிகளையே கருதுவோம். எனவே, வேறுவிதமாக சொல்லாவிட்டால், நிலையான அச்சைப்பற்றிய சுழற்சியையே நாம் புரிந்துகொள்வோம்.

உருளை சாய்தளத்தில் உருளும் அசைவு ஒரு நிலையச்சைப்பற்றிய சுழற்சியும் நகர்ச்சியும் சேர்ந்த அசைவு. ஆகவே, உருளலில் மற்றொரு அசைவு இருப்பதாக நாம் முன்பு குறிப்பிட்டது சுழற்சியசைவு. இந்த நோக்கில் படம் 7.6 பயனுள்ளது. இந்த இரண்டு படங்களும் ஒரே பொருள் ஒரே நகர்வுவீசுபாதையில் அசைவதை காட்டுகின்றன. (அ)வில் அசைவு தூய நகர்ச்சி; (ஆ)வில் நகர்ச்சியும் சுழற்சியும் சேர்ந்தது. தடித்த புத்தகம்போன்ற ஒரு நெளியாப்பொருளின் உதவியால் இந்த அசைவுகளை நீங்கள் செய்துபார்க்கலாம்.

இப்போது இந்த பகுதியின் முக்கியமான கண்டறிதல்களை சுருங்கவுரைப்போம். ஒரு சுழ னுனியிலோ வெறெந்தவிதத்திலோ நிலையாக இல்லாத ஒரு நெளியாப்பொருளின் அசைவு தூய நகர்ச்சியாகவோ நகர்ச்சியும் சுழற்சியும் சேர்ந்த தாகவோ இருக்கிறது. ஒரு சுழனுனியிலோ வேறெந்தவிதத்திலோ நிலையான ஒரு நெளியாப்பொருளின் அசைவை சுழற்சி என்கிறோம். சுழற்சி ஒரு நிலையான அச்சைப் பற்றியதாகவோ அசையும் அச்சைப்பற்றிய தாகவோ இருக்கலாம். நிலையான அச்சைப் பற்றிய சுழற்சிக்கு முகட்டுவிசிறியும், அசையும் அச்சைப்பற்றிய சுழற்சிக்கு அலைவுறும் மேசைவிசிறியும் சான்றுகள். இந்தப்படலத்தில் நாம் நிலையான அச்சைப்பற்றிய சுழற்சிகளையே கருதுவோம்.

7.2 நிறைமையம்

ஒரு துகளமைப்பின் நிறைமையம் என்பது என்ன என்பதையும் அதன் முக்கியத்துவத்தை யும் காண்போம். எளிமைக்காக, ஒரு இருதுகளமைப்பில் தொடங்குவோம். இரண்டு துகள்களை இணைக்கும் கோட்டை x அச்சாக எடுப்போம்.

இரண்டு துகள்களும் O என்ற ஒரு மூலத்தி லிருந்து முறையே x_1, x_2 ஆகிய தொலைவுக ளில் இருப்பதாக கொள்வோம். (படம் 7.7) துகள்களின் நிறைகளை முறையே m_1, m_2 என்று குறிப்போம் அமைப்பின் நிறைமையம் என்பது

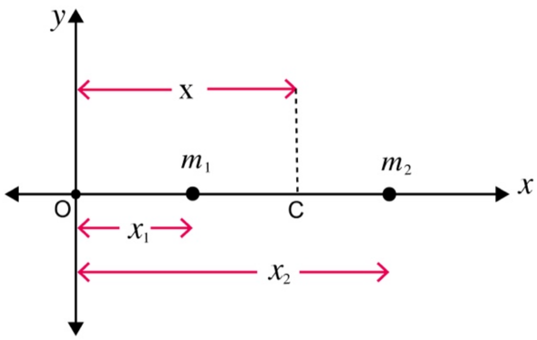
கீழ்க்கண்டவாறு பெறும் X என்ற தொலைவிலுள்ள புள்ளி.

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \qquad (7.1)$$

(7.1) ஆம் சமன்பாட்டில் X ஐ x_1, x_2 ஆகியவற்றின் நிறையெடையிட்ட இடைமமாக கருதலாம். இரண்டு துகள்களுக்கும் ஒரே நிறை இருந்தால், அதாவது, $m_1 = m_2 = m$ என்றிருந்தால்,

$$X = \frac{mx_1 + mx_2}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

இவ்வாறு சமநிறையுள்ள இரண்டு துகள்களுக்கு நிறைமையம் முழுச்சரியாக இரண்டுக்கும் நடுவிலுள்ளது.



படம் 7.7

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ ஆகிய நிறைகளுள்ள n பொருள்கள் ஒரு நேர்க்கோட்டில் இருந்தால் (அந்த நேர்க்கோட்டை x அச்சாக எடுத்துக்கொள்வோம்), இந்த துகளமைப்பின் நிறைமையத்தை

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$
$$= \frac{\sum m_ix_i}{\sum m_i} \qquad (7.2)$$

என்று வரையறுக்கிறோம்; இங்கு, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ஆகியவை மூலத்திலிருந்து துகள்களின் தொலைவுகள்; X ஐயும் அதே மூலத்திலிருந்து குறிப்பிடுகிறோம். Σ என்ற அடையாளம் கூட்டலடுக்கை குறிக்கிறது. இங்கு $\sum m_i = M$ என்பது அமைப்பின் மொத்த நிறை.

இப்போது நேர்க்கோட்டில் இல்லாத மூன்று துகள்களை கருதுவோம். இந்த துகள்கள் கிடக்கும் தளத்தில் x, y என்ற அச்சுகளை வரையறுத்து மூன்று துகள்களின் ஒருங்களவு களை முறையே $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ என்று குறிப்போம். மூன்று துகள்களின் நிறைகள் முறையே m_1, m_2, m_3 என்க. அப்படியெனில், இந்த மூன்று துகள்களடங்கிய அமைப்பின் நிறைமையத்தை C என்று குறித்து அதன் (X, Y) ஒருங்களவுகள்

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$Y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad (7.3)$$

என்று வரையறுக்கிறோம். மூன்று துகள்களுக்கும் சமநிறை இருந்தால், அதாவது $m = m_1 = m_2 = m_3$ என்றிருந்தால்,

$$X = \frac{m(x_1 + x_2 + x_3)}{3m} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$Y = \frac{m(y_1 + y_2 + y_3)}{3m} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

என்றாகிறது. இவ்வாறு, சமநிறையுள்ள மூன்று துகள்களின் நிறைமையம் அவை உருவாக்கும் முக்கோணத்தின் வடிவமையத்துடன் ஒன்றுகிறது.

(7.3) ஆம் சமன்பாட்டின் விளைவை ஒரு தளத்தில் கிடக்கும் தேவையின்றி வெளியில் பரவிக்கிடக்கும் n துகள்கள் அடங்கிய அமைப்புக்கு பொதுவமாக்குவது எளிது. இவ்வாறான அமைப்பின் நிறைமையத்தை (X, Y, Z) என்ற புள்ளியால் குறித்தால்

$$X = \frac{\sum m_ix_i}{M}, \quad Y = \frac{\sum m_iy_i}{M}, \quad Z = \frac{\sum m_iz_i}{M} \quad (7.4)$$

என்று வரையறுக்கிறோம்; இங்கு, $M = \sum m_i$ என்பது அமைப்பின் மொத்த நிறை; i என்ற சுட்டெண் 1 இலிருந்து n வரை செல்கிறது; m_i என்பது i ஆம் துகளின் நிறை; i ஆம் துகளின் இடநிலையை (x_i, y_i, z_i) என்று குறித்தோம்.

இடநிலைத்திசையனின் குறியீட்டை பயன்படுத்தி (7.4) ஆம் சமன்பாட்டின் மூன்று பகுதிகளையும் சேர்த்து ஒரே சமன்பாடாக எழுதலாம். i ஆம் துகளின் இடநிலையை $\boldsymbol{r}_i$ என்றும் நிறைமையத்தின் இடநிலையை $\boldsymbol{R}$ என்றும் எழுதுவோம். அதாவது,

$$\boldsymbol{r}_i = x_i\hat{\boldsymbol{\imath}} + y_i\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z_i\hat{\boldsymbol{k}}; \qquad \boldsymbol{R} = X\hat{\boldsymbol{\imath}} + Y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + Z\hat{\boldsymbol{k}} \quad (7.5)$$

அப்படியெனில்,

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum m_i\boldsymbol{r}_i}{M} \qquad (7.6)$$

என்றாகிறது. வலப்பக்கத்திலுள்ள கூட்டலடுக்கல் திசையன்கூட்டலடுக்கல்.

திசையன்களைப்பயன்படுத்தி சுருக்கமாக எழுதுவதை நோக்குக. நோக்கீட்டுச்சட்டத்தின் (ஒருங்களவமைப்பின்) மூலம் நிறைமையத்தில் இருப்பதாக எடுத்தால், இந்த துகள்களின் அமைப்புக்கு $\sum m_ir_i = 0$.

இப்போது, இந்த விளைவுகளை நெளியாப் பொருள்களுக்கு பயனாக்குவோம். மீட்டரளவு கோல், சுழற்சக்கரம் போன்ற ஒரு நெளியாப் பொருள் நெருக்கமாக பொதிந்த துகள்களின் அமைப்பு. ஆகவே (7.4), (7.6) ஆகிய சமன்பாடுகள் நெளியாப்பொருள்களுக்கும் பயனாகின்றன. இத்தகைய பொருளிலுள்ள துகள்களின் (அணுக்களோ மூலக்கூறுகளோ) எண்ணிக்கை மிகவும் அதிகம் என்பதால் இந்த சமன்பாடுகளில் தனித்தனியான துகள்களின் மீது கூட்டலடுக்கை செயலாக்குவது சாத்திய மன்று. துகள்களுக்கிடையான இடைவெளி கள்

சிறிதாயிருப்பதால் இந்த பொருள்களை நிறையின் தொடர்ச்சியான பரவலாக கருதலாம். பொருளை $\Delta m_1, \Delta m_2, \ldots \Delta m_n$ ஆகிய n சிறு நிறைத்தனிகங்களாக பிரித்துக்கொள்ளலாம். i ஆம் தனிகத்தின் நிறை Δm_i என்றும் அதன் இடநிலை (x_i, y_i, z_i) என்றும் கொள்வோம். அப்படியெனில், நிறைமையத்தின் ஒருங்களவு களை தோராயமாக

$$X = \frac{\sum(\Delta m_i)x_i}{\sum\Delta m_i},\ \ Y = \frac{\sum(\Delta m_i)y_i}{\sum\Delta m_i},\ \ Z = \frac{\sum(\Delta m_i)z_i}{\sum\Delta m_i}$$

என்று எழுதலாம்.

நாம் n ஐ பெரிதாக்கும்போது, ஒவ்வொரு Δm_i உம் சிறிதாகி இந்த கோவைகள் சரியளவாகின்றன; n முடிவிலியை நெருங்கும் போது கோவைகள் முழுச்சரியுடைமையை நெருங்குகின்றன. அப்போது, நாம் i மீதான கூட்டலடுக்குகளை தொகையீடுகளால் குறிக்கலாம். அதாவது,

$$\sum \Delta m_i \to \int dm = M$$
$$\sum (\Delta m_i)x_i \to \int x\, dm$$
$$\sum (\Delta m_i)y_i \to \int y\, dm$$
$$\sum (\Delta m_i)z_i \to \int z\, dm$$

இங்கு, M அமைப்பின் மொத்த நிறை. நிறைமையத்தின் ஒருங்களவுகள் இப்போது

$$X = \frac{1}{M}\int x\, dm, \quad Y = \frac{1}{M}\int y\, dm,$$
$$Z = \frac{1}{M}\int z\, dm \tag{7.7}$$

என்றாகின்றன. இந்த மூன்று சமன்பாடுக ளுக்கும் நிகரான திசையக்கோவை

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{M}\int \boldsymbol{r}\, dm$$

என்றாகிறது. நிறைமையத்தை ஒருங்களவ மைப்பின் மூலமாக எடுத்தால்

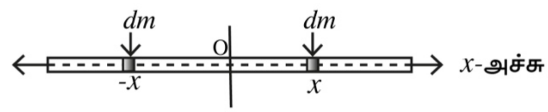
$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$$

அதாவது $\int \boldsymbol{r}\, dm = \boldsymbol{0}$. விரிவாக,

$$\int x\, dm = \int y\, dm = \int z\, dm = 0 \tag{7.8}$$

பலநேரங்களில் வளையங்கள், வட்டுகள், கோளங்கள், தண்டுகள் போன்ற ஒழுங்குவடிவ முள்ள ஒருமைச்சீரான பொருள்களின் நிறை மையத்தை கணக்கிடவேண்டியதிருக்கிறது. நிறை சீராகப்பரவியுள்ள ஒரு பொருளை ஒருமைச்சீரான [1] பொருள் என்கிறோம். சமச்சீர்மையை கருதுவதன்மூலம் இந்த பொருள்களின் நிறைமையம் அவற்றின் வடிவமையங்கள் என்று எளிதாகக்காணலாம்.

ஒரு மெல்லிய தண்டை கருதுவோம். அதன் அகலமோ (குறுக்குவெட்டு செவ்வகமாயிருந் தால்) ஆரமோ (குறுக்குவெட்டு வட்டமாயிருந் தால்) நீளத்தைவிட மிகவும் குறைவு என்று கொள்வோம். தண்டின் வடிவமையத்தில் ஒருங்களவமைப்பின் மூலத்தையும் தண்டின் நீளத்துடன் x அச்சையும் வைப்போம். அப்போது எதிரொளிப்புச்சீரொருமையால் தண்டின் x என்ற இடத்திலிருக்கும் ஒவ்வொரு dm என்ற தனிகத்துக்கும் அதே நிறையுள்ள ஒரு தனிகம் $-x$இல் உள்ளது (படம் 7.8).



படம் 7.8 ஒரு மெல்லிய தண்டின் நிறைமையத்தை தீர்மானித்தல்

இவ்வாறான ஒவ்வொரு தனிகமும் $\int x\, dm$ என்ற தொகையீட்டுக்கு வழங்கும் நிகர பங்களிப்பு சுழியமாகிறது. (7.8) ஆம் சமன் பாட்டிலிருந்து தொகையீடு சுழியமாகுமிடம் நிறைமையம் என்பதை அறிகிறோம். இவ்வாறு, ஒருமைச்சீரான மெல்லிய தண்டின் நிறை மையம் அதன் வடிவமையத்துடன் ஒன்றுகிறது. இதை எதிரொளிப்புச்சமச்சீர்மையின் அடிப்படையில் நாம் புரிந்துகொண்டோம்.

இதே சமச்சீர்மைக்காரணத்துவம் ஒருமைச் சீரான வளையங்கள், வட்டுகள், கோளங்கள், முதலியவற்றுக்கு பயனாகிறது. குறுக்குவெட்டு வட்டமாகவோ செவ்வகமாகவோவுள்ள தடிமனான தண்டுக்கும் இது பயனாகிறது. இந்தப்பொருள்களுக் கெல்லாம் (x, y, z) என்ற இடநிலையிலுள்ள ஒவ்வொரு dm என்ற தனிகத்துக்கும் அதே நிறையுள்ள தனிகத்தை $(-x, -y, -z)$ என்ற இடநிலையில் காணலாம் என்பதை உணர்க. வேறுவிதமாகச்சொன்னால், இந்தப்பொருள்களுக்கு ஒருங்களவின் மூலம் ஒரு சமச்சீர்மைப்புள்ளி. இதன்விளைவாக, (7.8)ஆம் சமன்பாட்டிலுள்ள தொகையீடுகளெல்லாம் சுழியமாகின்றன. இதனால் மேற்சொன்ன பொருள்களுக்கெல்லாம் நிறைமையம் வடிவ மையத்துடன் ஒன்றுகிறது என்று பொருளாகிறது.

சிக்கல் 7.1

ஒரு சமப்பக்கமுக்கோணத்தின் உச்சிகளி லுள்ள மூன்று துகள்களின் நிறைமையத்தை காண்க. துகள்களின் நிறைகள் முறையே $100\ g$, $150\ g$, $200\ g$. சமப்பக்கமுக்கோணத் தின் ஒவ்வொரு பக்கமும் $0.5\ m$ நீளமானது.

தீர்வு

[1] *இங்கு நாம் நிறையில் ஒருமைச்சீரான பொருள்களை கருதுகிறோம். வேதியியலில், வேதிக்கூறடக்கத்தில் ஒருமைச்சீரான பொருள்களை கருதுவது வழக்கம்.*

படம் 7.9இல் காட்டியபடி x, y அச்சுகளை தேர்ந்தால், சமப்பக்கமுக்கோணத்தை உண்டாக்கும் O, A, B என்ற புள்ளிகளின் ஒருங்களவுகள் முறையே $(0,0)$, $(0.5, 0)$, $(0.25, 0.25\sqrt{3})$. O, A, B என்ற புள்ளிகளில் முறையே $100\,g$, $150\,g$, $200\,g$ ஆகிய நிறைகள் இருப்பதாக கொள்வோம். அப்படியெனில்,

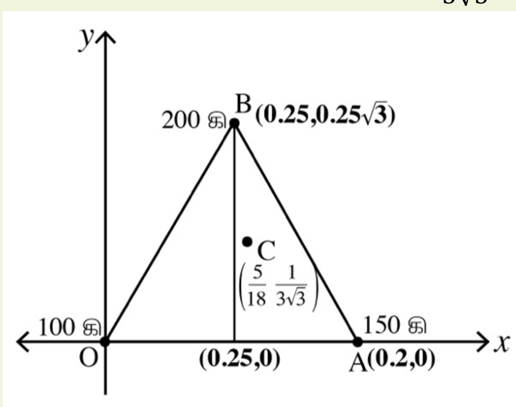
$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{100(0) + 150(0.5) + 200(0.25)\ g.m}{(100 + 150 + 200)g}$$

$$= \frac{75 + 50}{450} m = \frac{125}{450} = \frac{5}{18} m$$

$$Y = \frac{100(0) + 150(0) + 200\left(0.25\sqrt{3}\right)\ g.m}{450\ g}$$

$$= \frac{50\sqrt{3}}{450} m = \frac{\sqrt{3}}{9} m = \frac{1}{3\sqrt{3}}\ m$$



படம் 7.9

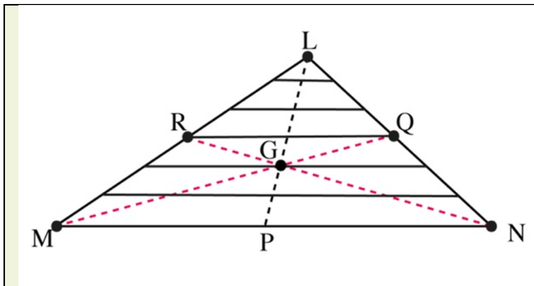
நிறைமையத்தை படம் 7.9 காட்டுகிறது. இது OAB என்ற முக்கோணத்தின் வடிவமையம் *அன்று* என்பதை நோக்குக. ஏன்?

சிக்கல் 7.2

ஒரு முக்கோண மென்றாளின் நிறைமையத்தை காண்க. (மென்றாள் என்பது ஒரு தட்டையான மெல்லிய தகடு)

தீர்வு

மென்றாளை (ΔLMN) முக்கோணத்தின் அடிக்கு இணையான குறுகிய பட்டைகளாக படம் 7.10இல் கண்டபடி பிரித்துக்கொள்வோம்.



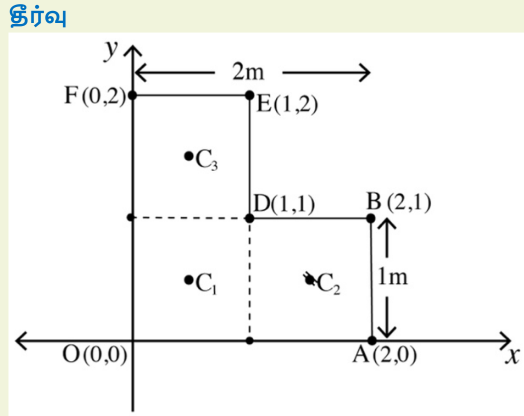
படம் 7.10

சமச்சீர்மையால் ஒவ்வொரு பட்டைக்கும் நிறைமையம் அதன் நடுப்புள்ளியில் இருக்கிறது. எல்லாப்பட்டைகளின் நடுப்புள்ளி களையும் சேர்க்கும்போது LP என்ற நடுமத்தை பெறுகிறோம். எனவே, முழு முக்கோணத்தின் நிறைமையமும் நடுமத்தில் கிடக்கவேண்டும். அதேபோல் அது MQ என்ற நடுமத்திலும் NR என்ற நடுமத்திலும் கிடக்கவேண்டும் என்ற முடிபுகளையும் பெறலாம். அதாவது, முழுமுக்கோணத்தில் நிறைமையம் நடுமங்கள் சந்திக்குமிடத்தில் இருக்கிறது; இது G என்று குறித்த வடிவமையம்.

சிக்கல் 7.3

படம் 7.11இல் காட்டிய அளவுகளுள்ள ஒரு சீரான டகரவடிவ மென்றாளின் நிறை மையத்தை காண்க.

தீர்வு



படம் 7.11

படத்தில் காட்டியபடி x, y அச்சுகளை தேர்ந்தெடுத்து டகரவடிவின் உச்சிகளின் ஒருங்களவுகள் படத்தில் காட்டியவாறு இருப்பதாக காண்கிறோம். டகரவடிவத்தை ஒவ்வொன்றும் $1\,m$ பக்கமுள்ள மூன்று சதுரங்களால் ஆனதாக கருதலாம். சமச்சீர்மையால் சதுரங்களின் நிறைமையங்களான C_1, C_2, C_3 ஆகியவை அவற்றின் வடிவமையங்களே. அவற்றின் ஒருங்களவுகள் முறையே $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. ஒவ்வொரு சதுரத்தின் நிறையும் அதன் மையத்தில் செறிந்திருப்பதாக கருதலாம்.

மென்றாள் சீரான நிறையுள்ளது என்பதால் சமப்பரப்புள்ள சதுரங்களின் நிறை சமம்; டகரவடிவத்தின் நிறைமையம் இந்த மூன்று நிறைப்புள்ளிகளின் வடிவமையம். ஆகவே

$$X = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\, m}{3} = \frac{5}{6}\, m$$

$$Y = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\, m}{3} = \frac{5}{6}\, m$$

டகரவடிவத்தின் நிறைமையம் OD என்ற கோட்டில் கிடக்கிறது. இதை நாம் கணக்கிடாமலே ஊகித்திருக்கலாம். எவ்வாறு என்று விளங்குகிறதா?

டகரவடிவத்தின் மூன்று பகுதிகளும் வெவ்வேறு நிறைகளுடையதாயிருந்தால் அதன் நிறைமையத்தை எவ்வாறு கணக்கிடுவீர்கள்?

7.3 நிறைமையத்தின் அசைவு

நிறைமையத்தின் வரையறையை விளங்கிக் கொண்டபின், பலதுகளமைப்பின் இயற்பியலில் அதன் முக்கியத்துவத்தை காண்போம். n துகள்கள் அடங்கிய ஒரு பொதுவான அமைப்புக்கு (7.6) ஆம் சமன்பாட்டை

$$M\boldsymbol{R} = \sum m_i \boldsymbol{r}_i = m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + \cdots + m_n\boldsymbol{r}_n \quad (7.9)$$

என்று எழுதலாம். இந்த சமன்பாட்டின் இரண்டு பக்கங்களையும் நேரத்தைப்பொறுத்து வகையிட்டு

$$M\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = m_1\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt} + \cdots + m_n\frac{d\boldsymbol{r}_n}{dt}$$

என்பதை பெறுகிறோம். அதாவது,

$$M\boldsymbol{V} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + m_n\boldsymbol{v}_n \qquad (7.10)$$

இங்கு, $\boldsymbol{v}_1 (= d\boldsymbol{r}_1/dt)$ முதல் துகளின் திசைவேகம், $\boldsymbol{v}_2 (= d\boldsymbol{r}_2/dt)$ இரண்டாம் துகளின் திசைவேகம், இன்ன பிற; $\boldsymbol{V} = d\boldsymbol{R}/dt$ என்பது நிறைமையத்தின் திசைவேகம். நிறைகளான m_1, m_2 , … நேரத்துடன் மாறவில்லை என்ற எடுகோளுடன், வகையிடும்போது அவற்றை மாறிலிகளாக வைத்திருப்பதை நோக்குக.

(7.10) ஆம் சமன்பாட்டை நேரத்துடன் தொகையிட்டு

$$M\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = m_1\left(\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt}\right) + m_2\left(\frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt}\right) + \cdots + m_n\left(\frac{d\boldsymbol{v}_n}{dt}\right)$$

அதாவது,

$$M\boldsymbol{A} = m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + m_n\boldsymbol{a}_n \qquad (7.11)$$

என்று பெறுகிறோம்; இங்கு, $\boldsymbol{a}_1\left(=\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt}\right)$ முதல் துகளின் முடுக்கம், $\boldsymbol{a}_2\left(=\frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt}\right)$ இரண்டாம் துகளின் முடுக்கம், இவ்வாறே; $\boldsymbol{A}\left(=\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}\right)$ துகளமைப்பின் நிறைமையத்தின் முடுக்கம்.

இப்போது, நியூட்டனின் இரண்டாம் விதிப்படி, முதல் துகளில் செயலாற்றும் விசை $\boldsymbol{F}_1 = m_1\boldsymbol{a}_1$, இரண்டாம் துகளில் செயலாற்றும் விசை $\boldsymbol{F}_2 = m_2\boldsymbol{a}_2$, இன்ன பிற. (7.11)ஆம் சமன்பாட்டை

$$M\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n \qquad (7.12)$$

என்று எழுதலாம். இவ்வாறு, துகளமைப்பின் மொத்தநிறையை அதன் நிறைமையத்தின் முடுக்கத்தால் பெருக்கிய தொகை துகளமைப்பின்மீது செயலாற்றும் எல்லா விசைகளின் திசையக்கூட்டலுக்கு சமம்.

நாம் $\boldsymbol{F}_1$ முதற்றுகளின்மீதான விசை என்று சொல்லும்போது இது ஒற்றை விசையாக இல்லாம லிருக்கலாம்; முதல் துகளின்மீது செயலாற்றும் எல்லா விசைகளின் கூட்டுத் தொகையை இது குறிக்கிறது. இதைப்போலவே, இரண்டாம் துகளின்மீதான விசைக்கும் மற்றவற்றுக்கும். ஒவ்வொரு துகளின்மீதுமான இந்த விசைகளில் அமைப்புக்கு வெளியிலிருந்து வரும் **புறவிசை**களும் துகள்கள் ஒன்றின்மீ தொன்று செலுத்தும் **அகவிசை**களும் அடங்குகின்றன. இந்த அகவிசைகள் சமமானவையும் எதிரெதிரானவையுமான சோடிகளாக இருப்பதை நியூட்டனின் மூன்றாம் விதியிலிருந்து நாம் அறிவோம். எனவே (7.12) ஆம் சமன்பாட்டிலுள்ள விசைக்கூட்ட லுக்கு இவற்றின் பங்களிப்பு சுழியமாகிறது. சமன்பாட்டுக்கு புறவிசைகளே பங்களிக்கின் றன. ஆகவே, (7.12)ஆம் சமன்பாட்டை

$$M\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}_{\text{புற}} \qquad (7.13)$$

என்று எழுதலாம்; இங்கு $\boldsymbol{F}_{\text{புற}}$ அமைப்பின் துகள் களின்மீது செயலாற்றும் எல்லாப்புறவிசை களின் கூட்டலை குறிக்கிறது.

(7.13) ஆம் சமன்பாடு சொல்வது என்னவென் றால், அமைப்பின் எல்லா நிறையும் நிறைமையத்தில் செறிந்துள்ளதுபோலவும் எல்லாப்புறவிசைகளும் அந்தப்புள்ளியிலே செயலாற்றுவதுபோலவும் துகளமைப்பின் நிறைமையம் அசைகிறது.

நிறைமையத்தின் அசைவை தீர்மானிக்க அகவிசைகளைப்பற்றிய அறிவு தேவையில்லை என்பதை நோக்குக; இதற்கு புறவிசைகளை மட்டும் அறிந்தால் போதும்.

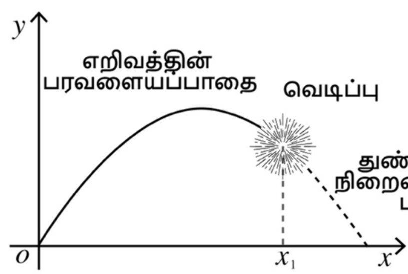
துகளமைப்பின் இயல்புகளை குறிப்பிட தேவையில்லாமலே (7.13) ஆம் சமன்பாட்டை பெற்றோம். அதாவது, நெளியாமை, ஒருமைச் சீர்மை போன்ற எடுகோள்களை எடுக்கவில்லை. அமைப்பிலுள்ள துகள்களிடையில் எல்லாவித மான அகவிசைகளும் இருக்கலாம். அவ்வா றில்லாமல், தூய நகர்வசைவும் சுழலசைவுமுள்ள நெளியாப்பொருளாகவும் இருக்கலாம். அமைப்பு எவ்விதமானதாக இருந்தாலும், அதன் துகள்க ளிடையில் எவ்விதமான அசைவுகள் இருந்தாலும், அதன் நிறைமையம் (7.13) ஆம் சமன்பாட்டின் படி அசைகிறது.

முந்தைய பாடங்களில் ஒற்றைத்துகள்களாக கருதிய நீட்டப்பொருள்களை இப்போது துகளமைப்புகளாக கருதலாம். ஒரு

நீட்டப்பொருளின் நிறை மையத்தின் அசைவு அப்பொருளின் அசைவின் நகர்தலகையை தருகிறது. முழு அமைப்பின் நிறையும் நிறைமையத்தில் செறிந்திருப்பதாகவும் அமைப்பின்மீதான எல்லா புறவிசைகளும் நிறைமையத்தில் செயலாற்றுவதாகவும் கருதி நீட்டப்பொருளின் நகர்தலகையை பெறலாம்.

இந்த முறையின் அடிப்படையை முற்றிலும் விளக்காமலே முன்பு பொருள்களின்மீதான விசைகளை ஆராய்ந்து சிக்கல்களை தீர்ப்பதில் இதை நாம் பயன்படுத்தியிருக்கிறோம். சுழற்சி யசைவும் அகவசைவுகளும் இல்லாததாகவோ புறக்கணிக்கத்தக்கதாகவோ நாம் முன்பு சொல்லாமலே எடுத்துக்கொண்டதை இப்போது உணர்கிறோம். இனியும் அந்த எடுகோள் தேவையில்லை. அந்த முறை சரியானது என்பதை இப்போது கண்டுகொண்டது மட்டுமல்லாமல், (அ) சுழற்சியும் உள்ள ஒரு நெளியாப்பொருள் (ஆ) எல்லாவிதமான அக வசைவுகளுமுள்ள துகளமைப்பு ஆகியவற்றின் நகர்தலசைவை பிரித்து விவரிப்பது எப்படி என்பதையும் அறிகிறோம்.

படம் 7.12 (7.13) ஆம் சமன்பாட்டின் ஒரு நல்ல விளக்கம். ஒரு எறிவம் வழக்கமான பரவளையப்பாதையில் செல்லும்போது நடுவழியில் காற்றில் வெடித்து பல துண்டுகளாக சிதறுகிறது. வெடிப்புக்குக்காரணமான விசைகள் அகவிசைகள். அவை நிறைமையத்தின் அசைவுக்கு எவ்விதத்திலும் பங்களிக்கவில்லை. பொருளின்மீது செயலாற்றும் புவியீர்ப்புவிசையான புறவிசையின் மொத்தம் வெடிப்புக்குமுன்னும் வெடிப்புக்குப்பின்னும் சமம். எனவே, புறவிசைக்குட்பட்ட நிறைமையம் தன் பரவளையப்பாதையில் எவ்வித மாற்றமுமின்றி வெடிப்பே நிகழாததுபோல் தொடர்கிறது.



படம் 7.12 எறிவத்தின் துண்டுகளின் நிறைமையம் வெடிக்காத பொருள் எந்தப்பாதையில் செல்லுமோ அதே பரவளையப்பாதையில் தொடர்கிறது.

7.4 துகளமைப்பின் நேரியவுந்தம்

ஒரு துகளின் நேரியவுந்தம்

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \tag{7.14}$$

என்று வரையறுக்கப்படுவதை நினைவுகொள் வோம். ஒற்றைத்துகளுக்கு நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியை

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \tag{7.15}$$

என்ற அடையாளத்தில் எழுதுவதையும் நினைவுகொள்வோம்; இங்கு, $\boldsymbol{F}$ துகளின்மீதான விசை. ஒரு துகளமைப்பிலுள்ள n துகள்களின் நிறைகளை $m_1, m_2, \dots, m_n$ என்றும் அவற்றின் திசைவேகங்களை $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ என்றும் குறிப்போம். இந்த துகள்கள் ஒன்றுடனொன்று இடைவினை யாற்றலாம்; அவற்றின்மீது புறவிசைகளும் செயலாற்றலாம். முதல் துகளின் நேரியவுந்தம் $m_1\boldsymbol{v}_1$, இரண்டாம் துகளின் நேரியவுந்தம் $m_2\boldsymbol{v}_2$, இன்ன பிற.

பலதுகளமைப்பின் நேரியவுந்தத்தை அமைப்பிலுள்ள தனித்துகள்களின் நேரிய வுந்தங்களின் திசையன்கூட்டலாக வரையறுக்கி றோம்.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \dots + \boldsymbol{p}_n \\ &= m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \dots + m_n\boldsymbol{v}_n \end{aligned} \tag{7.16}$$

இதை (7.14)ஆம் சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிட்டு,

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{V} \tag{7.17}$$

என்று பெறுகிறோம்.

இவ்வாறு, ஒரு துகளமைப்பில் மொத்த உந்தம் அதன் மொத்த நிறையையும் நிறைமையத்தின் திசைவேகத்தையும் பெருக்கிய தொகை. (7.17) ஆம் சமன்பாட்டை நேரத்தைப்பொறுத்து தொகையிட்டு

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = M\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = M\boldsymbol{A} \tag{7.18}$$

என்றும், (7.18)ஆம் சமன்பாட்டையும் (7.13)ஆம் சமன்பாட்டையும் ஒப்பிட்டு

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{F}_{\text{புற}} \tag{7.19}$$

என்றும் பெறுகிறோம். இது நியூட்டனின் இரண்டாம்விதியை துகளமைப்புக்கு நீட்டிய கூற்று.

இப்போது அமைப்பின் துகள்களின்மீது செயலாற்றும் புறவிசைகளின் கூட்டுத்தொகை சுழியம் என்க. அப்படியெனில், (7.19) ஆம் சமன்பாடு

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = 0, \text{அதாவது } \boldsymbol{P} = \text{மாறிலி} \tag{7.20}$$

என்றாகிறது. இவ்வாறு, அமைப்பின்மீதான புறவிசைகளின் கூட்டுத்தொகை சுழியமாகும் போது மொத்த நேரியவுந்தம் மாறிலியாகிறது. இது துகளமைப்புக்கான நேரியவுந்தத்தின் அழியாக்காப்புவிதி. (7.16) ஆம் சமன்பாட்டால் அமைப்பின்மீதான புறவிசைகளின் கூட்டுத் தொகை சுழியமாகும்போது நிறைமையத்தின் திசைவேகமும் மாறிலி என்றும் பொருளாகிறது. (இந்த அலகில் துகளமைப்பைப்பற்றிய உரைமுழுவதிலும் அமைப்பின் மொத்த நிறை மாறிலி எனக்கொள்கிறோம்.)

அகவிசைகளால், அதாவது துகள்கள் ஒன்றன்மீதொன்று செலுத்தும் விசைகளால், தனித்துகள்களுக்கு உட்சிக்கலான வீசுபாதை கள் இருக்கலாம். எனினும், அமைப்பின்மீதான

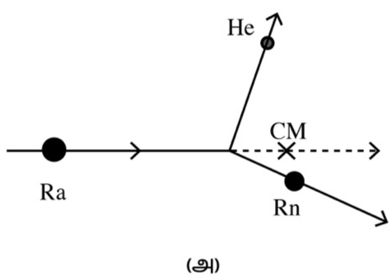
மொத்தப்புறவிசை சுழியமெனில் நிறைமையம் மாறாத்திசைவேகத்துடன் அசைகிறது, அதாவது ஒரு கட்டற்ற துகளைப்போல் நேர்க்கோட்டில் சீராக அசைகிறது.

(7.20)ஆம் திசையச்சமன்பாடு

$$P_x = c_1, \quad p_y = c_2, \quad p_z = c_3 \qquad (7.21)$$

ஆகிய மூன்று திசையிலிச்சமன்பாடுகளுக்கு நிகரானது; இங்கு, p_x, p_y, p_z ஆகியவை மொத்த நேரியவுந்தத்திசையனாகிய $\boldsymbol{P}$ இன் முறையே x, y, z அச்சுகளுக்கு இணையான அகைகள், c_1, c_2, c_3 மாறிலிகள்.

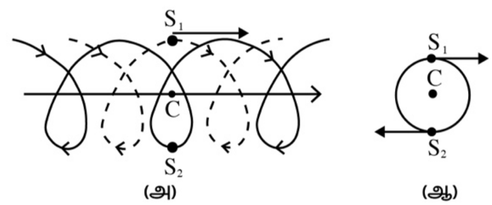
ஒரு சான்றாக, இரேடியத்தின் அணுக்கரு போன்ற ஒரு நிலைப்பற்ற துகளின் கதிரியக்கச் சிதைவை கருதுவோம். ஒரு இரேடியவணுக்கரு இரேடானின் அணுக்கருவாகவும் ஒரு ஆல்பாத் துகளாகவும் சிதைவடைகிறது. அமைப்பின் அகவிசைகளின் விளைவாகவே சிதைவு நிகழ்கிறது; புறவிசைகள் புறக்கணிக்கத் தக்கவை. ஆகவே, அமைப்பின் மொத்த நேரிய வுந்தம் சிதைவுக்குமுன்னும் சிதைவுக்குப் பின்னும் சமம். சிதைவால் உண்டாகும் இரண்டு துகள்களும் வெவ்வேறு திசைகளில் நகர்வதன்மூலம் அவற்றின் நிறைமையம் சிதைவுக்குமுன்னிருந்த பாதையில் நகர்கின்றது (படம் 7.13(அ)).



படம் 7.13 (அ) இரேடியத்தின் (Ra) கனவணுக்கரு இரேடானின் கனங்குறைந்த அணுக்கருவாகவும் ஆல்பாத்துகளாகவும் (ஈலியத்தின் அணுக்கரு) பிரிகிறது. இந்த அமைப்பின் நிறைமையம் (நிமை) மாறா அசைவில் உள்ளது (ஆ) இதே இரேடியவணுக்கரு ஓய்வுநிலையிலிருந்து பிரியும்போது இரண்டு துகள்களும் அவற்றின் நிமை ஓய்வுநிலையில் இருக்கும்வகையில் ஒன்றைவிட்டு மற்றது விலகிச்செல்கிறது.

சிதைவை நிறைமையம் நிலையாயிருக்கும் நோக்கீட்டுச்சட்டத்தில் நாம் கண்டறிந்தால், சிதைவில் பங்குபெறும் துகள்களின் அசைவுகள் மிக எளிமையாகத்தோன்றுகின்றன; விளை பொருள்களான துகள்கள் அவற்றின் நிறை மையம் நிலையாயிருக்கும்வகையில் எதிரெ திர்த்திசைகளில் செல்கின்றன (படம் 7.13(ஆ)).

துகளமைப்பைப்பற்றிய பல சிக்கல்களில் சோதனைக்கூடச்சட்டத்தில் நாம் செயலாற்று வதைவிட, கதிரியக்கச்சிதைவில் செய்ததுபோல், நிறைமைய நோக்கீட்டுச்சட்டத்தில் செயலாற்று வது வசதியாகிறது.



படம் 7.14 (அ) ஒரு இரும அமைப்பை உண்டாக்கும் S_1 (புள்ளிக்கோடு), S_2 (திண்கோடு) ஆகிய இரண்டு உடுக்களின் வீசுபாதைகள். அவற்றின் நிறைமையம் சீரான அசைவிலுள்ளது. (ஆ) அதே இருமவமைப்பு நிறைமையம் நிலையாயிருக்கும் நோக்கீட்டுச்சட்டத்தில்.

வானியலில் உடுக்களின் இருமவமைப்பை (இரட்டையுடுக்களை) நாம் பொதுவாக காண்கிறோம். புறவிசைகள் இல்லையெனில், இரட்டையுடுவின் நிறைமையம் படம் 7.14(அ)வில் காட்டியபடி ஒரு கட்டற்ற துகளைப்போல் அசை கிறது. சமநிறையுள்ள இரண்டு உடுக்களின் வீசுபாதைகளையும் படம் காட்டுகிறது. இவை உட்சிக்கலானதாக தோன்றுகின்றன. நாம் நிறைமையச்சட்டத்துக்கு மாறினால் நிலையான நிறைமையத்தைச்சுற்றி இரண்டு உடுக்கள் வட்டமாக அசைவதை காண்கிறோம். இரண்டு உடுக்களின் இடநிலைகளும் ஒன்றுக்கொன்று நேரெதிரில் இருக்கின்றன (படம் 7.14(ஆ)). இவ்வாறு, நம் நோக்கீட்டுச்சட்டத்தில் உடுக்க ளின் வீசுபாதைகள் (அ) நிறைமையத்தின் சீரான நேர்க்கோட்டசைவு, (ஆ) நிறைமையத்தைச்சுற்றி உடுக்களின் வட்டமான சுற்றுப்பாதை ஆகிய இரண்டும் சேர்ந்தவை.

இந்த இரண்டு சான்றுகளாலும் நாம் காண்பது அமைப்பின் வெவ்வேறு பகுதிகளின் அசைவை நிறைமையத்தின் அசைவாகவும் நிறைமையத்தைச் சுற்றிய அசைவாகவும் பிரித்துக்கொள்வது அமைப்பின் அசைவை புரிந்துகொள்வதில் மிகவும் பயனுள்ள செய்நுட்பம்.

7.5 இரண்டு திசையன்களின் திசையன்பெருக்கல்

நாம் திசையன்களைப்பற்றியும் இயற்பிய லில் அவற்றின் பயன்பாடுகளையும் ஏற்கெனவே அறிவோம். படலம் 6இல் இரண்டு திசையன்க ளின் திசையிலிப்பெருக்கலை வரையறுத்தோம். வேலை என்ற முக்கியமான இயலளவை விசை, இடப்பெயர்ச்சி ஆகிய இரண்டு தினையன்களின் திசையிலிப்பெருக்கலாக வரையறுத்தோம்.

இப்போது இரண்டு திசையன்களின் மற்றொரு பெருக்கலை வரையறுப்போம். இந்தப்பெருக்கல் ஒரு திசையன். சுழலசைவுக ளின் ஆய்வறிதலில் முக்கியமாகும் கோணவிசை,

கோணவுந்தம் ஆகிய இரண்டு அளவுகளை திசையன்பெருக்கலால் வரையறுக்கிறோம்.

திசையன்பெருக்கலின் வரையறை

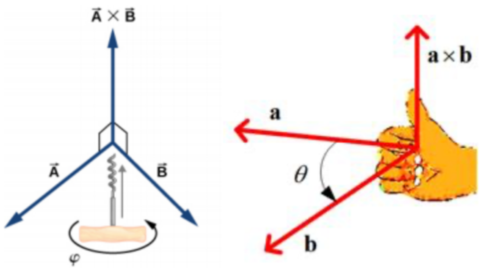
$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ என்ற- இரண்டு திசையன்களின் திசையன்பெருக்கல் கீழ்க்காணும் பண்புகளுள்ள $\boldsymbol{c}$ என்ற ஒரு திசையன்:

(அ) $\boldsymbol{c}$இன் பருமனளவு $c = a\, b\, \text{வவி}\, \theta$; இங்கு, a, b முறையே $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ ஆகிய திசையன்களின் பருமனளவுகள், θ இரண்டு திசையன்களுக்கிடையான கோணம்.

(ஆ) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ ஆகியவை கிடக்கும் தளத்துக்கு செங்குத்தாக $\boldsymbol{c}$ இருக்கிறது.

(இ) ஒரு வலஞ்சுழித்திருகாணியை எடுத்து அதன் தலை $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ தளத்திலும் திருகுமறை தளத்துக்கு செங்குத்தாகவும் இருக்கும்படி வைத்து திருகாணியின் தலையை $\boldsymbol{a}$ இலிருந்து $\boldsymbol{b}$ க்கு திருப்பினால் திருகாணியின் நுனி $\boldsymbol{c}$ இன் திசையில் முன்னேறுகிறது. இந்த வலஞ்சுழித் திருகாணிவிதியை படம் 7.15(அ) காட்டுகிறது.

மறுவழியாக, ஒருவர் தன் வலக்கையின் பெருவிரலை நீட்டி மற்ற விரல்களை $\boldsymbol{a}$இலிருந்து $\boldsymbol{b}$ க்குச்செல்லும்படி மடக்கினால் பெருவிரல் சுட்டும் திசை $\boldsymbol{c}$ இன் திசை. இந்த வலக்கைவிதியை படம் 7.15(ஆ) காட்டுகிறது.



படம் 7.15 இரண்டு திசையன்களின் திசையன்பெருக்கலின் திசையை வரையறுக்கும் (அ) வலஞ்சுழித்திருகாணிவிதி.(ஆ) வலக்கைவிதி.

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ என்ற எந்த இரண்டு திசையன்களிடையிலும் இரண்டு கோணங்கள் இருக்கின்றன என்பதை நினைவுகொள்வோம். படம் 7.15(அ)விலும் (ஆ)விலும் இவை θவும் $360° - \theta$ வும். மேற்கண்ட எந்த விதியையும் பயனாக்கும்போது $\boldsymbol{a}$ இலிருந்து $\boldsymbol{b}$ க்குச்செல்வது சிறிய கோணத்தின்வழி நிகழவேண்டும். இங்கு அது θ.

திசையன்பெருக்கலை குறிக்க × என்ற அடையாளத்தை பயன்படுத்துவதால் இதை குறுக்குப்பெருக்கல் என்றும் சொல்வதுண்டு.

(அ) முன்பே குறிப்பிட்டபடி, இரண்டு திசையன்களின் திசையிலிப்பெருக்கல் முறைமைமாற்றத்தக்கது. அதாவது $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$. ஆனால் திசையன்பெருக்கல் முறைமை மாறாதது. அதாவது $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$.

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ இன் பருமளனவு $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ இன் பருமனளவுக்கு சமம் ($a\, b\, \text{வவி}\, \theta$) ; மேலும் அவையிரண்டும் $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ இன் தளத்துக்கு செங்குத்தானவை. ஆனால், வலக்கைவிதியின் திருப்பம் $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ க்கு $\boldsymbol{a}$ இலிருந்து $\boldsymbol{b}$ க்கும் $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ வுக்கு $\boldsymbol{b}$ இலிருந்து $\boldsymbol{a}$ க்குமாக இருக்கிறது. இதனால் இந்த இரண்டு திசையன்களும் எதிரெதிர்த்திசைகளில் உள்ளன. எனவே

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$$

(ஆ) திசையன்பெருக்கலின் மற்றொரு ஆர்வமான பண்பு எதிரொளிப்பின்போது அதன் நடத்தை. எதிரொளிப்பின்போது (அதாவது ஒரு தளவாடியில் தோன்றும் எதிரொளிப்பை கருதும்போது) $x \to -x$ என்றும் $y \to -y$ என்றும் $z \to -z$ என்றும் ஆகின்றன. இதன் விளைவாக, திசையனின் எல்லா அகைகளும் குறிமாறி, $\boldsymbol{a} \to -\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \to -\boldsymbol{b}$ என்றாகின்றன. அப்படியெனில் எதிரொளிப்பால் $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$க்கு என்னாகிறது?

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (-\boldsymbol{a}) \times (-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

ஒன்றும் ஆகவில்லை! அதாவது, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ எதிரொளிப்பால் குறிமாறவில்லை.

(இ) திசையலிப்பெருக்கலும் திசையன் பெருக்கலும் திசையன்கூட்டலுடன் பரவக் கூடியவை. அதாவது,

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$$

(ஈ) $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ என்பதை அகைகளாக எழுதலாம். இதற்காக முதலில் சில எளிநிலை குறுக்குப்பெருக்கல்கள் வேண்டும்:

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$; இங்கு $\boldsymbol{0}$ சுழியத்திசையன், அதாவது சுழியப்பருமனுள்ள திசையன். $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = a^2\, \text{வவி}\, 0 = 0$ என்றவாறு இந்த விளைவை எளிதில் காண்கிறோம். இதிலிருந்து

$$\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{\imath}} = \boldsymbol{0}, \quad \hat{\boldsymbol{\jmath}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}} = \boldsymbol{0}, \quad \hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}$$

என்பனவற்றை பெறுகிறோம். மேலும்

$$\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}} = \hat{\boldsymbol{k}}, \quad \hat{\boldsymbol{\jmath}} \times \hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{\imath}}, \quad \hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{\imath}} = \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

என்பனவற்றையும் எளிதில் காணலாம். $\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}}$ இன் பருமனளவு வவி $90° = 1$; ஏனெனில், $\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ ஆகிய இரண்டும் ஒற்றையலகுப்பருமனளவுள்ளவை; அவற்றிடையான கோணம் $90°$. எனவே $\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}}$ ஒரு அலகுத்திசையன். $\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ ஆகியவற்றின் தளத்துக்கு செங்குத்தாகவும் அவற்றுடன் வலக்கைவிதியால் தொடர்புள்ளதுமான அலகுத்திசையன் $\hat{\boldsymbol{k}}$. இவ்வாறு முதல் விளைவை பெறுகிறோம். மற்ற இரண்டையும் இதைப்போலவே பெறலாம்.

குறுக்குப்பெருக்கலின் முறைமைமாற்று விதியிலிருந்து

$$\hat{\boldsymbol{\jmath}} \times \hat{\boldsymbol{\imath}} = -\hat{\boldsymbol{k}}, \quad \hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}} = -\hat{\boldsymbol{\imath}}, \quad \hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{k}} = -\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

என்பவை கிடைக்கின்றன.

அலகுத்திசையன்களிடையான மேற்கண்ட ஆறு உறவுகளில் $\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}}$ சுழன்முறைமையில் வரும்போது நேர்மக்குறியும் எதிர்ச்சுழன்

முறைமையில் வரும்போது எதிர்மக்குறியும் இருப்பதை நோக்குக.

இப்போது திசையன்பெருக்கலை அவற்றின் அகைகளின்வழி எழுதுவோம். அதாவது,

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left(a_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + a_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + a_z\,\hat{\boldsymbol{k}}\right) \times \left(b_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + b_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + b_z\,\hat{\boldsymbol{k}}\right)$$
$$= a_x b_y\,\hat{\boldsymbol{k}} - a_x b_z\hat{\boldsymbol{\jmath}} - a_y b_x\,\hat{\boldsymbol{k}} + a_y b_z\hat{\boldsymbol{\imath}} + a_z b_x\hat{\boldsymbol{\jmath}} - a_z b_y\hat{\boldsymbol{\imath}}$$
$$= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\hat{\boldsymbol{k}}$$

இங்கு $\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}}$ ஆகிய தனிகத்திசையன்களின் குறுக்குப்பெருக்கல்களை பயன்படுத்தினோம். $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ க்கான கோவையை எளிதில் நினைவிலிருக்கக்கூடிய அணிக்கோவையாக எழுதலாம்.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

சிக்கல் 7.4

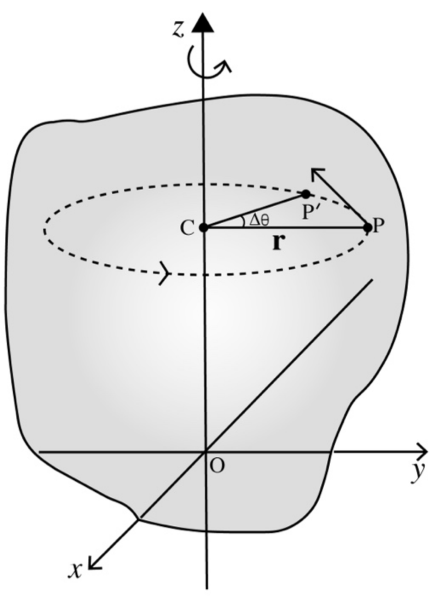
$\boldsymbol{a} = 3\hat{\boldsymbol{\imath}} - 4\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 5\hat{\boldsymbol{k}}$, $\boldsymbol{b} = -2\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}} - 3\hat{\boldsymbol{k}}$ ஆகிய திசையன்களின் திசையிலிப் பெருக்கலையும் திசையன்பெருக்கலையும் காண்க.

தீர்வு

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \left(3\hat{\boldsymbol{\imath}} - 4\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 5\hat{\boldsymbol{k}}\right) \cdot \left(-2\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}} - 3\hat{\boldsymbol{k}}\right) = -6 - 4 - 15 = -25$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 7\hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}} - 5\hat{\boldsymbol{k}}$$

$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -7\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}} + 5\hat{\boldsymbol{k}}$ என்பதை நோக்குக.



படம் 7.16 நிலையான அச்சைப்பற்றிய சுழற்சி. நெளியாப்பொருள் நிலையான zஅச்சைப்பற்றி சுழலும்போது P என்ற துகள் அச்சிலுள்ள C என்ற புள்ளி மையமாகவுள்ள வட்டப்பாதையில் அசைகிறது.

7.6 கோணத்திசைவேகமும் நேரியத்திசைவேகத்துடன் அதன் தொடர்பும்

இந்தப்பகுதியில் கோணத்திசைவேகம் என்பது என்னவென்றும் சுழற்சியசைவில் அது ஆற்றும் பங்கையும் அறிவோம். சுழலும் பொருளின் ஒவ்வொரு துகளும் ஒரு வட்டத்தில் அசைகின்றது என்று நாம் பார்த்தோம். துகளின் கோணத் திசைவேகம் அதன் நேரியத்திசைவேகத்துடன் தொடர்புள்ளது. இந்த இரண்டு அளவுகளுக்குமுள்ள உறவில் சென்ற பகுதியில் நாம் கற்ற திசையன்பெருக்கல் இடம்பெறுகிறது.

படம் 7.4ஐ மீண்டும் கருதுவோம். நிலையான அச்சைப்பற்றிய நெளியாப்பொருளின் அசைவில் பொருளின் ஒவ்வொரு துகளும் ஒரு வட்டத்தில் அசைகிறது. அச்சுக்கு செங்குத்தான ஒரு தளத்தில் கிடக்கும் இந்த வட்டத்தின் மையம் அச்சில் உள்ளது. அந்தப்படத்தை படம் 7.16ஆக மீண்டும் வரைந்திருக்கிறோம். நெளியாப் பொருளின் ஏதோவொரு துகளை P என்று குறித்து நிலையான z அச்சைப்பற்றி அது அசையும் வட்டப்பாதையை படம் காட்டுகிறது. இந்த வட்டத்தின் மையம் (C) அச்சில் உள்ளது. வட்டத்தின் ஆரம் (r) அச்சிலிருந்து P இன் செங்குத்துத்தொலைவு. துகளின் நேரியத் திசைவேகத்தையும் படத்தில் காட்டி v என்று குறித்திருக்கிறோம். இது துகளின் இடநிலையான Pஇல் வட்டத்தின் தொடுகோட்டின் திசையில் உள்ளது.

P என்ற இடத்திலுள்ள துகள் Δt என்று குறித்த ஒரு சிறு நேர இடைவெளிக்குப்பின் P' என்ற புள்ளிக்கு சென்றுவிட்டதாக கொள்வோம் (படம் 7.16) PCP' என்ற கோணம் Δt என்ற நேரத்தில் துகள் அடைந்த கோண இடப்பெயர்ச்சியை விவரிக்கிறது. இதை $\Delta\theta$ என்று குறிப்போம். அப்படியெனில், Δt என்ற இடைவெளியில் துகளின் சராசரித்திசைவேகம் $\Delta\theta/\Delta t$. நேரயிடைவெளியான Δt சுழியத்தை அணுகும்போது (அதாவது சிறிய மதிப்புகளாகி வரும் போது) $\Delta\theta/\Delta t$ என்ற விகிதம் ஒரு எல்லையை $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ அடைகிறது. இது P என்ற இடநிலையில் துகளின் உடனடியான கோணத் திசைவேகம். இந்த உடனடிக்கோணத்திசை வேகத்தை ω என்று குறிப்போம். வட்டமான அசைவுகளைப்பற்றி நாம் கற்றதிலிருந்து, வட்டத்தில் அசையும் ஒரு துகளின் நேரியத் திசைவேகத்தின் பருமனளவான v துகளின் கோணத்திசைவேகத்துடன் $v = \omega r$ என்ற உறவிலிருப்பதை அறிவோம். இங்கு r வட்டத்தின் ஆரம்.

எந்த குறிப்பிட்ட நேரத்திலும் நெளியாப் பொருளின் எல்லாத்துகள்களுக்கும் $v = \omega r$ உண்மையாகிறது என்பதை உணர்கிறோம்.

இவ்வாறு, நிலையான அச்சிலிருந்து r_i என்ற செங்குத்துத்தொலைவிலுள்ள துகளுக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் நேரியத்திசைவேகம்

$$v_i = \omega r_i \qquad (7.22)$$

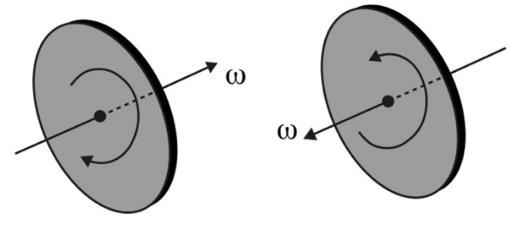
ஆகிறது. சுட்டெண் i ஒன்றுமுதல் பொருளிலுள்ள துகள்களின் எண்ணிக்கையான n வரை செல்கிறது.

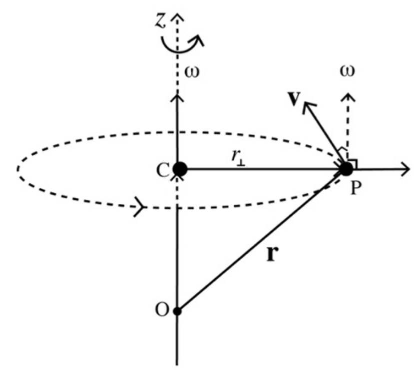
அச்சிலுள்ள துகள்களுக்கு $r = 0$ என்பதால் $v = \omega r = 0.$ இவ்வாறு, அச்சிலுள்ள துகள்கள் நிலையானவை. இது அச்சு நிலையானது என்பதை சரிபார்க்க உதவுகிறது.

பொருளின் எல்லாத்துகள்களுக்கும் ஒரே கோணத்திசைவேகம் இருப்பதை நோக்குக. எனவே **பொருளின் கோணத்திசைவேகம் ω** என்கிறோம்.

ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் பொருளின் எல்லாத்துகள்களுக்கும் ஒரே திசைவேகம் இருப்பதை தூய நகர்வின் சிறப்பியல்பாக கண்டோம். அதேபோல், ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் பொருளின் எல்லாத்துகள்களுக்கும் ஒரே கோணத்திசைவேகம் இருப்பது தூய சுழற்சியின் சிறப்பியல்பு. நிலையான அச்சைப் பற்றிய நெளியாப்பொருளின் சுழற்சியை இவ்வாறு விவரிப்பது 7.1ஆம் பகுதியில் ஒவ்வொரு துகளும் அச்சுக்குச்செங்குத்தான தளத்தில் கிடப்பதும் அச்சில் மையமுள்ளதுமான ஒரு வட்டத்தில் அசைவதாகச்சொன்னதன் மற்றொரு வடிவமே என்பதை நோக்குக.

இதுவரை நம் உரையாடலில் கோணத்திசை வேகம் ஒரு திசையிலிபோல் தோன்றுகிறது. உண்மையில் அது ஒரு திசையன். இதை காரணப் படுத்த முயலாமல் வெறுமனே ஏற்றுக்கொள் வோம். நிலையான அச்சைப்பற்றிய சுழற்சியில் கோணத்திசைவேகம் சுழற்சியச்சில் கிடக்கிறது; அது வலம்புரித்திருகாணியின் தலையை பொருளுடன் சுழற்றினால் திருகாணி முன்னேறும் திசையிலிருக்கிறது (படம் 7.17அ).





படம் 7.17 (அ) வலம்புரித்திருகாணியின் தலையை பொருளுடன் சுழற்றினால் திருகாணி கோணத்திசைவேகமான ωவின் திசையில் முன்னேறுகிறது. பொருளின் சுழற்சிவசம் (வலஞ்சுழியா இடஞ்சுழியா என்பது) மாறினால் ωவின் திசையும் மாறுகிறது. (ஆ) கோணத்திசைவேகமான ω படத்தில் காட்டியபடி நிலையான அச்சில் கிடக்கிறது. Pஇலுள்ள துகளின் நேரியத்திசைவேகம் $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$. இது $\boldsymbol{\omega}$வுக்கும் $\boldsymbol{r}$க்கும் செங்குத்தாக துகளின் வட்டப்பாதையின் தொடுகோட்டுக்குநேராக இருக்கிறது.

இப்போது $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ என்ற திசையன் எதைக்குறிக்கிறது என்று பார்ப்போம். படம் 7.17(ஆ)வை காண்க. இது படம் 7.16இன் ஒரு பகுதி. இங்கு P என்ற துகளின் பாதையை காட்டும்படி வரைந்திருக்கிறோம். படத்தில் $\boldsymbol{\omega}$ என்ற திசையனை நிலையான zஅச்சுக்குநேராக வரைந்திருக்கிறோம். O என்ற மூலத்தைப் பொறுத்து நெளியாப்பொருளின் Pஇலுள்ள துகளின் $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OP}$ என்ற இடநிலைத்திசை யனையும் படம் காட்டுகிறது. மூலத்தை சுழற்சி யச்சில் இருக்குமாறு நாம் தேர்ந்திருப்பதை நோக்குக.

இப்போது $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{OP} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{OC} + \boldsymbol{CP})$.

ஆனால், $\boldsymbol{\omega}$ $\boldsymbol{OC}$க்கு நேராக இருப்பதால், $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{OC} = \boldsymbol{0}$.

ஆகவே, $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{CP}$

$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{CP}$ என்ற திசையன் $\boldsymbol{\omega}$வுக்கு (zஅச்சுக்கு) செங்குத்தானது; Pயிலுள்ள துகளின் வட்டப் பாதையின் ஆரமான $\boldsymbol{CP}$க்கும் செங்குத்தானது.

எனவே இது அந்த வட்டத்தின் தொடுகோட்டின் திசையில் உள்ளது. மேலும், $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{CP}$ இன் பருமனளவு $\omega\, CP$: ஏனெனில் $\boldsymbol{\omega}$ வும் $\boldsymbol{CP}$ யும் ஒன்றுக்கொன்று செங்கோணமானவை. நாம் $\boldsymbol{CP}$யை (முன்பு $\boldsymbol{r}$ என்று குறித்ததுபோலல்லாமல்) இனி $\boldsymbol{r}_{\perp}$ என்று குறிப்போம்.

இவ்வாறு, $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ என்ற திசையனின் பருமனளவு $\omega r_{\perp}$; அதன் திசை P இல் துகளின் வட்டப்பாதையின் தொடுகோடு. P இல் நேரியத் திசைவேகமான $\boldsymbol{v}$ க்கும் அதே பருமனளவும் திசையும் உள்ளன. எனவே,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \qquad (7.23)$$

உண்மையில், பம்பரம்போன்று (படம் 7.6(அ)) ஒரு நிலையான *புள்ளியில்* சுழலும் நெளியாப் பொருளுக்கும் (7.23) ஆம் சமன்பாடு உண்மை யாகிறது. இங்கு $\boldsymbol{r}$ குறிப்பது நிலையான புள்ளி மூலமாகவுள்ள நோக்கீட்டுச்சட்டத்தில் துகளின் இடநிலைத்திசையன்.

நிலையான அச்சைப்பற்றிய சுழற்சியில் $\boldsymbol{\omega}$த்திசையனின் திசை நேரத்துடன் மாறவில்லை என்பதை நோக்குக. ஆனால் அதன் பருமனளவு நேரத்துக்குநேரம் மாறலாம். பொதுவமான சுழற்சியில் $\boldsymbol{\omega}$வின் பருமனளவும் திசையும் நேரத்துக்குநேரம் மாறலாம்.

7.6.1 கோணமுடுக்கம்

சுழற்சியசைவின் கற்றலை நாம் நகர்தலசைவை முன்பு கற்றதன் வழியிலே நடத்திச்செல்வதை நீங்கள் கவனித்திருக்கலாம். நேரிய அசைவுக்கு இடப்பெயர்ச்சி $(\boldsymbol{s})$, திசை வேகம் $(\boldsymbol{v})$ ஆகிய இயக்கமாறிகள் இருந்தது போலவே சுழற்சியசைவுக்கு கோணவிடப் பெயர்ச்சியும் $(\boldsymbol{\theta})$ கோணத்திசைவேகமும் $(\boldsymbol{\omega})$ உள்ளன. அப்படியெனில், நேரிய அசைவில் திசைவேகம் நேரத்துடன் மாறும் வீதத்தை முடுக்கம் என்று வரையறுத்ததைப்போலவே சுழற்சியசைவில் கோணமுடுக்கத்தை வரையறுக்கலாம். கோணமுடுக்கத்தை $\boldsymbol{\alpha}$ என்று குறித்து அதை கோணத்திசைவேகம் நேரத்துடன் மாறும் வீதம் என்று வரையறுக்கிறோம். இவ்வாறு

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \qquad (7.24)$$

சுழற்சியச்சு நிலையானதெனில், $\boldsymbol{\omega}$வின் திசையும் அதனால் $\boldsymbol{\alpha}$ வின் திசையும் நிலையா னவை. இந்த நிலைமையில் திசையச்சமன்பாடு திசையிலிச்சமன்பாடாகிறது.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad (7.25)$$

7.7 கோணவிசையும் கோணவுந்தமும்

இந்தப்பகுதியில் கோணவிசை, கோணவுந்தம் ஆகிய இரண்டு இயலளவுகளை பழகிக்கொள்வோம். இவற்றை திசையன்களின் திசையன்பெருக்கல் களாக வரையறுக்கிறோம். இவை துகளமைப்புகளைப்பற்றிய உரையாடல் களில், முக்கியமாக நெளியாப்பொருள்களின் துகளமைப்புகளில், மிகவும் முக்கியமாவதை காண்போம்.

7.7.1 விசையின் திருப்புமை (கோணவிசை)

ஒரு நெளியாப்பொருளின் அசைவு பொதுவாக நகர்வும் சுழற்சியும் சேர்ந்தது என்று கற்றிருக்கிறோம். பொருள் ஒரு புள்ளியிலோ கோட்டிலோ நிலையாயிருந்தால் அதில் சுழற்சி மட்டுமே இருக்கிறது. ஒரு பொருளின் நகர்வுநிலையை மாற்ற, அதாவது நேரிய முடுக்கத்தை உண்டாக்க, விசை தேவைப் படுகிறது என்பது நாம் அறிந்தது. இப்போது சுழற்சியசைவில் விசையைப்போல் செயலாற்றுவது என்ன என்று கேட்கலாம். இந்தக்கேள்வியை ஒரு திண்ணுருவ நிலைமை யில் சிந்திக்க, ஒரு கதவை திறப்பதையும் மூடுவதையும் கருதுவோம். கதவு கீல்களின்வழி செல்லும் ஒரு நெடுநிற்பக்கோடான அச்சில் சுழலும் ஒரு நெளியாப்பொருள். கதவை சுழலச்செய்வது என்ன? ஒரு விசையை செலுத்தாவிட்டால் கதவு சுழலாது என்பது தெளிவு. ஆனால் எந்தவிசையும் இதை செய்யவியலாது. கீல்களின் கோட்டில் செலுத்தும் விசை சுழற்சியை உண்டாக்கவியலாது. கதவுக்கு செங்குத்தாக ஒரு குறிப்பிட்ட பருமனள வுள்ள விசையை கதவின் வெளிவிளிம்பில் செலுத்துவதே கதவை சுழலச்செய்யும் மிகவும் பயனுள்ள செயல். இங்கு முக்கியமானது விசை மட்டுமன்று. அந்த விசையை எங்கு எவ்வாறு செலுத்துகிறோம் என்பவையும் முக்கியமா கின்றன.

நேரிய அசைவிலுள்ள விசைக்கு நிகராக சுழற்சியிலிருப்பதை **விசையின் திருப்புமை** என்றோ **கோணவிசை** என்றோ அழைக்கிறோம். முதலில் ஒரு ஒற்றைத்துகளான தனித்துவ வேற்றுவத்தில் கோணவிசையை வரையறுப் போம். பிறகு இந்த கருத்துருவை நெளியாப் பொருள் உட்பட்ட எல்லா துகளமைப்புகளுக்கும் நீட்டுவோம். சுழற்சியசைவின் நிலையில் ஏற்படும் மாற்றங்களுடன், அதாவது பொருளின் கோணமுடுக்கத்துடன், இதை தொடர்புறுத்து வோம்.

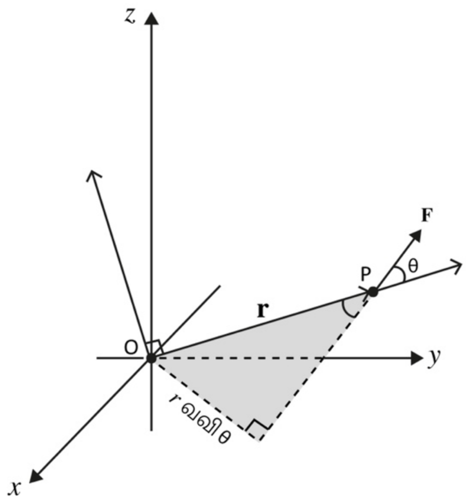
ஒரு விசை P என்ற புள்ளியிலுள்ள ஒரு ஒற்றைத்துகளின்மீது செயலாற்றுவதை கருதுவோம். துகளின் இடநிலையை O என்ற மூலத்திலிருந்து $\boldsymbol{r}$ என்ற திசையனால் குறிக்கிறோம் (படம் 7.18). இந்த நிலவரத்தில் துகளின்மீது Oவைப்பொறுத்து செயலாற்றும் கோணவிசையை

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \qquad (7.26)$$

என்ற திசையன்பெருக்கலால் வரையறுக்கி றோம். இவ்வாறு, கோணவிசை என்ற திசையனின் பருமனளவு

$$\tau = r\, F \text{ வவி } \theta \qquad (7.27)$$

இங்கு, படத்தில் காட்டியபடி, r இடநிலைத்திசையனின் பருமனளவு, அதாவது OP யின் நீளம்; F விசையின் பருமனளவு; θ இடநிலைத்திசையனுக்கும் விசைக்குமிடையான கோணம்.



படம் 7.18 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ என்பதை காட்டும் படம். $\boldsymbol{\tau}$ மற்ற இரண்டு திசையன்களும் $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{F})$ கிடக்கும் தளத்துக்கு செங்குத்தானது. அதன் திசையை வலம்புரித்திருகாணிவிதி தருகிறது.

கோணவிசையின் அலகுக்காரணி $M\,L^2\,T^{-2}$. இது வேலை, ஆற்றல் ஆகியவற்றின் அலகுக்காரணியே. ஆனால் வேலையிலிருந்து இது மிகவும் மாறுபட்ட இயலளவு. கோணவிசை ஒரு திசையன்; வேலை ஒரு திசையிலி. கோணவிசையின் அவ்வலகு நியூட்டன் மீட்டர்$(N\,m)$. கோணவிசையின் பருமனளவு

$$\tau = (r \text{ வவி } \theta)\, F = r_{\perp} F$$

$$\tau = r\, F \text{ வவி } \theta = r\, F_{\perp}$$

இங்கு $r_{\perp} = r$ வவி θ என்பது $\boldsymbol{F}$ செயலாற்றும் கோட்டிலிருந்து மூலத்துக்கான செங்குத்துத் தொலைவு; $F_{\perp} (= F$ வவி $\theta)$ என்பது $\boldsymbol{r}$ க்குச்செங்குத் தான திசையில் $\boldsymbol{F}$ இன் அகை. $r = 0$, $F = 0$, $\theta = 0$, $\theta = 180°$ ஆகியவற்றுளொன்று உண்மையாகும் போது $\tau = 0$ என்றாவதை நோக்குக. அதாவது, சுழற்சியச்சிலுள்ள துகளுக்கு எப்போதும் விசைத்திருப்பம் சுழியம்; விசையின் பருமனளவு சுழியமாகும் போதும் அதன் திசை மூலத்தின்வழி செல்லும்போதும் கோணவிசை சுழியமாகிறது.

$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ ஒரு திசையன்பெருக்கல் என்பதால் இரண்டு திசையன்களின் திசையன்பெருக்கலின் பண்புகள் அதற்கு பயனாகின்றன. $\boldsymbol{F}$ இன் திசை எதிர்மாறினால் கோணவிசையின் திசையும் எதிர்மாறுகிறது. $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{F}$ ஆகிய இரண்டின் திசைகளும் எதிர்மாறினால் கோணவிசையின் திசை மாறாமலிருக்கிறது.

7.7.2 துகளின் கோணவுந்தம்

கோணவிசை நேரிய அசைவிலுள்ள விசைக்கு நிகராயிருப்பதைப்போலவே, நேரிய வுந்தத்தின் நிகராக சுழற்சியசைவில் கோணவுந்தம் இருக்கிறது. முதலில் ஒரு ஒற்றைத் துகளின் தனித்துவ வேற்றுவத்தில் கோணவுந்தத்தை வரையறுத்து ஒன்றைத்துகளின் அசைவில் அதன் முக்கியத்துவத்தை காண்போம். பிறகு கோணவுந்தத்தின் வரையறையை நெளியாப்பொருள் உட்பட்ட துகளமைப்புகளுக்கு நீட்டுவோம்.

கோணவிசையைப்போலவே கோணவுந்தமும் ஒரு திசையன்பெருக்கல். இதை (நேரிய) உந்தத்தின் திருப்புமை என்றும் சொல்லலாம். இதிலிருந்து கோணவுந்தத்தின் வரையறையையும் ஊகிக்கலாம்.

m நிறையும் $\boldsymbol{p}$ உந்தமுமுள்ள ஒரு துகள் O என்ற மூலத்திலிருந்து $\boldsymbol{r}$ என்ற இடநிலையில் இருப்பதாக கொள்வோம். மூலத்தைப்பொறுத்து துகளின் கோணவுந்தம் $(\boldsymbol{l})$

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \qquad (7.28)$$

என்று வரையறுக்கிறோம். கோணவுந்தத்திசையனின் பருமனளவு

$$l = r\,p \text{ வவி } \theta$$

இங்கு p கோணவுந்தத்தின் பருமனளவு, θ $\boldsymbol{r}$க்கும் $\boldsymbol{p}$க்குமிடையான கோணம். இதை

$$l = r\,p_{\perp} \text{ என்றும் } l = r_{\perp} p \text{ என்றும் } \qquad (7.29)$$

எழுதலாம்; இங்கு $r_{\perp} (= r$ வவி $\theta)$ என்பது மூலத்திலிருந்து $\boldsymbol{p}$ இன் திசைக்கோட்டின் செங்குத்துத்தொலைவு, $p_{\perp} (= p$ வவி $\theta)$ என்பது $\boldsymbol{r}$க்குச்செங்குத்தான $\boldsymbol{p}$யின் அகை. நேரியவுந்தம் சுழியமானாலோ $(p = 0)$ துகள் மூலத்திலிருந்தாலோ $(r = 0)$ $\boldsymbol{p}$ யின் திசைக்கோடு மூலத்தின்வழி சென்றாலோ $(\theta = 0, 180°)$ கோணவுந்தம் சுழியமாவதை எதிர்பார்ப்போம்.

கோணவிசை, கோணவுந்தம் ஆகிய இயலளவுகளிடையில் ஒரு முக்கியமான உறவு இருக்கிறது. இது விசைக்கும் நேரியவுந்தத்துக்குமுள்ள உறவுக்கு நிகரானது ஒற்றைத்துகளுக்கு இந்த உறவை வருவிக்க $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ என்பதை நேரத்தைப்பொறுத்து வகையிடுவோம்.

$$\frac{dl}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})$$

வகையிடலுக்கான பெருக்கல்விதியை வலப்பக்கத்தில் பயனாக்கி

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

என்று பெறுகிறோம். இப்போது, துகளின் திசைவேகம் $\boldsymbol{v} = {d\boldsymbol{r}}/{dt}$ என்பதையும் $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ என்பதையும் பயன்படுத்தி

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{v} \times m\boldsymbol{v} = 0$$

என்று பெறுகிறோம்; ஏனெனில் இரண்டு இணையான திசையன்களின் திசையன் பெருக்கல் சுழியமாகிறது. மேலும், ${d\boldsymbol{p}}/{dt} = \boldsymbol{F}$ என்பதால்,

$$\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\tau}$$

$$\text{எனவே,} \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{\tau}$$

$$\text{அதாவது,} \frac{dl}{dt} = \tau \qquad (7.30)$$

இவ்வாறு, ஒரு துகளின் கோணவுந்தம் நேரத் துடன் மாறும் வீதம் அதன்மீது செயலாற்றும் கோணவிசைக்கு சமம். இது ஒற்றைத்துகளின் நகர்வசைவுக்கான நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியான $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$ என்ற சமன்பாட்டின் சுழற்சிநிகரி.

துகளமைப்புக்கு கோணவிசையும் கோணவுந்தமும்

துகளமைப்புக்கு ஒரு புள்ளியைப்பற்றிய மொத்தக்கோணவுந்தத்தை பெற அதிலுள்ள தனித்துகள்களின் கோணவுந்தங்களை திசையன்களாக கூட்டவேண்டும். இவ்வாறு, n துகள்கள் அடங்கிய அமைப்புக்கு

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 + \cdots . + \boldsymbol{l}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{l}_i$$

இங்கு, iஆம் துகளின் கோணவுந்தம்

$$\boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$$

இங்கு, $\boldsymbol{r}_i$ ஒரு குறிப்பிட்ட மூலத்தைப்பொறுத்து iஆம் துகளின் இடநிலைத்திசையன், $\boldsymbol{p}_i (= m_i \boldsymbol{v}_i)$ துகளின் நேரியவுந்தம். துகளின் நிறை m_i , திசைவேகம் $\boldsymbol{v}_i$. துகளமைப்பின் மொத்த கோணவுந்தத்தை

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i} \boldsymbol{l}_i = \sum_{i} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i) \qquad (7.31)$$

என்று எழுதலாம். இது ஒற்றைத்துகளின் கோணவுந்த வரையறையான (7.28) ஆம் சமன் பாட்டை துகளமைப்புக்கு பொதுவமாக்கியது.

(7.26) ஆம் சமன்பாட்டையும் மேற்கண்ட சமன்பாட்டையும் பயன்படுத்தி

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum \boldsymbol{l}_i\right) = \sum_{i} \frac{d\boldsymbol{l}_i}{dt} = \sum_{i} \boldsymbol{\tau}_i \qquad (7.32)$$

என்பதை பெறுகிறோம்; இங்கு, $\boldsymbol{\tau}_i$ i ஆம் துகளின்மீது செயலாற்றும் கோணவிசை;

$$\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

i ஆம் துகளின்மீதான $\boldsymbol{F}_i$ என்ற விசை அந்த துகளின்மீது செயலாற்றும் புறவிசைகள் $\left(\boldsymbol{F}_i^{\text{புற}}\right)$, அமைப்பின் பிற துகள்கள் அதன்மீது செலுத்தும் அகவிசைகள் ஆகியவற்றின் திசையன்கூட்டல். எனவே மொத்த கோணவிசைக்கு புறவிசைக ளின் பங்களிப்பையும் அகவிசைகளின் பங்களிப்பையும் பிரிக்கலாம்.

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i} \boldsymbol{\tau}_i = \sum_{i} \boldsymbol{\tau}_i \, (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\text{புற}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{அக}}$$

இங்கு,

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{புற}} = \sum_{i} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{\text{புற}}, \qquad \boldsymbol{\tau}_{\text{அக}} = \sum_{i} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{\text{அக}}$$

நாம் நியூட்டனின் மூன்றாம் விதியை பயனாக்குகிறோம். அதாவது, அமைப்பின் எந்த இரண்டு துகள்களுக்குமிடையான விசைகள் சமமாகவும் எதிர்த்திசைகளிலும் இருக்கின்றன. மேலும், இந்த விசைகள் துகள்களை இணைக்கும் கோட்டின்வழி இருப்பதாகவும் எடுகொள்கி றோம். இந்த வேற்றுவத்தில் அமைப்பின்மீதான மொத்த கோணவிசைக்கு அகவிசைகளின் பங்களிப்பு சுழியம்; ஏனெனில், ஒவ்வொரு வினையும் மறுவினையுமான சோடியிலிருந்து விளையும் கோணவிசை சுழியம். இவ்வாறு, $\boldsymbol{\tau}_{\text{அக}} = 0$; ஆகவே, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\text{புற}}$.

$\boldsymbol{\tau} = \sum \boldsymbol{\tau}_i$ என்பதால், (7.32) ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைப்பது

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{\text{புற}} \qquad (7.33)$$

அதாவது, துகளமைப்பின் ஒரு புள்ளியைப் பற்றிய (இந்த புள்ளியை நோக்கீட்டுச்சட்டத்தின் மூலமாக எடுத்துக்கொள்கிறோம்) மொத்தக் கோணவுந்தம் நேரத்தால் மாறும் வீதம் அமைப்பின்மீது செயலாற்றும் அதே புள்ளியைப் பற்றிய புறக்கோணவிசைகளின் (புறவிசைக ளால் ஏற்படும் கோணவிசை) கூட்டுத் தொகைக்குசமம். (7.32) ஆம் சமன்பாடு ஒற்றைத்துகளுக்கான (7.26) ஆம் சமன்பாட்டை துகளமைப்புக்காக பொதுவமாக்குகிறது. ஒரு துகள் மட்டும் இருக்கும்போது அகவிசைகளோ அகக்கோணவிசைகளோ இல்லை என்பதை நோக்குக. (7.32)ஆம் சமன்பாடு

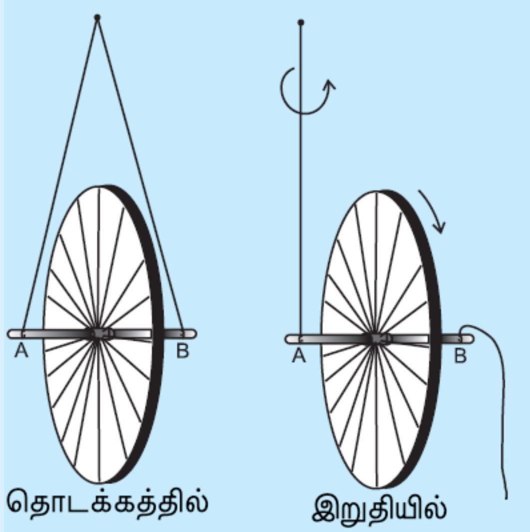
$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{F}_{\text{புற}}$$

என்ற (7.19)ஆம் சமன்பாட்டின் சுழற்சிநிகர்.

(7.19) ஆம் சமன்பாட்டைப்போலவே, (7.33) ஆம் சமன்பாடும் எல்லாப்பொருள்க ளுக்கும் பயனாவதை நோக்குக. நெளியாப் பொருளுக்கும் தனித்தனி துகள்களில் எல்லாவித மான அகவசைவுகளுள்ள துகளமைப்புக்கும் பயனாகிறது.

மிதிவண்டிச்சக்கரத்துடன் ஒரு பரிசோதனை

ஒரு மிதிவண்டிச்சக்கரவிளிம்பை எடுத்து அதன் அச்சிருசை இருபக்கமும் நீட்டிக்கொள்க. படத்தில் காட்டியவாறு A, B என்ற இடங்களில் இரண்டு நார்களால் கட்டுக. சக்கரவிளிம்பு நெடுநிற்பமாயிருக்கும்படி இரண்டு நார்களையும் ஒன்றாகச்சேர்த்து ஒரு கையால் பிடித்துக்கொள்க. ஒரு நாரை விட்டால்,சக்கரவிளிம்பு சரியும்.



இப்போது இரண்டு நார்களையும் ஒரு கையால் பிடித்துக்கொண்டு மறுகையால் சக்கரத்தை அச்சிருசைப்பற்றி வேகமாக சுழற்றுக. சக்கரம் இவ்வாறு வேகமாக சுழலும்போது ஒரு நாரை (B என்க) விட்டால் என்ன நிகழ்கிறது?

சக்கரவிளிம்பு நெடுநிற்பத்தளத்தில் சுழல்வது தொடர்கிறது; சுழற்சித்தளம் நீங்கள் இன்னும் பிடித்துக்கொண்டிருக்கும் A என்ற நாரைச்சுற்றி அசைகிறது. சக்கரவிளிம்பு சுழல்வதன் சுழற்சியச்சு (வேறுவிதமாகச் சொன்னால், சக்கரவிளிம்பின் கோணவுந்தம்) Aஐச்சுற்றி சாய்சுழல்கிறது என்கிறோம்.

சுழலும் சக்கரம் ஒரு கோணவுந்தத்தை உண்டாக்குகிறது. இந்த கோணவுந்தத்தின் திசையை தீர்மானியுங்கள். சுழலும் சக்கரத்தை Aயால் பிடித்துக்கொண்டிருக்கும் போது ஒரு கோணவிசை உண்டாகிறது. (கோணவிசை எவ்வாறு உண்டாகிறது என்பதையும் அதன் திசையையும் காண்பதை உங்களுக்கு விட்டுவிடுகிறோம்.) கோண வுந்தத்தின்மீது இந்த கோணவிசையின் விளைவு கோணவுந்தத்துக்கும் கோணவிசைக் கும் செங்குத்தான அச்சைச்சுற்றி அதை சாய்சுழலச் செய்வது. இந்த கூற்றுகளையெல்லாம் சரிபாருங்கள்.

கோணவுந்தத்தின் அழியாக்காப்பு

$\boldsymbol{\tau}_{\text{புற}} = \mathbf{0}$ என்றிருந்தால், (7.33) ஆம் சமன்பாடு

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0 \qquad \text{அதாவது} \qquad \boldsymbol{L} = \text{மாறிலி} \qquad (7.34)$$

என்று குறைகிறது. இவ்வாறு, ஒரு துகளமைப் பின்மீதான மொத்த புறக்கோணவிசைகள் சுழியமெனில் அமைப்பின் மொத்த கோணவுந்தம் அழியாக்காப்புள்ளது; அதாவது மாறாமலிருக்கிறது. (7.34)ஆம் சமன்பாடு

$$L_x = k_1, \qquad L_y = k_2, \qquad L_z = k_3 \qquad (7.35)$$

ஆகிய மூன்று திசையிலிச்சமன்பாடுகளுக்கு நிகரானது. இங்கு, k_1, k_2, k_3 .ஆகியவை மாறிலிகள்; L_x, L_y, L_z ஆகியவை $\boldsymbol{L}$ என்ற மொத்தக்கோணவுந்தத் திசையனின் முறையே x, y, z அச்சுகளுக்கு நேரான அகைகள். மொத்தக்கோணவுந்தம் அழியாக்காப்புள் ளது என்ற கூற்று ஒவ்வொரு அகையும் அழியாக்காப்புள்ளது என்ற பொருளுள்ளது.

(7.34) ஆம் சமன்பாடு (7.20) ஆம் சமன்பாட்டின் சுழற்சிநிகரி; அது துகளமைப்பின் மொத்த நேரியக்கோணவுந்தம் அழியாக்காப் புள்ளதாக சொன்னது. (7.20) ஐப்போலவே இதுவும் பல நடைமுறைநிலவரங்களில் பயனுள்ளது. அவ்வாறான சில ஆர்வமான பயன்பாடுகளை இந்தப்படலத்தில் பிறகு காண்போம்.

சிக்கல் 7.5

மூலத்தைப்பற்றிய $7\hat{\boldsymbol{\imath}} + 3\hat{\boldsymbol{\jmath}} - 5\hat{\boldsymbol{k}}$ என்ற விசை $\hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$ என்ற இடநிலைத் திசையனுள்ள துகளின்மீது செயலாற்றும் போது அதன் கோணவிசையை காண்க.

தீர்வு

இங்கு $\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{F} = 7\hat{\boldsymbol{\imath}} + 3\hat{\boldsymbol{\jmath}} - 5\hat{\boldsymbol{k}}.$

அணிக்கோவைவிதியை பயன்படுத்தி கோணவிசையை காண்போம்.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} &= \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 \end{vmatrix} \\ &= (5-3)\hat{\boldsymbol{\imath}} - (-5-7)\hat{\boldsymbol{\jmath}} \\ &\quad + \big(3-(-7)\big)\hat{\boldsymbol{k}} \\ &= 2\hat{\boldsymbol{\imath}} + 12\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 10\hat{\boldsymbol{k}}\end{aligned}$$

சிக்கல் 7.6

மாறாத்திசைவேகத்தில் அசையும் ஒரு ஒற்றைத்துகளின் ஒரு குறிப்பற்ற புள்ளியைப் பற்றிய கோணவுந்தம் அசைவின்போது மாறாமலிருக்கிறது என்று காட்டுக.

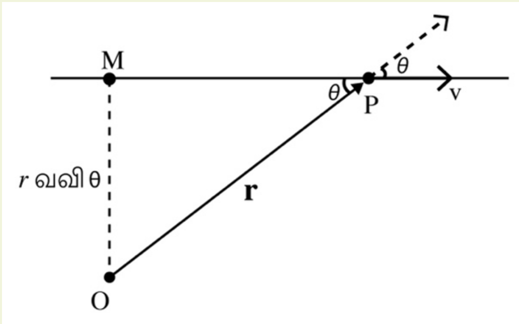
தீர்வு

துகள் t என்ற நேரத்தில் P என்ற புள்ளியில் $\boldsymbol{v}$ என்ற திசைவேகத்துடன் அசைவதாக கொள்வோம். ஒரு குறிப்பற்ற புள்ளியாகிய Oவைப்பற்றி துகளின் கோணவுந்தத்தை கணக்கிட விரும்புகிறோம்.

கோணவுந்தம் $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$. அதன் பருமனளவு mvr வவி θ; இங்கு θ படம் 7.19இல் காட்டியபடி $\boldsymbol{r}$க்கும் $\boldsymbol{v}$க்குமிடையான கோணம். துகளின் இடநிலை நேரத்துடன் மாறினாலும் $\boldsymbol{v}$யின் திசைக்கோடு மாறாமலிருக்கிறது; அதனால் $OM = r$ வவி θ ஒரு மாறிலி.

மேலும், $\boldsymbol{l}$இன் திசை $\boldsymbol{r}$உம் $\boldsymbol{v}$உம் கிடக்கும் தளத்துக்கு செங்குத்தானது. படத்தில் தாளின் பக்கத்தினுள் அது செல்கிறது. இந்த திசை நேரத்துடன் மாறவில்லை.

இவ்வாறு, $\boldsymbol{l}$ ஒரே பருமனளவுடனும் ஒரே திசையிலும் இருப்பதால் மாறிலியாகிறது. துகளில் ஏதும் புறக்கோணவிசை உள்ளதா?



படம் 7.19

7.8 நெளியாப்பொருளில் சமநிலை

இப்போது, பொதுவத்துகளமைப்புகளின் அசைவிலிருந்து நம் கவனத்தை திருப்பி நெளியாப்பொருளில் குவிப்போம்.

நெளியாப்பொருளின்மீது புறவிசையின் விளைவுகளை சுருங்கவுரைப்போம். (இனி புற என்ற முன்னொட்டை விட்டுவிடுவோம்; ஏனெனில், வேறுவிதமாகச்சொல்லாவிட்டால் நாம் புறவிசைகளையும் புறக்கோணவிசைளையுமே கருதுகிறோம்.) விசைகள் நெளியாப்பொருளசைவின் நகர்வு நிலையை மாற்றுகின்றன. அதாவது, அவை மொத்த நேரியவுந்தத்தை (7.19)ஆம் சமன்பாட்டின்படி மாற்றுகின்றன. ஆனால் விசைகளின் விளைவு இது மட்டுமன்று. பொருளின்மீதான மொத்த கோண விசை சுழியமாகாமலிருக்கலாம். அவ்வாறான கோணவிசை நெளியாப் பொருளின் சுழற்சியசைவின் நிலையை மாற்றுகிறது; அதாவது பொருளின் மொத்த கோணவுந்தத்தை (7.33)ஆம் சமன்பாட்டின் படி மாற்றுகிறது.

ஒரு நெளியாப்பொருளின் நேரியவுந்தமும் கோணவுந்தமும் நேரத்துடன் மாறாமலிருந்தால், அதாவது பொருளின்மீது நேரியமுடுக்கமோ கோணமுடுக்கமோ இல்லாமலிருந்தால், அந்தப் பொருள் எந்திரச்சமநிலையில் இருப்பதாக சொல்கிறோம். இதன் பொருள்

(அ) நெளியாப்பொருளின்மீதுள்ள மொத்த விசை, அதாவது எல்லா விசைகளின் திசையன்கூட்டல், சுழியம்.

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0} \qquad (7.36)$$

பொருளின்மீதான மொத்த விசை சுழியமெனில், பொருளின் மொத்த நேரியவுந்தம் நேரத்துடன் மாறவில்லை. பொருளின் நகர்வுச்சமநிலைக் கான வரைக்கட்டை (7.36)ஆம் சமன்பாடு தருகிறது.

(ஆ) நெளியாப்பொருளின்மீதான மொத்தக் கோணவிசை, அதாவது எல்லா கோணவிசைக ளின் திசையன்கூட்டல், சுழியம்.

$$\boldsymbol{\tau}_i + \boldsymbol{\tau}_2 + \cdots + \boldsymbol{\tau}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{0} \qquad (7.37)$$

பொருளின்மீதான மொத்த கோணவிசை சுழியமெனில், பொருளின் மொத்த கோண வுந்தம் நேரத்துடன் மாறவில்லை. பொருளின் சுழற்சிச்சம நிலைக்கான வரைக்கட்டை (7.37)ஆம் சமன்பாடு தருகிறது.

கோணவிசையின் ஆதாரப்புள்ளி மாறும் போது சுழற்சிச்சமநிலைக்காக (7.37) ஆம் சமன்பாடு தரும் வரைக்கட்டு மாறுமா மாறாதா என்ற கேள்வியை நாம் எழுப்பலாம். இதன் விடையாக நாம் காண்பது என்னவென்றால், (7.36)ஆம் சமன்பாடு தரும் நகர்வுச்சமநிலை நிலவினால், இத்தகைய ஆதாரமாற்றம் விளைவற்றது. அதாவது நகர்வுச்சமநிலை நிலவும் போது சுழற்சிச்சமநிலைக்கான வரைக் கட்டு கோண விசைகளை எந்தப்புள்ளியைப் பற்றி எடுக்கிறோம் என்பதை சாரவில்லை. நாம் இதை இரண்டு பொருள்களுள்ள ஒரு இணைக்கட்டுக்கு 7.7ஆம் சான்றில் நிறுவுவோம். அதாவது இரண்டு விசைகள் நகர்வுச்சமநிலையி லுள்ள ஒரு நெளியாப்பொருளின்மீது செயலாற் றும் தனித்துவ வேற்றுவத்தில் நிறுவுவோம். பொதுவ வேற்றுவத்தில் நிறுவுவதை உங்களுக்கு பயிற்சியாக விடுகிறோம்.

திசையன்சமன்பாடுகளான. (7.36), (7.37) ஆகியவற்றுள் ஒவ்வொன்றும் மூன்று திசையிலிச் சமன்பாடுகளுக்கு நிகரானவை. (7.36)ஆம் சமன்பாடு

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 (7.38)$$

என்று பிரிகிறது; இங்கு F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} ஆகியவை $\boldsymbol{F}_i$ என்ற விசையின் முறையே x, y, z அகைகள். இதைப்போல், (7.37)ஆம் சமன்பாடு

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_{ix} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \tau_{iy} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 (7.39)$$

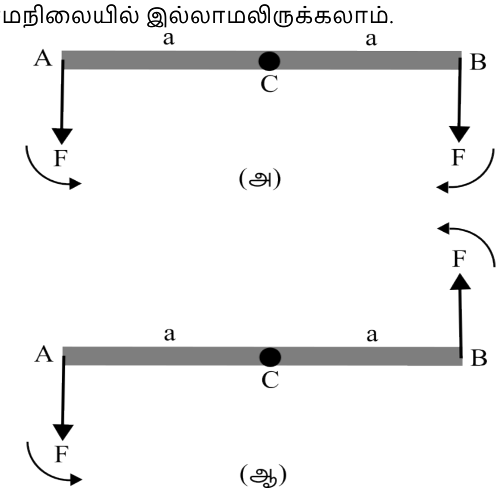
என்ற மூன்றுக்கும் நிகரானது; இங்கு $\tau_{ix}, \tau_{iy}, \tau_{iz}$ ஆகியவை τ_i என்ற கோணவிசையின் முறையே x, y, z அகைகள்.

(7.36), (7.37) ஆகிய சமன்பாடுகள் நெளியாப்பொருளின் எந்திரச்சமநிலையில் நிறைவேற வேண்டிய ஆறு வரைக்கட்டுகளை தருகின்றன. பல சிக்கல்களில் பொருளின்மீது செயலாற்றும் எல்லா விசைகளும் சமத்தள மானவை. அவ்வாறிருக்கும்போது எந்திரச்சம நிலைக்கு மூன்று வரைக்கட்டுகளே தேவையா கின்றன. இவற்றுள் இரண்டு வரைக்கட்டுகள் நகர்வுச்சமநிலைக்குரியவை: தளத்தின் இரண்டு செங்குதான அச்சுகளில் ஒவ்வொன்றுக்கும் நேரான விசைகளின் கூட்டல் சுழியமாக வேண்டும். மூன்றாம் வரைக்கட்டு சுழற்சிச்சம

நிலைக்குரியது. விசைகளின் தளத்துக்கு செங்குத்தான அச்சுக்குநேரான கோணவிசைகளின் கூட்டல் சுழியமாகவேண்டும்.

நெளியாப்பொருளின் சமநிலைக்கான வரைக்கட்டுகளை முந்தைய படலங்களில் நாம் கருதிய துகளின் சமநிலைக்கான வரைக்கட்டுகளுடன் ஒப்பிடலாம். சுழற்சியசைவு துகளுக்கு பயனாகாததால் நகர்வுச்சமநிலைக்கான வரைக்கட்டுகளே ((7.36)ஆம் சமன்பாடு) துகளுக்கு பயனாகின்றன. எனவே, ஒரு துகளின் சமநிலைக்கு அதன்மீதுள்ள விசைகளின் கூட்டுத்தொகை சுழியமாகவேண்டும். இந்த விசைகளெல்லாம் ஒற்றைத்துகளின்மீது செயலாற்றுவதால் இவை பொதுப்புள்ளியவை. பொதுப்புள்ளிய விசைகளுக்குட்பட்ட சமநிலையை முந்தைய படலங்களில் உரையளித்திருக்கிறோம்.

ஒரு பொருள் பகுதிச்சமநிலையில் இருக்கலாம்: அதாவது, அது நகர்வுச்சமநிலையில் இருந்து சுழற்சிச்சமநிலையில் இல்லாமலிருக்கலாம். சுழற்சிச்சமநிலையிலிருந்து நகர்வுச் சமநிலையில் இல்லாமலிருக்கலாம்.



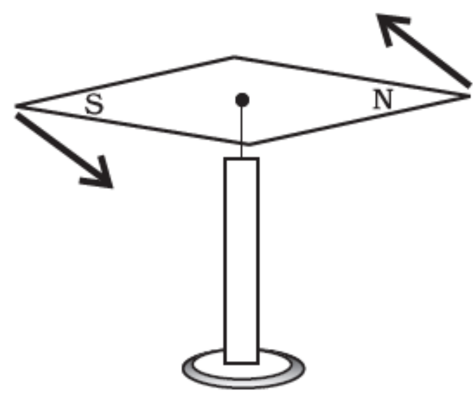
படம் 7.20

படம் 7.20(அ)வில் காட்டியதுபோன்ற ஒரு கனங்குறைந்த (புறக்கணிக்கத்தக்க நிறையுள்ள) AB என்ற ஒரு தண்டை கருதுக. A, B ஆகிய இரண்டு நுனிகளில் சமப்பருமளவான இரண்டு விசைகள் தண்டுக்கு செங்குத்தான ஒரே திசையில் செயலாற்றுவதாக கொள்வோம்.

AB இன் நடுப்புள்ளியை C என்று குறித்து $CA = CB = a$ என்றும் கொள்வோம். இரண்டு விசைகளின் திருப்புமைகளும் (p(கோண விசைகள்) பருமனளவில் சமமாகவும் (aF) திசையில் எதிரெதிராகவும் இருக்கின்றன. நிகரத்திருப்புமை சுழியம் இந்த அமைப்பு சுழற்சிச்சமநிலையில் இருக்கிறது; ஆனால் நகர்வுச்சமநிலையில் இல்லை; ஏனெனில் $\sum \boldsymbol{F} \neq \mathbf{0}$.

படம் 7.20(ஆ)வில் Bயிலுள்ள விசை திசைமாறியிருக்கிறது. இங்கும் அதே தண்டில் சமப்பருமனளவுள்ள விசைகள் இருப்பினும் அவை தண்டுக்குச்செங்குத்தான எதிரெதிர்த் திசைகளில் உள்ளன. இங்கு இரண்டு விசைகளின் திருப்புமைகள் சமப்பருமனளவானவை; ஆனால் எதிரெதிரானவை *அல்ல*. இவை ஒரே வசமாகச்செயலாற்றி தண்டில் இடஞ்சுழிச்சுழற்சியை உண்டாக்குகின்றன. பொருளின்மீதான மொத்த விசை சுழியம். எனவே பொருள் நகர்வுச்சமநிலையில் இருக்கிறது. ஆனால் அது சுழற்சிச்சமநிலையில் இல்லை. தண்டு எதிலும் பொருத்தப் படாவிட்டாலும் தூய சுழற்சியசைவை (நகர்வில்லாத சுழற்சியை) மேற்கொள்கிறது.

சமப்பருமனளவுள்ள இரண்டு விசைகள் வெவ்வேறு செயற்கோடுகளில் எதிரெதிர்த்திசைகளில் செயலாற்றுவதை **இணைக்கட்டு** என்கிறோம். ஒரு இணைக்கட்டு நகர்வில்லாத சுழற்சியசைவில் இருக்கிறது.



படம் 7.21 (அ) மூடியைத்திருப்ப நம் விரல்கள் ஒரு இணைக்கட்டை செலுத்துகின்றன. (ஆ) புவியின் காந்தப்புலம் ஒரு திசைகாட்டியூசியின் முனைகளில் சமமான எதிதெதிரான விசைகளை செலுத்துகிறது.

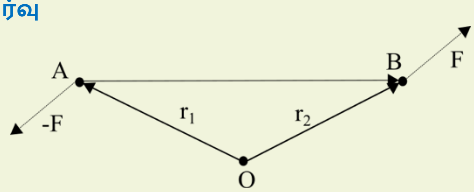
ஒரு புட்டிலின் மூடியை திறக்கும்போது நம் விரல்கள் ஒரு இணைக்கட்டை மூடியின்மீது செலுத்துகின்றன (படம் 7.21(அ)). மற்றொரு சான்றை படம் 7.21(ஆ) காட்டுகிறது. இது புவியின் காந்தப்புலத்திலுள்ள திசைகாட்டியூசி. புவியின் காந்தப்புலம் ஊசியின் வடமுனையிலும் தென்முனையிலும் சமமான விசைகளை செலுத்துகிறது. வடமுனையின்மீதான விசை வடக்குநோக்கியும் தென்முனையின் விசை தெற்குநோக்கியும் இருக்கின்றன. ஊசி தென்வடக்காக சுட்டும்போதுதவிர, இரண்டு விசைகளுக்கும் ஒரே செயற்கோடு இல்லை.

இவ்வாறு புவியின் காந்தப்புலத்தால் ஊசியில் ஒரு இணைக்கட்டு செயலாற்றுகிறது.

சிக்கல் 7.7

ஒரு இணைக்கட்டின் திருப்புமை திருப்புமையின் ஆதாரப்புள்ளியை சாரவில்லை என்று காட்டுக.

தீர்வு



படம் 7.22

படம் 7.22இல் காட்டியபடி ஒரு நெளியாப்பொருளின்மீது செயலாற்றும் ஒரு இணைக்கட்டை கருதுக. $\boldsymbol{F}$, $-\boldsymbol{F}$ ஆகிய விசைகள் முறையே B, A என்ற புள்ளிகளில் செயலாற்று கின்றன. மூலத்திலிருந்து இந்தப்புள்ளிகளின் இடநிலைத்திசையன்கள் $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$.

இணைக்கட்டின் திருப்புமை இணைக்கட்டின் இரண்டு விசைகளின் திருப்புமைகளின் கூட்டல். அதாவது

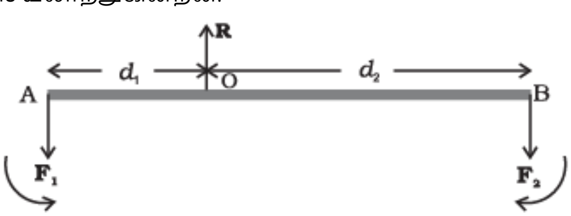
$$\boldsymbol{r}_1 \times (-\boldsymbol{F}) + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F} = (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{F}$$

ஆனால், $\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{r}_2$ என்பதால், $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$.

எனவே, இணைக்கட்டின் திருப்புமை $\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{F}$. இது மூலத்தை சாராமலிருப்பது தெளிவு. அதாவது எந்தப்புள்ளியைப்பற்றி விசைகளின் திருப்புமையை எடுக்கிறோமோ அந்தப்புள்ளியை சாராதது.

7.8.1 திருப்புமைக்கொள்கை

ஒரு நல்லியல்பான நெம்புகோல் என்பது கனமற்ற (புறக்கணிக்கத்தகு நிறையுள்ள) தண்டு தன் நீளவாட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியைப் பற்றி சுழல்வது. இந்தப்புள்ளியை நெம்புமையம் என்கிறோம். சிறுவர்களின் விளையாட்டுத்திடலி லுள்ள ஊசற்கட்டை நெம்புகோலுக்கு ஒரு சான்று. ஒன்றுக்கொன்று இணையானவையும் வழக்கமாக தண்டுக்கு செங்குத்தானதுமான $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ என்ற இரண்டு விசைகள் நெம்புகோலில் நெம்புமையத்திலிருந்து முறையே d_1, d_2 என்ற தொலைவுகளில் படம் 7.23இல் காட்டியபடி செயலாற்றுகின்றன.



படம் 7.23

நெம்புகோல் எந்திரச்சமநிலையிலுள்ள ஒரு அமைப்பு. நெம்புமையமான ஆதாரத்தின் எதிர்வினை $\boldsymbol{R}$ என்க. இது $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ ஆகிய விசைகளுக்கு எதிர்த்திசையில் உள்ளது. நகர்வுச்சமநிலைக்கு

$$R - F_1 - F_2 = 0 \qquad (7.40)$$

சுழற்சிச்சமநிலையை கருத, நெம்புமையத்தைப்பற்றிய திருப்புமையை எடுக்கிறோம். திருப்புமைகளின் கூட்டல் சுழியமாகவேண்டும்.

$$d_1F_1 - d_2F_2 = 0 \qquad (7.41)$$

இடஞ்சுழித்திருப்புமைகளை நேர்மமாகவும் வலஞ்சுழித்திருப்புமைகளை எதிர்மமாகவும் எடுக்கிறோம். R நெம்புமையத்தில் செயலாற்று வதால் அதன் திருப்புமை சுழியம் என்பதை நோக்குக.

நெம்புகோலின் வேற்றுவத்தில் F_1 என்ற விசை தூக்கவேண்டிய ஒரு எடையாயிருப்பது வழக்கம். இதை *சுமை* என்கிறோம்; நெம்புமையத்திலிருந்து அதன் தொலைவாகிய d_1 *சுமைக்கை*. F_2 என்ற விசை எடையைத்தூக்க செலுத்தும் *முயற்சி*; d_2 என்ற தொலைவு *முயற்சிக்கை*.

(7.41)ஆம் சமன்பாட்டை

$$d_1F_1 = d_2F_2 \qquad (7.42)$$

என்று எழுதலாம். அதாவது சுமைக்கை × சுமை = முயற்சிக்கை × முயற்சி.

மேற்கண்ட சமன்பாடு நெம்புகோலின் திருப்புமைக்கொள்கையை விவரிக்கிறது. மேலும், F_1/F_2 என்ற விகிதத்தை எந்திரவியநன்மை (எந) என்கிறோம்.

$$\text{எவ} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{d_1}{d_2} \qquad (7.43)$$

முயற்சிக்கையான d_2 எடைக்கையான d_1 ஐவிட பெரிதாயிருந்தால் எந்திரவியநன்மை ஒன்றைவிட பெரிது. எந்திரவியநன்மை ஒன்றை விட பெரிதாயிருப்பது சிறிய முயற்சியால் பெரிய எடையை தூக்குவதை குறிக்கிறது. ஊசற்கட்டையைத்தவிர நெம்புகோலின் வேறுபல சான்றுகளையும் நம்மைச் சுற்றி காணலாம். தராசின் கட்டை ஒரு நெம்புகோல். வேறு பல சான்றுகளையும் அவற்றின் நெம்புமையம், முயற்சி, முயற்சிக்கை ஆகியவற்றையும் நீங்கள் சிந்திக்கலாம்.

F_1, F_2 என்ற இணையான விசைகள் நெம்புகோலுக்கு இணையாக இல்லாமல் ஒரே கோணத்தில் சரிந்திருக்கும்போதும் திருப்பு மைக்கொள்கை சரியாகிறது என்று காட்டுக.

7.8.2 நிறையீர்ப்புமையம்

குறிப்பேடுகளை விரலின் நுனியில் சமனாக்க நீங்கள் எப்போதாவது முயன்றிருக்க லாம். நீங்கள் எளிதில் செய்யக்கூடிய அதைப்போன்ற ஒரு பரிசோதனையை படம் 7.24 காட்டுகிறது. M நிறையுள்ள ஒரு ஒழுங்கற்ற வடிவான அட்டைப்பலகையையும் பென்சில் போன்ற ஒரு கூர்மையான பொருளையும் எடுத்துக்கொள்க. அட்டைப்பலகை கிடைமட்ட மாக இருக்கும்படி பென்சிலின் நுனியில்

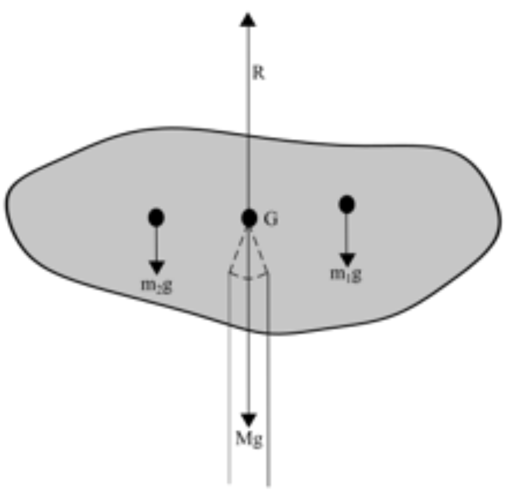
வைத்துச்சமனாக்கக்கூடிய G என்ற புள்ளியை முயன்றுதேர்தன்முறையில் காண்க. இந்த சமனாக்கப்புள்ளி அட்டைப்பலகையின் நிறையீர்ப்புமையம் (நியீமை). பென்சிலின் நுனி அட்டைப்பலகையை எந்திரவியச்சமநிலையில் வைத்திருக்கும் ஒரு மேனோக்கிய நெடுநிற்ப விசையை வழங்குகிறது. படம் 7.24இல் காட்டியபடி நுனியின் எதிர்வினை Mgக்கு சமமாகவும் எதிர்த்திசையிலும் இருப்பதால் அட்டைப்பலகை நகர்வுச்சமநிலையில் உள்ளது. அது சுழற்சிச் சமநிலையிலும் உள்ளது; இல்லாவிட்டால் சமனாகாத கோணவிசையால் சரிந்து கீழ் விழுந்துவிடும். அட்டைப்பலகையின் தனித்தனியான துகள்களின் மீது m_1g , m_2g , … போன்ற புவியீர்ப்புவிசைகளாலான கோணவிசைகள் செயலாற்றுகின்றன.

m_1g , m_2g , … முதலிய விசைகளின் நியீமையைப்பற்றிய கோணவிசைகளின் கூட்டுத் தொகை சுழியம்; அதாவது அட்டைப்பலகையில் அவ்வாறு சுழியமாகும் இடநிலையில் நியீமை அமைந்துள்ளது.

நீட்டப்பொருளின் iஆம் துகளின் இடநிலை நியீமையைப்பொறுத்து r_i எனில், துகளின்மீது புவியீர்ப்புவிசையின் நியீமையைப்பற்றிய கோணவிசை $\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{g}$. நியீமையைப் பற்றிய புவியீர்ப்பின் கோணவிசைகளின் கூட்டல் சுழியம். அதாவது

$$\boldsymbol{\tau}_{நி} = \sum \boldsymbol{\tau}_i = \sum \boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0} \qquad (7.44)$$

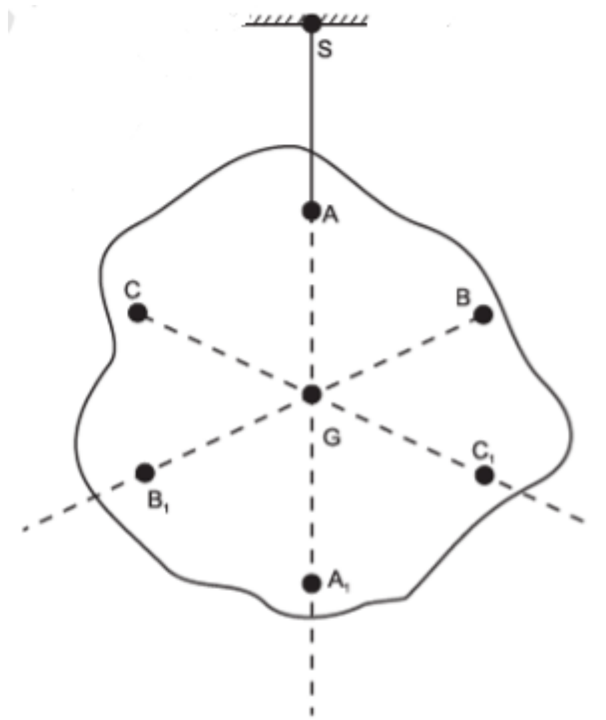
எனவே, நிறையீர்ப்புமையம் என்பது பொருளின்மீதான புவியீர்ப்பின் மொத்த கோணவிசை சுழியமாகும் புள்ளி என்று வரையறுக்கலாம்.



படம் 7.24 ஒரு அட்டைப்பலகையை ஒரு பென்சிலின் நுனியில் சமனாக்கல். G என்ற ஆதாரப்புள்ளி நிறையீர்ப்புமையம்.

(7.44)ஆம் சமன்பாட்டில் $\boldsymbol{g}$ எல்லாத்துகள் களுக்கும் பொதுவானதால் கூட்டலுக்கு வெளியே வரலாம். அதனால் $\boldsymbol{g}$ சுழியமன்று என்பதால், $\sum m_i x_i = 0$. இடநிலைத்திசையன்களை ($\boldsymbol{r}_i$) நியீமையைப்பொறுத்து எடுத்திருப்பதை நினைவு கொள்க. 7.2ஆம் பகுதியில் (7.4) ஆம் சமன்பாட் டின்கீழ் தந்த விளக்கத்தின்படி கூட்டுத்தொகை சுழியமெனில் மூலம் பொருளின் நிறைமையமாக இருக்கவேண்டும். இவ்வாறு, பொருளின் நிறையீர்ப்புமையம் சீரான புவியீர்ப்பிலும் நிறையீர்ப்பற்ற வெளியிலும் நிறைமையத்துடன் ஒன்றுகிறது. பொருள் சிறிதாயிருப்பதால் பொருளின் ஒருபுள்ளியிலிருந்து மற்றதற்கு $\boldsymbol{g}$ மாறவில்லை என்பதை நோக்குக. பொருளின் வெவ்வேறு பகுதிகளில் $\boldsymbol{g}$ மாறுமளவுக்கு நீட்டமுள்ள பொருளுக்கு நிறையீர்ப்புமையம் நிறைமையத் துடன் ஒன்றாது. அடிப்படையில் இவை வெவ்வேறு கருத்துருகள். நிறைமையம் நிறையீர்ப்புடன் தொடர்பற்றது; பொருளில் நிறையின் பரவலுடனே தொடர்புடையது.

7.2ஆம் பகுதியில் பல ஒழுங்கான ஒருமைச்சீரான பொருள்களுக்கு நிறைமையங் களை கண்டுபிடித்தோம். இவை போதுமான அளவுக்கு சிறியனவாயிருந்தால் அதே முறைகள் இந்தப்பொருள்களின் நிறையீர்ப்புமையங்க ளையும் தருகின்றன என்பது தெளிவு.



படம் 7.25 ஒழுங்கற்ற வடிவமுள்ள ஒரு பொருளின் நிறையீர்ப்புமையத்தை தீர்மானித்தல். பொருளை Aயில் தொங்கவிடும்போது பொருளின் நிறையீர்ப்புமையம் Aயின்வழி செல்லும் நெடுநிற்பக்கோடான AA'இல் இருக்கிறது.

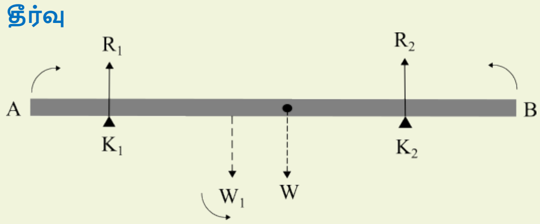
அட்டைப்பலகைபோன்ற ஒரு ஒழுங்கற்ற பொருளின் நிறையீர்ப்புமையத்தை கண்டுபிடிக்

கும் மற்றொரு முறையை படம் 7.25 காட்டுகிறது. பொருளை A போன்ற ஒரு புள்ளியில் தொங்கவிட்டால் அந்தப்புள்ளியின்வழி செல்லும் நெடுநிற்பக்கோட்டில் நியீமை இருக்கிறது. எனவே நெடுநிற்பக்கோட்டை AA_1 என்று குறித்துக்கொண்டு, பிறகு பொருளை B, C போன்ற மற்றப்புள்ளிகளில் தொங்கவிட்டு நெடுநிற்பக்கோடுகளை குறிக்கிறோம். இந்தக்கோடுகளின் இடைவெட்டு நியீமையை தருகிறது. ஏனென்று விளக்குக. பொருள் சிறிதென்பதால் இந்த முறை பொருளின் நிறைமையத்தை தீர்மானிக்கவும் உதவுகிறது.

சிக்கல் 7.8

$70\,cm$ நீளமும் $4\,kg$ நிறையுமுள்ள ஒரு மாழைத்தண்டை ஒவ்வொரு நுனியிலிருந்தும் $10\,cm$ தொலைவிலுள்ள இரண்டு கத்திமுனைகள் தாங்குமாறு வைக்கிறோம். ஒரு $6.00\,kg$ சுமையை ஒரு நுனியிலிருந்து $30\,cm$ தொலைவில் தொங்க விடுகிறோம். கத்திமுனைகளில் எதிர்வினைகளை காண்க. தண்டு சீரான குறுக்குவெட்டுள்ளதும் ஒருமைச்சீரானதும் எனக்கொள்க.

தீர்வு



படம் 7.26

படம் 7.26 தண்டை AB என்றும் கத்திமுனைகளை K_1, K_2 என்றும் நிறையீர்ப்புமையத்தை G என்றும் சுமை தொங்குமிடத்தை P என்றும் காட்டுகின்றது.

தண்டின் எடையான W அதன் நிறையீர்ப்புமையமான Gயில் செயலாற்றுவதை நோக்குக. தண்டு சீரான குறுக்குவெட்டுள்ளதும் ஒருமைச்சீரானதும் என்பதால் G தண்டின் நடுவிலுள்ளது. $AB = 70\,cm$. $AG = 35\,cm$. $AP = 30\,cm$. ஆகவே, $PG = 5\,cm$. $AK_1 = BK_2 = 10\,cm$. ஆகவே, $K_1G = K_2G = 25\,cm$. தண்டின் எடை $W = 4.00\,kg$. தொங்கவிட்ட சுமை $W_1 = 6.00\,kg$. R_1உம் R_2உம் கத்திமுனைகளிலுள்ள ஆதரவுகளின் செங்கோட்டு எதிர்வினைகள்.

தண்டின் நகர்வுச்சமநிலைக்கு

$$R_1 + R_2 - W_1 - W = 0 \qquad (i)$$

W_1உம் Wஉம் நெடுநிற்பக்கீழ்நோக்கியும் R_1உம் R_2உம் நெடுநிற்பமேனோக்கியும் செயலாற்றுவதை நோக்குக.

சுழற்சிச்சமநிலையை கருத விசைகளின் திருப்புமைகளை எடுப்போம். Gயைப்பற்றி எடுப்பது வசதியானது. R_1, W_1 ஆகியவற்றின் திருப்புமைகள் இடஞ்சுழி (நேர்மம்); R_2, W ஆகியவற்றின் திருப்புமைகள் வலஞ்சுழி (எதிர்மம்).

சுழற்சிச்சமநிலைக்கு

$$-R_1(K_1G) + W_1(PG) + R_2(K_2G) = 0 \qquad (ii)$$

கொடுத்தபடி, $W = 4.00g\,N$, $W_1 = 6.00g\,N$; இங்கு g புவியீர்ப்புமுடுக்கம்; இதன் மதிப்பை நாம் $9.8\,m\,s^{-2}$ எனக்கொள்வோம்.

எண்மதிப்புகளை செருகியபின் (i) ஆம் சமன்பாடு $R_1 + R_2 - 6.00g\,N - 4.00g\,N = 0$ என்று ஆகிறது. அதாவது,

$$R_1 + R_2 = 10.00\,g\,N = 98.00\,N \qquad (iii)$$

(ii) இலிருந்து $(-0.25\,m)R_1 + (0.05\,m) \times 6.00g\,N + (0.25\,m)R_2 = 0$.

அதாவது

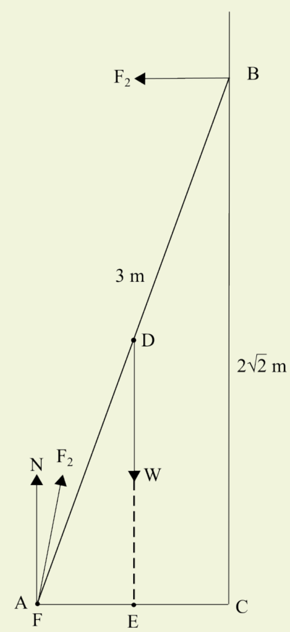
$$R_1 - R_2 = 1.2g\,N = 11.76\,N \qquad (iv)$$

(iii) இலிருந்தும் (iv) இலிருந்தும் $R_1 = 54.88\,N$, $R_2 = 43.12\,N$

இவ்வாறு, ஆதாரங்களின் எதிர்வினைகள் K_1இல் சுமார் $55\,N$உம் K_2இல் $43\,N$உம்.

சிக்கல் 7.9

$3\,m$ நீளமும் $20\,kg$ எடையுமுள்ள ஒரு ஏணி ஒரு உராய்வற்ற சுவரில் சாய்ந்திருக்கிறது. அதன் அடி தரையில் சுவரிலிருந்து $1\,m$ தொலைவில் படம் 7.27இல் காட்டியபடி இருக்கிறது. சுவரும் தரையும் செலுத்தும் எதிர்வினைவிசைகளை காண்க.



படம் 7.27

தீர்வு

AB என்று குறித்த ஏணி $3\,m$ நீளமானது; அதன் அடி (A) தரையில் சுவரிலிருந்து $1\,m\,(AC)$ தொலைவில் இருக்கிறது. பித்தாகரசின் தேற்றத்திலிருந்து $BC = 2\sqrt{2}\,m$.

ஏணியின்மீதான விசைகள் அதன் நிறையீர்ப்புமையத்தில் (D) செயலாற்றும் அதன் எடையும் (W) சுவரிலும் தரையிலும் செயலாற்றும் முறையே F_1 , F_2 என்ற எதிர்வினைகளும். சுவர் உராய்வற்றதால், F_1 சுவருக்கு செங்குத்தானது. F_2இல் நெடுநிற்ப எதிர்வினையான Nஉம் உராய்வுவிசையான Fஉம் ஆகிய இரண்டு அகைகள் உள்ளன. F ஏணி சுவரைவிட்டுச்சருக்காமல் தடுக்கிறது; எனவே இது சுவரைநோக்கி செயலாற்றுகிறது.

நகர்வுச்சமநிலைக்கு, விசைகள்

நெடுநிற்பத்திசையில்

$$N - W = 0 \qquad (i)$$

கிடைமட்டத்திசையில்

$$F - F_1 = 0 \qquad (ii)$$

சுழற்சிச்சமநிலைக்கு,

Aயைப்பற்றிய திருப்புமை

$$2\sqrt{2}F_1 - \frac{1}{2}W = 0 \qquad (iii)$$

ஏணியின் நிறை $20\ kg$ என்பதால்

$W = 20 \times 9.8\ N = 196.0\ N.$

ஆகவே,

(i)இலிருந்து $N = 196.0\ N$

(iii)இலிருந்து

$F_1 = W/4\sqrt{2} = 196.0/4\sqrt{2} = 34.6\ N$

(ii)இலிருந்து $F = F_1 = 34.6\ N$

$$F_2 = \sqrt{F^2 + N^2} = 199.0\ N$$

F_2 கிடைமட்டத்துடன் தாங்கும் கோணம், α எனில்,

$$\text{தொவி}\ \alpha = \frac{N}{F} = 4\sqrt{2},$$

$$\alpha = \text{தொவி}^{-1}\left(4\sqrt{2}\right) \approx 80^\circ$$

7.9 கோணநிறை

சுழற்சியசைவின் கற்றலை நாம் ஏற்கெனவே நகர்வசைவை கற்றதற்கு இணையாக நடத்திச்செல்வதாக முன்பே சொன்னோம். இதற்குத்தொடர்பான ஒரு பெருங்கேள்வியை இன்னும் அணுகவில்லை. **சுழற்சியசைவில் நிறைக்கு நிகரானது என்ன?** இந்தக்கேள்விக்கு விடையளிக்க இந்த பகுதியில் முயல்வோம். உரையை எளிமையாக்க, நிலையச்சைப்பற்றிய சுழற்சியை மட்டுமே கருதுவோம். **சுழலும் பொருளின் இயக்கவாற்றலுக்கு** ஒரு கோவையை பெறமுயல்வோம். நிலையான அச்சைப்பற்றி சுழலும் ஒரு பொருளுக்கு பொருளின் ஒவ்வொரு துகளும் ஒரு வட்டப்பாதையில் (7.22) ஆம் சமன்பாடு தரும் திசைவேகத்துடன் அசைவதை அறிவோம் (படம் 7.16). அச்சிலிருந்து r_i என்ற தொலைவிலுள்ள ஒரு துகளின் நேரியத்திசைவேகம் $v_i = r_i\omega$. ஆகவே, இந்த அசைவின் இயக்கவாற்றல்

$$k_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2$$

இங்கு, m_i துகளின் நிறை. பொருளின் மொத்த இயக்கவாற்றலைப்பெற பொருளிலுள்ள எல்லாத் துகள்களின் இயக்கவாற்றலையும் கூட்டுகிறோம்.

$$K = \sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega_i^2$$

இங்கு n பொருளிலுள்ள துகள்களின் எண்ணிக்கை. எல்லாத்துகள்களுக்கும் ω சமம் என்பதை நோக்குக. எனவே, ω வை கூட்டலடுக்குக்கு வெளியே எடுத்து

$$K = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

என்று எழுதலாம்.

இப்போது நெளியாப்பொருளின் சிறப்பியல்பாக கோணநிறை என்ற ஒரு புதிய அளவுருவை வரையறுத்து அதை I என்று குறிக்கிறோம்.

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad (7.45)$$

இந்த வரையறையுடன் இயக்கவாற்றல்

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (7.46)$$

என்றாகிறது.

I என்ற அளவுரு கோணத்திசைவேகத்தின் பருமனளவை சாராதது என்பதை நோக்குக. இது நெளியாப்பொருளுக்கும் அதன் சுழற்சியச்சுக்குமான ஒரு சிறப்பியல்பு.

சுழலும் பொருளின் இயக்கவாற்றலுக்கான (7.46)ஆம் சமன்பாட்டை நேரிய நகர்வசைவின் இயக்கவாற்றலுக்கான

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

என்பதுடன் ஒப்பிடுக. இங்கு, m பொருளின் நிறையும் v அதன் திசைவேகமும். நிலையான அச்சைப்பற்றிய சுழற்சியின் கோணத்திசை வேகம் (ω) நகர்வசை வின் திசைவேகத்துக்கு (v) நிகராவதை ஏற்கெனவே கண்டிருக்கிறோம். இப்போது நகர்வசைவில் நிறைக்கு நிகரானதை சுழற்சியசைவில் நாம் கண்டுபிடிக்க விரும்பியது இந்த கோணநிறையே என்பது தெளிவாகிறது. நேரிய அசைவில் நிறை ஆற்றிய பங்கை (நிலையான அச்சைப்பற்றிய) சுழற்சியசைவில் கோணநிறை ஆற்றுகிறது.

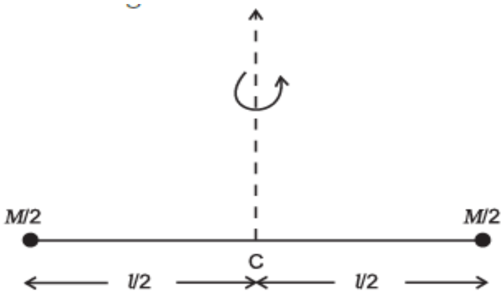
இப்போது (7.45)இலுள்ள வரையறையை பயன்படுத்தி இரண்டு எளிய வேற்றுவங்களில் கோணநிறைகளை கணக்கிடுவோம்.

(அ) R ஆரமும் M நிறையுமுள்ள ஒரு மெல்லிய வளையம் அதன் தளத்தில் அதன் மையத்தைப்பற்றி ω கோணத்திசை வேகத்துடன் சுழல்வதை கருதுக. வளையத்தின் ஒவ்வொரு நிறைத்தனிகமும் அச்சிலிருந்து R

தொலைவிலுள்ளது; $R\omega$ என்ற திசைவேகத்தில் அசைகிறது. எனவே, இயக்கவாற்றல்

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}MR_2\omega^2$$

இதை (7.46)ஆம் சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிட்டு வளையத்துக்கு $I = MR^2$ என்று பெறுகிறோம்.



படம் 7.28 நுனிகளில் நிறையுள்ள l நீளமுள்ள ஒரு கனமற்ற தண்டு நிறைமையத்தின்வழி செல்லும் செங்குத்தச்சில் சுழல்தல். அமைப்பின் மொத்த நிறை M.

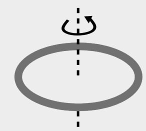
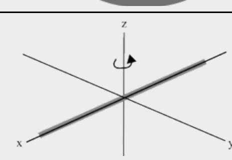
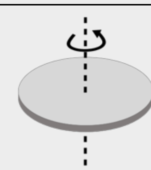
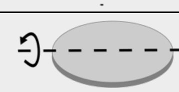
(ஆ) புறக்கணிக்கத்தக்க நிறையும் l நீளமுமுள்ள ஒரு நெளியாத்தண்டின் இரு நுனிகளிலும் இரண்டு சிறு நிறைகள் இருப்பதாகவும் அது தன் நிறைமையத்தின்வழி செல்லும் செங்குத்தான அச்சைப்பற்றி சுழல்வதாகவும் கொள்வோம் (படம் 7.28). ஒவ்வொரு நிறையும் $M/2$ என்க; அது சுழற்சியச்சிலிருந்து $l/2$ தொலைவில் இருக்கிறது. எனவே நிறைகளின் கோணநிறைகள்

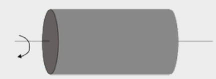
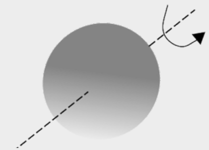
$$\frac{M}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{M}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{4}$$

நமக்குத்தெரிந்த சில ஒழுங்கான வடிவமுள்ள பொருள்களுக்கு குறிப்பிட்ட அச்சுகளைப்பற்றிய கோணநிறையை அட்டவணை 7.1 தருகிறது. (இந்த விளைவுகளை வருவிப்பது இந்தப்பாடநூலின் நோக்கவீச்சுக்கு அப்பாற்பட்டது. அவற்றை நீங்கள் மேல்வகுப்புகளில் படிப்பீர்கள்.)

ஒரு பொருளின் நிறை அதன் நேரிய அசைவுக்கான தடையத்தின் ஒரு அளவீடு; அதாவது நேரிய அசைவின் மாறாமையின் ஒரு அளவீடு. அதைப்போலவே, கோணநிறை ஒரு அச்சைப்பற்றிய சுழற்சிக்கு தடையமிடுவதால் அதை பொருளின் சுழற்சியசைவின் மாறாமைக்கு அளவீடாக கருதலாம். இது பொருளில் அதன் வெவ்வேறு பகுதிகள் அச்சிலிருந்து வெவ்வேறு தொலைவுகளில் எவ்வாறு பரவியிருக்கின்றன என்பதன் ஒரு அளவீடு. பொருளின் நிறை அந்தப்பொருளின் பண்பு; ஆனால் கோணநிறை சுழற்சியச்சைப் பொறுத்தது; பொருளில் சுழற்சியச்சின் இருப்பிடத்தையும் திசையமைவையும் சார்ந்தது. அது அச்சைப்பற்றி நிறை விரவியிருப்பதை குறிக்கிறது. சுழலும் பொருளின் நிறை சுழற்சியச்சைப்பொறுத்து விரவியிருப்பதன் ஒரு அளவீடாக சுழலசைவாரம் (சுழலசைவின் ஆரம்) என்ற ஒரு புதிய அளவுருவை வரையறுக்கலாம். இது பொருளின் நிறையுடனும் கோணநிறையுடனும் தொடர்புள்ளது.

அட்டவணை 7.1 சில ஒழுங்கான வடிவங்களின் குறிப்பிட்ட அச்சுகளைப்பற்றிய கோணநிறைகள்

பொருள்	அச்சு	படம்	I
R ஆரமுள்ள மெல்லிய உருளைவளையம்	தளத்துக்கு செங்குத்தாக, மையம்வழியாக		MR^2
	விட்டம்		$\frac{MR^2}{2}$
L நீளமுள்ள மெல்லிய கோல்	கோலுக்கு செங்குத்தாக, நடுப்புள்ளியின்வழியாக		$\frac{ML^2}{12}$
R ஆரமான வட்டமான வட்டு	வட்டுக்கு செங்குத்தாக மையத்தின்வழி		$\frac{MR^2}{2}$
	விட்டம்		$\frac{MR^2}{4}$

R ஆரமுள்ள உள்வமற்ற உருளை	உருளையின் அச்சு		MR^2
R ஆரமுள்ள திண்மவுருளை	உருளையின் அச்சு		$\frac{MR^2}{2}$
R ஆரமுள்ள திண்மக்கோளம்	விட்டம்		$\frac{2MR^2}{5}$

எல்லா வேற்றுவங்களிலும் $I = Mk^2$ என்று எழுதலாம் என்பதை அட்டவணை 7.1இலிருந்து காண்கிறோம்; இங்கு k நீளத்தின் அலகுடையது. ஒரு தண்டுக்கு அதன் நடுப்புள்ளியிலுள்ள ஒரு செங்குத்தச்சைப்பற்றி $k^2 = L^2/12$; அதாவது, $k = L/\sqrt{12}$. அதேபோல், வட்டத்தட்டுக்கு விட்டத்தைப்பற்றி $k = R/2$. k என்ற நீளம் பொருளுக்கும் சுழற்சியச்சுக்குமான வடிவியற் பண்பு. இதை சுழலசைவாரம் என்கிறோம். பொருளின் ஒரு அச்சைப்பற்றிய சுழலசை வாரத்தை **பொருளின் நிறைக்குச்சமமான ஒரு புள்ளிநிறையை அச்சிலிருந்து எந்தத்தொலைவில் வைத்தால் அந்தப்புள்ளிநிறையின் அதே அச்சைப்பற்றிய கோணநிறை பொருளின் கோணநிறைக்கு சமமாகுமோ அந்தத் தொலைவு** என்று வரையறுக்கிறோம்.

இவ்வாறு, ஒரு நெளியாப்பொருளின் கோணநிறை பொருளின் நிறை, வடிவம், அளவு, சுழற்சியச்சின் இருப்பிடம், அச்சின் திசையமைவு, சுழற்சியச்சைப்பற்றி நிறையின் பரவல் ஆகியவற்றை சார்ந்தது.

கோணநிறையின் வரையறையான (7.45)ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து அதன் அலகுகள் ML^2 என்றும் அவ்வலகில் அது $kg\, m^2$ என்றும் அறிகிறோம்.

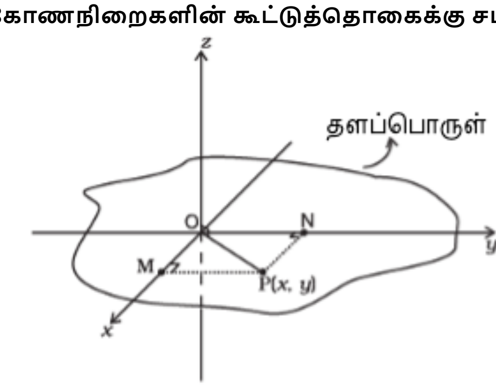
சுழற்சியின் மாறாமையின் அளவீடான இந்த அதிமுக்கியமான I நடைமுறையில் பலவிடங்களில் மிகவும் பயன்படுகிறது. சுழற்சியசைவை உண்டாக்கும் நீராவியெந்திரம், தானுந்து போன்ற எந்திரங்களில், மிகப்பெரிய கோணநிறையுள்ள **சுழற்சக்கரம்** என்ற ஒரு தட்டு உள்ளது. அதன் கோணநிறை அதிகமாயிருப்பதால் ஊர்தியின் வேகம் திடீரென்று அதிகரிப்பதற்கும் குறைவதற்கும் சுழற்சக்கரம் தடுப்பியிட்டு சுழற்சக்கரம் சுழற்சிக்கு தடையமளிக்கிறது. ஊர்தி குலுங்காமல் அதன் வேகம் சீராக மாறி பயணிகள் குலுங்காமல் பயணிக்க இது உதவுகிறது.

7.10 செங்குத்தச்சுத்தேற்றமும் இணையச்சுத்தேற்றமும்

கோணநிறையைப்பற்றிய இரண்டு முக்கியமான தேற்றங்கள் உள்ளன. இந்த தேற்றக்கூற்றுகளை மட்டும் உரைத்து அவற்றின் பயன்பாடுகளை காண்போம். இவற்றின் நிறுவல்களை இங்கு தரவில்லை. முதலில் நாம் செங்குத்தச்சுத்தேற்றத்தையும் சில ஒழுங்குப் பொருள்களின் கோணநிறையை தீர்மானிக்க அதன் எளிய பயன்பாடுகளையும் உரையளிப்போம்.

7.10.1 செங்குத்தச்சுத்தேற்றம்

இந்தத்தேற்றம் தளப்பொருள்களுக்கு பயனாகிறது. நடைமுறையில் இந்தத்தேற்றம் நீளம் அகலம், ஆரம் போன்ற மற்ற அளவுகளைவிட தடிமன் மிகவும் குறைவாயிருக்கும் தட்டையான பொருள்களுக்கு பயனாகிறது. இதன் கூற்று பின்வறுமாறு. **ஒரு தளப்பொருளின் (மென்றாளின்) தளத்துக்கு செங்குத்தான ஒரு அச்சைப்பற்றிய கோணநிறை தளத்தில் அந்த அச்சை வெட்டிக்கிடக்கும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரண்டு அச்சுகளைப்பற்றிய கோணநிறைகளின் கூட்டுத்தொகைக்கு சமம்.**



படம் 7.29 தளப்பொருள்களுக்கு பயனாகும் செங்குத்தச்சுத்தேற்றம்; x, yஅச்சுகள் தளத்திலுள்ள இரண்டு செங்குத்தச்சுகள்; zஅச்சு தளத்துக்கு செங்குத்தானது.

படம் 7.29 ஒரு தளப்பொருளை காட்டுகிறது. பொருளுக்கு செங்குத்தாக $\boldsymbol{O}$ என்ற புள்ளியின்வழி செல்லும் அச்சை z அச்சாக எடுப்போம். தளத்தில் கிடக்கும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான அச்சுகளை x, y அச்சுகளாக எடுப்போம். மூன்று அச்சுகளும் O வில் சந்திக்கின்றன. தேற்றம்

$$I_z = I_x + I_y \qquad (7.47)$$

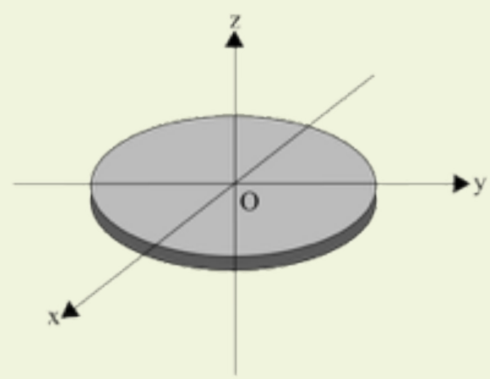
என்கிறது.

இந்த தேற்றத்தின் பயனை ஒரு சான்றால் காண்போம்.

சிக்கல் 7.10

ஒரு வட்டின் ஒரு விட்டத்தைப்பற்றி அதன் கோணநிறை என்ன?

தீர்வு



படம் 7.30 ஒரு வட்டின் தளத்துக்கு செங்குத்தாக அதன் மையத்தின்வழி செல்லும் அச்சைப்பற்றிய கோணநிறையிலிருந்து வட்டின் விட்டத்தைப்பற்றிய கோணநிறை.

வட்டை தளப்பொருளாக கொண்டு செங்குத்தச்சுத்தேற்றத்தை பயனாக்கலாம். படம் 7.30இல் காட்டியபடி வட்டின் மையத்தின் வழி $(O)\, x, y, z$ என்ற மூன்று அச்சுகளை எடுப்போம். z அச்சு தளத்துக்கு செங்குத்தாக வும் மற்ற இரண்டும் தளத்திலும் இருக்கின் றன. செங்குத்தச்சுத்தேற்றத்திலிருந்து

$$I_z = I_x + I_y$$

x, yஅச்சுகள் வட்டின் இரண்டு விட்டங்கள். சமச்சீர்மையால் கோணநிறை எந்த விட்டத்தைப்பற்றியும் சமமதிப்புடையது. எனவே $I_x = I_y$. இதை பயன்படுத்தி

$$I_z = 2I_x$$

என்று பெறுகிறோம். $I_z = {MR^2}/{2}$ என்பதை நாம் அறிவதால், $I_x = {I_z}/{2} = {MR^2}/{4}$ என்ற இறுதிவிடையை பெறுகிறோம்.

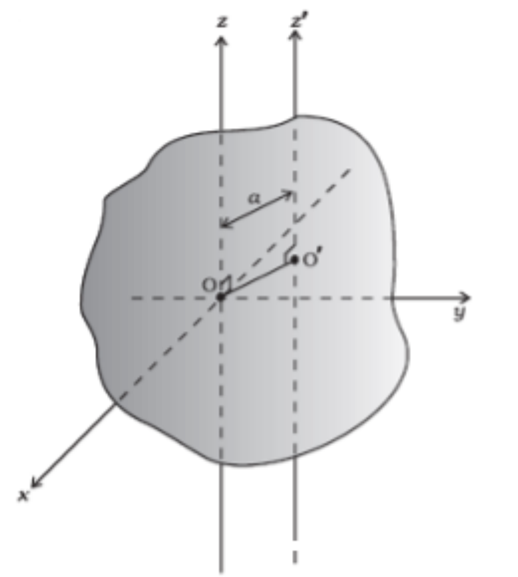
இவ்வாறு, வட்டின் எந்த விட்டத்தையும்பற்றிய கோணநிறை ${MR^2}/{4}$; இங்கு, M வட்டின் நிறையும் R அதன் ஆரமும்.

இதைப்போலவே, ஒரு வளையத்தின் விட்டத்தைப்பற்றிய கோணநிறையை காண்க. இந்த தேற்றம் ஒரு திண்மவுருளைக்கு பயனாகிறதா?

7.10.2 இணையச்சுத்தேற்றம்

இந்தத்தேற்றம் எந்த வடிவமுள்ள பொருளுக்கும் பயனாகிறது. பொருளின் நிறைமையத்தின்வழி செல்லும் ஒரு அச்சைப்பற்றிய கோணநிறை தெரிந்தால் அதற்கு இணையான மற்றொரு அச்சைப்பற்றிய கோணநிறையை தீர்மானிக்க இந்த தேற்றம் உதவுகிறது.

இந்த தேற்றத்தின் கூற்று: ஒரு பொருளின் எந்தவொரு அச்சையும்பற்றிய கோணநிறை பொருளின் நிறைமையத்தின்வழி செல்லும் அச்சைப்பற்றிய கோணநிறையுடன் பொருளின் நிறையையும் இரண்டு அச்சுகளுக்கிடையான தொலைவின் வர்க்கத்தையும் பெருக்கிய தொகையின் கூட்டலுக்கு சமம்.



படம் 7.31 இணையச்சுத்தேற்றம். z, z' ஆகிய இரண்டும் a தொலைவிலுள்ள இணையச்சுகள். O பொருளின் நிறைமையம். $OO' = a$.

படம் 7.31இல் காட்டியபடி z, z' ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று இணையான இரண்டு அச்சுகள். அவற்றிடையான தொலைவு a. zஅச்சு நெளியாப் பொருளின் நிறைமையத்தின்வழி (O) செல்கி றது. அப்படியெனில், இணையச்சுத்தேற்றம்

$$I_{z'} = I_z + Ma^2 \qquad (7.48)$$

என்கிறது. இங்கு $I_z, I_{z'}$ ஆகியவை முறையே z, z' அச்சுகளைப்பற்றி பொருளின் கோணநிறை, M பொருளின் நிறை, a இரண்டு இணையச்சுகளுக் கிடையான தொலைவு.

சிக்கல் 7.11

M நிறையும் l நீளமுமுள்ள ஒரு தண்டின் ஒரு நுனியின்வழி செல்லும் செங்குத்தச்சைப் பற்றிய கோணநிறையை காண்க.

தீர்வு

M நிறையும் l நீளமுமுள்ள ஒரு தண்டின் மையத்தின்வழி செல்லும் செங்குத்தச்சைப் பற்றிய கோணநிறை $I = Ml^2/12$. இணையச்சுத்தேற்றத்தை பயன்படுத்தி, $I' = I + Ma^2$. அதாவது,

$$I' = M\frac{l^2}{12} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{3}$$

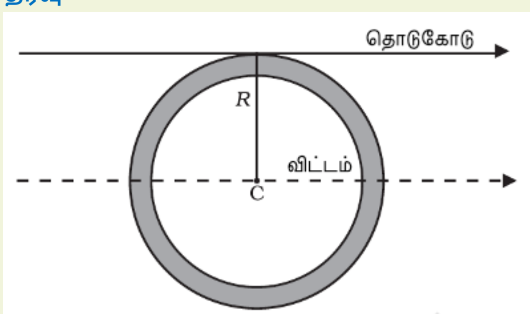
இதை வேறுவிதமாகவும் நாம் சரிபார்க்கலாம். இந்த கோணநிறையை $2M$ நிறையும் $2l$ நீளமுமுள்ள தண்டின் மையச் செங்குத்தச்சைப் பற்றிய கோணநிறையின் பாதியாக கணக்கிடலாம். அதாவது

$$I' = 2M\frac{4l^2}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{Ml^2}{3}$$

சிக்கல் 7.12

ஒரு வளையத்தின் தொடுகோட்டைப் பற்றி அதன் கோணநிறை என்ன?

தீர்வு



படம் 7.32

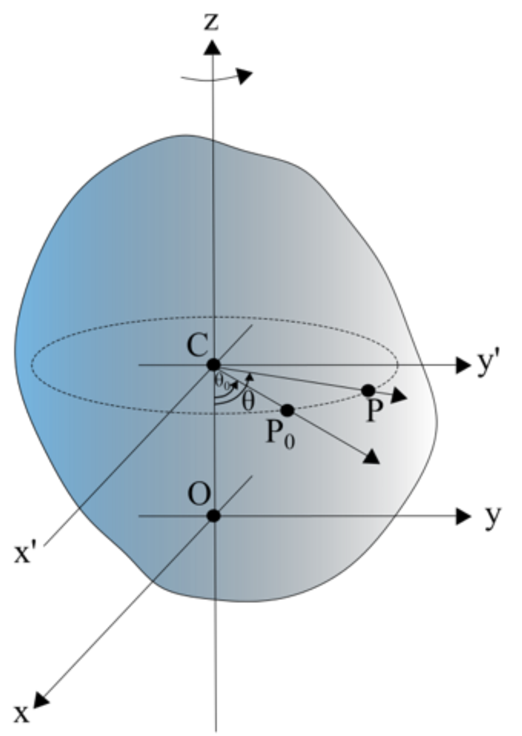
வளையத்தின் ஒவ்வொரு தொடுகோடும் அதன் ஒரு விட்டத்துக்கு இணையானது. இந்த இரண்டு அச்சுகளுக்குமிடையான தொலைவு வட்டத்தின் ஆரமான R. இணையச்சுத் தேற்றத்தால்

$$I_{\text{தொ}} = I_{\text{வி}} + MR^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

7.11 நிலையான அச்சைப்பற்றிய சுழற்சியசைவின் அசைவியல்

நகர்வசைவுக்கும் சுழற்சியசைவுக்குமுள்ள ஒற்றுமைகளை நாம் ஏற்கெனவே கவனித்திருக்கிறோம். சான்றாக, நகர்வில் திசைவேகம் ஆற்றும் பங்கை சுழற்சியில் கோணத்திசைவேகம் ஆற்றுகிறது. இந்த உவமையை மேலும் எடுத்துச்செல்வோம். நாம் நிலையான அச்சைப்பற்றிய சுழற்சிக்கு மட்டும் இந்த உவமையை கருதுவோம். இவ்வகையான அசைவில் ஒரேயொரு அசைவினகை உள்ளது. அதாவது இந்த அசைவை விவரிக்க ஒரேயொரு சாராமாறியே தேவைப்படுகிறது. நகர்வசைவில் நேரிய நகர்வு இந்த ஒற்றை அசைவினகையாக பணியாற்றுகிறது. இந்தப்பகுதியில் அசைவியலையும் அடுத்த பகுதியில் இயங்கியலையும் நாம் காண்போம்.

ஒரு சுழலும் பொருளின் கோண இடநகர்வை குறிப்பிட அந்தப்பொருளின் ஏதோவொரு துகளை கருதுகிறோம். இதை படம் 7.33இல் P என்று குறிக்கிறோம். துகள் அசையும் தளத்தில் அது அசையும் θ என்ற கோணம் பொருளின் கோண இடப்பெயர்ச்சி. இந்த கோணத்தை அசைவுத் தளத்திலுள்ள ஒரு நிலையான அச்சிலிருந்து அளக்கவேண்டும். இதற்காக x அச்சுக்கு இணையாக தளத்தில் கிடக்கும் x' அச்சை எடுக்கிறோம். சுழற்சியச்சு zஅச்சு என்பதையும் அசைவுத்தளம் xy தளம் என்பதையும் நோக்குக. படம் 7.33 $t = 0$ என்ற நேரத்தில் தொடக்கநிலையான θ_0 ஐயும் காட்டுகிறது.



படம் 7.33 ஒரு நெளியாப்பொருளின் கோண இடநிலையை குறிப்பிடல்

கோணவிடநகர்வு நேரத்துடன் மாறும் வீதம் கோணத்திசைவேகம், $\omega = d\theta/dt$. சுழற்சியச்சு நிலையானதென்பதால் கோணத்திசை வேகத்தை திசையனாக கருதவேண்டியது தேவையில்லை. அடுத்ததாக, கோணமுடுக்கம் $\alpha = d\omega/dt$.

சுழற்சியசைவில் அசைவியலளவுகளான கோணவிடப்பெயர்ச்சி (θ), கோணத்திசை வேகம் (ω), கோணமுடுக்கம் (α) ஆகியவை நகர்வசைவின் அசைவியலளவுகளான முறையே இடப்பெயர்ச்சி (x), திசைவேகம் (v), முடுக்கம் (a) ஆகியவற்றுக்கு நிகரானவை. சீரான (மாறாத)

முடுக்கமுள்ள நேரிய அசைவின் அசைவியற் சமன்பாடுகளை நாம் அறிவோம். அவை

$$v = v_0 + at \qquad (a)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (b)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \qquad (c)$$

இங்கு x_0 தொடக்கவிடநகர்வு, v_0 தொடக்கத் திசைவேகம் தொடக்க என்ற சொல் $t = 0$ என்ற நேரத்திலுள்ள மதிப்புகளை குறிக்கிறது.

சீரான முடுக்கமுள்ள சுழற்சிக்கு நிகரான அசைவியற்சமன்பாடுகள்

$$\omega = \omega_0 + at \qquad (7.49)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (7.50)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \qquad (7.51)$$

இங்கு θ_0 தொடக்கக்கோணவிடநகர்வு; ω_0 தொடக்கக்கோணத்திசைவேகம்.

சிக்கல் 7.13 (7.49)(7.49) ஆம் சமன்பாட்டை முதற்கொள்கை களிலிருந்து வருவிக்க.

தீர்வு

கோணமுடுக்கம் சீரானது. அதாவது,

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha = \text{மாறிலி}$$

இந்த சமன்பாட்டை தொகையிட்டு

$$\omega = \int \alpha\, dt + c = \alpha t + c \ (\alpha \text{ மாறிலி என்பதால்})$$

என்று பெறுகிறோம். $t = 0$ இல் $\omega = \omega_0$ என்ற தொடக்கநிலவரம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதை மேலுள்ள சமன்பாட்டில் மாற்றிடும் போது $\omega_0 = c$ என்பதை பெறுகிறோம். இது தொகையீட்டு மாறிலியை தீர்மானிக்கிறது. எனவே $\omega = \omega_0 + \alpha t$ என்று இறுதிவிடையை பெறுகிறோம்.

$\omega = d\theta/dt$ என்ற வரையறையிலிருந்து (7.49)ஆம் சமன்பாட்டை தொகையிட்டு (7.50)ஆம் சமன்பாட்டை பெறலாம். இந்த வருவித்தலையும் (7.51) ஆம் சமன்பாட்டின் வருவித்தலையும் உங்களுக்கு பயிற்சியாக விடுகிறோம்.

சிக்கல் 7.14

ஒரு உந்துவிச்சக்கரத்தின் கோணவேகம் 1200 நிசுவிலிருந்து 3120 நிசுவாக 16நொடிகளில் அதிகரிக்கிறது. (அ) முடுக்கம் சீரானது என்ற எடுகோளுடன், கோணமுடுக் கம் என்ன? (ஆ) இந்த நேர இடைவெளியில் உந்துவி எத்தனை சுழற்சிகளை மேற்கொள் கிறது? (xநிசு = நிமிடத்துக்கு x சுழற்சிகள்)

தீர்வு

(அ) $\omega = \omega_0 + \alpha t$ என்பதை பயன்படுத்துவோம்.

தொடக்கக்கோணவேகத்தை நொடிக்கு ஆரையனில் கணக்கிட்டுக்கொள்வோம். இதற்காக 1 சுழற்சி = 2π ஆரையன் (rad), 1 நிமிடம் = 60 நொடி (s) என்ற அலகுமாற்றல்களை பயன்படுத்துவோம்.

$$\omega_0 = 1200 \frac{\text{சு}}{\text{நி}} \times \frac{2\pi \text{ ஆ}}{1 \text{ சு}} \times \frac{1 \text{ நி}}{60 \text{ நொ}} = 40\,\pi \text{ ஆ}/\text{நொ}$$

இதைப்போல், இறுதிக்கோணவேகம்

$$\omega = 3120 \times \frac{2\pi \text{ ஆ}}{60 \text{ நொ}} = 104\pi\, rad.s^{-1}$$

எனவே, உந்துவியின் கோணமுடுக்கம் $\alpha = (\omega - \omega_0)/t = 4\pi\, rad.s^{-2}$

(ஆ) t என்ற நேரத்தில் கோணவிடப் பெயர்ச்சி

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$= \left(40\pi \times 16 + \frac{1}{2} \times 4\pi \times 16^2\right) rad$$

$$= 1152\,\pi\, rad$$

7.12 நிலையான அச்சைப்பற்றிய சுழற்சியசைவின் இயங்கியல்

நேரியவசைவுடன் தொடர்பான அளவுகளையும் சுழற்சியசைவில் அவற்றுக்கு நிகரானவற்றையும் அட்டவணை 7.2 தருகிறது. இரண்டு விதமான அசைவுகளின் அசைவியலை நாம் ஏற்கெனவே ஒப்பிட்டோம். மேலும், நேரியவசைவில் நிறையும் விசையும் ஆற்றும் பங்குகளை சுழற்சியசைவில் முறையே கோணநிறையும் கோணவிசையும் ஆற்றுகின்றன என்பதையும் நாம் அறிகிறோம். இவற்றை அறிந்தபின், அட்டவணையிலுள்ள மற்றவற்றுக்கு நிகரானவைற்றை நாம் எளிதில் ஊகிக்கலாம். சான்றாக, நேரிய அசைவில் வேலையை $F\, dx$ என்ற வாய்பாட்டால் பெறுவதை நாம் அறிவோம்; $dx \leftrightarrow d\theta$, $F \leftrightarrow \tau$ என்ற நிகர் களையும் நாம் அறிவதால், நிலையச்சுச்சுழற்சியில் வேலை $\tau\, d\theta$ வாக இருக்கவேண்டும். எனினும் இந்த தொடர்புகளை வலுவான இயங்கியற்கருத்துகளால் நிலைநாட்டுவது அவசியம். அதை இப்போது செய்வோம்.

இதை தொடங்குமுன், **நிலையச்சுச்சுழற்சியின் வேற்றுவத்தில் எழும் ஒரு எளிமையாக்கலை** நோக்குவோம். அச்சு நிலையானதால், அந்த நிலையான அச்சுக்கு நேரான கோணவிசையின் அகையை மட்டும் கருதினால் போதும். இந்த அகைகளே பொருளின் சுழற்சிக்கு காரணமாகின்றன. சுழற்சியச்சுக்கு செங்குத்தான கோணவிசை யகை அச்சை அதன் நிலையிலிருந்து திருப்ப முயல்கிறது. புறக்கோணவிசைகளின் இவ்வாறான செங்குத்தகைகளை நீக்கி அச்சை நிலையாக வைத்திருக்கும் கட்டுறுத்தவிசைகள் இருக்கின்றன என்று எடுகொள்கிறோம். எனவே

செங்குத்தான புறக்கோணவிசைகளை நாம் கணக்கிலெடுக்கவேண்டியதில்லை. இதனால் நெளியாப்பொருள்களில் கோணவிசைகளின் கணக்கீடுகளுக்காக:

(அ) அச்சுக்கு செங்குத்தான தளத்தில் கிடக்கும் விசைகளையே நாம் கருதவேண்டும். அச்சுக்கு இணையான விசைகள் அச்சுக்குச்செங்குத்தான கோணவிசைகளை விளைவிக்கும் என்பதால் அவற்றை நாம் கணக்கிலெடுக்கவேண்டியதில்லை.

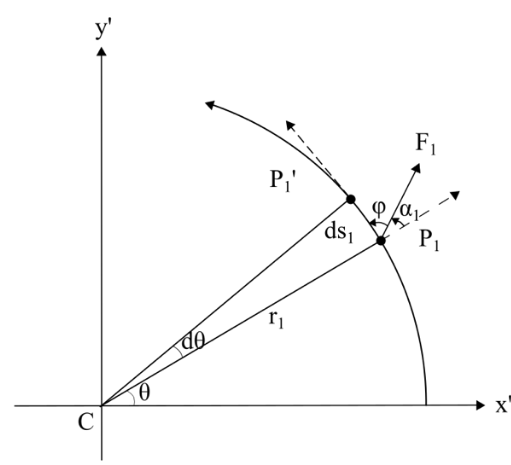
(ஆ) அச்சுக்கு செங்குத்தான இடநிலைத்திசை யன்களின் அகைகளையே நாம் கருதவேண்டும். அச்சுக்கிணையான இடநிலையகைகள் அச்சுக்குச் செங்குத்தான கோணவிசைகளை விளைவிப்பதால் அவற்றை நாம் கணக்கிலெடுக்கவேண்டியதில்லை.

அட்டவணை 7.2 நகர்வசைவையும் சுழற்சியசைவையும் ஒப்பிடல்

நேரிய அசைவு	நிலையச்சைப்பற்றிய சுழலசைவு
இடப்பெயர்ச்சி x	கோண இடப்பெயர்ச்சி θ
திசைவேகம் $v = \frac{dx}{dt}$	கோணத்திசைவேகம் $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
முடுக்கம் $a = \frac{dv}{dt}$	கோணமுடுக்கம் $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
நிறை M	கோணநிறை I
விசை $F = Ma$	கோணவிசை $\tau = I\alpha$
வேலை $dW = Fds$	வேலை $dW = \tau d\theta$
இயக்கவாற்றல் $K = \frac{Mv^2}{2}$	இயக்கவாற்றல் $K = \frac{I\omega^2}{2}$
திறன் $P = Fv$	திறன் $P = \tau\omega$
நேரியவுந்தம் $p = Mv$	கோணவுந்தம் $L = I\omega$

கோணவிசை செய்யும் வேலை

நிலையச்சைப்பற்றி சுழலும் ஒரு நெளியாப் பொருளின் குறுக்குவெட்டை படம் 7.34 காட்டுகிறது. சுழற்சியச்சை z அச்சாக எடுக்கிறோம். படம் 7.33இல் சுழற்சித்தளத்துக்கு செங்குத்தாக காட்டிய அச்சை படம் 7.34இல் தாளுக்கு செங்குத்தாக காட்டியிருக் கிறோம். மேலே சொன்னபடி அச்சுக்குச்செங்குத் தான தளத்தில் கிடக்கும் விசைகளை மட்டுமே நாம் கருதவேண்டும். பொருளின் P_1 என்ற இடத்திலுள்ள துகளில் செயலாற்றும் $\boldsymbol{F}_1$ அவ்வாறான ஒரு விசை என்க. வசதிக்காக அது செயலாற்றும் தளத்தை x', y' தளம் (தாளின் தளம்) என்போம். P_1இலுள்ள துகள் அச்சிலுள்ள C என்ற புள்ளியில் மையமும் r ஆரமும் உள்ள வட்டப்பாதையில் செல்கிறது; எனவே $CP_1 = r$.



படம் 7.34 நிலையான அச்சைப்பற்றி சுழலும் ஒரு பொருளின் துகளின்மீது செயலாற்றும் F_1 என்ற விசை செய்யும் வேலை. துகள் அச்சிலுள்ள C மையமாகவுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில் செல்கிறது. $P_1P_1'(ds_1)$ என்ற வில் துகளின் இடப்பெயர்ச்சியை தருகிறது.

Δt என்ற நேர இடைவெளியில் புள்ளி P_1' என்ற இடநிலைக்கு செல்கிறது. எனவே, துகளின் இடப்பெயர்ச்சி $d\boldsymbol{s}_1$ இன் பருமனளவு $ds_1 = r_1 d\theta$; அதன் திசை படத்தில் காட்டியபடி வட்டப்பாதையின் P_1இலுள்ள தொடுகோட்டுக்கு நேரானது. இங்கு, $d\theta = \angle P_1 C P_1'$. விசை துகளின்மீது செய்யும் வேலை

$$dW_1 = \boldsymbol{F_1} \cdot d\boldsymbol{s_1} = F_1 ds_1 \text{ உவவி } \varphi_1$$
$$= F_1(r_1 d\theta) \text{ வவி } \alpha_1$$

இங்கு φ_1 $\boldsymbol{F}_1$க்கும் P_1இலுள்ள தொடுகோட்டுக்குமிடையான கோணம், α_1 $\boldsymbol{F}_1$க்கும் ஆரத்திசையனான $\boldsymbol{OP_1}$க்குமிடையான கோணம்; $\varphi_1 + \alpha_1 = 90°$.

மூலத்தைப்பற்றி $\boldsymbol{F}_1$ஆல் உண்டாகும் கோணவிசை $OP_1 \times F_1$. இப்போது, $\boldsymbol{OP_1} = \boldsymbol{OC} + \boldsymbol{CP_1}$ (படம் 7.17(ஆ)). $\boldsymbol{OC}$ அச்சுக்குநேராக இருப்பதால் அதன் விளைவான கோணவிசையை நாம் விட்டுவிடலாம். $\boldsymbol{F_1}$ இன் விளைவுறு கோணவிசை $\boldsymbol{\tau_1} = \boldsymbol{CP} \times \boldsymbol{F_1}$. இது சுழற்சியச்சுக்குநேராக உள்ளது; அதன் பருமனளவு $\tau_1 = r_1 F_1$ வவி α. எனவே,

$$dW_1 = \tau_1 d\theta$$

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விசைகள் பொருளின் மீது செயலாற்றினால், அவை எல்லாம் சேர்ந்து செய்யும் வேலையை கூட்டி பொருளின்மீதான மொத்த வேலையை பெறலாம். வெவ்வேறு விசைகளால் ஏற்படும் கோணவிசைகளின் பருமனளவுகளை $\tau_1, \tau_2, \ldots$ என்றவாறு குறித்தால்

$$dW = (\tau_1 + \tau_2 + \cdots)d\theta$$

கோணவிசைகளுக்கு காரணமான விசைகள் வெவ்வேறு துகள்களில் செயலாற்றுகின்றன எனினும் எல்லாவற்றுக்கும் கோணவிடப் பெயர்ச்சி $d\theta$ என்பதை நினைவுகொள்க. நாம் கருதும் எல்லா கோணவிசைகளும் நிலையச்சுக்கு இணையானவை என்பதால், அவற்றின் இயற்கணிதக்கூட்டலே மொத்த கோணவிசையின் பருமனளவு. அதாவது $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \cdots$. எனவே,

$$dW = \tau d\theta \qquad (7.52)$$

இந்தக்கோவை நிலையச்சைப்பற்றி சுழலும் பொருளின்மீது செயலாற்றும் மொத்த புறக்கோணவிசை (τ) செய்யும் வேலையை தருகிறது. இது நேரிய (நகர்வு) அசைவில் நிகரான

$$dW = F\, ds$$

என்ற கோவையுடன் ஒத்திருப்பது தெளிவு.

(7.52) ஆம் சமன்பாட்டின் இருபக்கங்களையும் dtஆல் வகுத்து

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

அதாவது,

$$P = \tau\omega \qquad (7.53)$$

என்பதை பெறுகிறோம்.

இது உடனடியான திறன். நிலையச்சைப் பற்றிய சுழற்சியசைவின் திறனுக்கான இந்த கோவையை நேரியவசைவின் திறனுக்கான கோவையுடன் ஒப்பிடுக.

$$P = Fv$$

ஒரு கச்சிதமான நெளியாப்பொருளில் அகவசைவுகள் இல்லை. எனவே புறக்கோணவிசைகள் செய்யும் வேலை வெளிக்கசியாமல் பொருளின் இயக்கவாற்றலை அதிகரிக்கவே செல்கிறது. பொருளின்மீது வேலை நிகழும் வீதத்தை (7.53) ஆம் சமன்பாடு தருகிறது. இது இயக்கவாற்றல் அதிகரிக்கும் வீதத்துக்கு சமமாகவேண்டும். இயக்கவாற்றல் அதிகரிக்கும் வீதம்

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\frac{2\omega}{2}\frac{d\omega}{dt}$$

கோணநிறை நேரத்துடன் மாறவில்லை என்று எடுகொள்கிறோம். இதனால் பொருளின் நிறை மாறவில்லை என்றும், பொருள் நெளியாததாகவே இருக்கிறது என்றும். பொருளின் சுழற்சியச்சின் இருப்பிடம் மாறவில்லை என்றும் பொருளாகிறது.

$\alpha = {d\omega}/{dt}$ என்பதால்,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\,\omega\,\alpha$$

என்றாகிறது.

வேலையின் வீதத்தையும் இயக்கவாற்றல் அதிகரிக்கும் வீதத்தையும் சமமாக்கி

$$\tau\omega = I\omega\alpha$$

என்று பெறுகிறோம். அதாவது

$$\tau = I\alpha \qquad (7.54)$$

(7.54) ஆம் சமன்பாடு $F = ma$ என்று அடையாளமாக எழுதும் நேரிய அசைவுக்கான நியூட்டனின் இரண்டாம் இயக்கவிதியுடன் ஒப்பிடக்கூடியது.

விசை முடுக்கத்தை உண்டாக்குவதைப் போலவே கோணவிசை பொருளின்மீது கோணமுடுக்கத்தை உண்டாக்குகிறது. கோணமுடுக்கம் நாம் செலுத்தும் கோணவிசைக்கு நேர்விழுக்காட்டிலும் பொருளின் கோணநிறைக்கு புரட்டுவிழுக்காட்டிலும் உள்ளது. இந்த வகையில், (7.54) ஆம் சமன்பாட்டை நிலையச்சுச்சுழற்சிக்கான நியூட்டனின் இரண்டாம் விதி என்று அழைக்கலாம்.

சிக்கல் 7.15

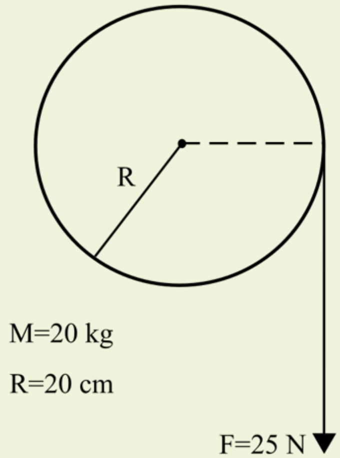
புறக்கணிக்கத்தக்க நிறையுள்ள ஒரு நாணை $20\,kg$ நிறையும் $20\,cm$ ஆரமுமுள்ள ஒரு சுழற்சக்கரத்தின் விளிம்பில் சுற்றுகிறோம். படம் 7.35இல் காட்டியபடி, ஒரு சீரான $25\,N$ இழுப்பை நாணில் செலுத்துகிறோம். சுழற்சக்கரம் ஒரு கிடைமட்ட அச்சிருசில் உராய்வற்ற தாங்கிகளால் மாட்டியிருக்கிறது.

(அ) சக்கரத்தின் கோணமுடுக்கத்தை கணக்கிடுக.

(ஆ) $2\,m$ நாண் சுருணைபிரிந்திருக்கும்போது இழுப்பு செய்திருக்கும் வேலையை காண்க.

(இ) அந்த நேரத்தில் சக்கரத்தின் இயக்கவாற்றலையும் காண்க. சக்கரம் ஓய்விலிருந்து தொடங்குவதாக கொள்க.

(ஈ) கேள்வியின் (ஆ), (இ) பகுதிகளின் விடைகளை ஒப்பிடுக.



படம் 7.35

தீர்வு

(அ) $I\alpha = \tau$ என்பதை பயன்படுத்துவோம்.

$R = 0.20\,m$ என்பதால், கோணவிசை, $\tau = F\,R = 25 \times 0.20\,N.m = 5\,N.m.$

சக்கரத்தின் அச்சிருசைப்பற்றிய கோண நிறை

$$I = \frac{MR^2}{2} = \frac{20.0 \times (0.2)^2}{2} = 0.4\,kg.m^2$$

கோணமுடுக்கம்

$$\alpha = \frac{5.0\,N\,m}{0.4\,kg\,m^2} = 12.5\,s^2$$

(ஆ) $2\,m$ நாணை இழுத்து சுருணைபிரிப் பதன் வேலை

$= 25\,N \times 2m = 50\,J$

(இ) ω இறுதிக்கோணத்திசைவேகம் என்க. இயக்கவாற்றலின் பெறுமம் $\frac{1}{2}I\omega^2$.

சக்கரம் ஓய்விலிருந்து தொடங்குவதால், $\omega^2 = \omega_0^2 + 2a\theta$ என்பதில் $\omega_0 = 0$.

கோண இடப்பெயர்ச்சி, θ

= சுருணைபிரிந்த நீளம் / சக்கரத்தின் ஆரம்

$= 2\,m/0.2\,m = 10\,rad.$

$$\omega^2 = 2 \times 12.5 \times 10.0 = 250\,(rad/s)^2$$

எனவே, இயக்கவாற்றலின் பெறுமம் $= \frac{1}{2} \times 0.4 \times 250 = 50\,J.$

(ஈ) இரண்டு கேள்விகளுக்கும் ஒரே விடையை பெற்றோம். அதாவது சக்கரம் பெற்ற இயக்கவாற்றல் = விசை செய்த வேலை. உராய்வினால் இழப்பில்லை.

7.13 நிலையச்சுச்சுழற்சியில் கோணவுந்தம்

துகளமைப்பின் கோணவுந்தத்தைப்பற்றி 7.7ஆம் பகுதியில் கற்றோம். துகளமைப்பின் ஒரு புள்ளியைப்பற்றிய மொத்தக்கோணவுந்தம் நேரத்துடன் மாறும் வீதம் அமைப்பின்மீது செயலாற்றும் அதே புள்ளியைப்பற்றிய கோணவிசைக்கு சமம் என்று அங்கு கற்றோம். மொத்த புறக்கோணவிசை சுழியமாகும்போது அமைப்பின் மொத்தக்கோணவுந்தம் அழியாக்காப்புறுகிறது.

இப்போது நிலையான அச்சைப்பற்றிய சுழற்சியான தனித்துவ வேற்றுவத்தில் கோணவுந்தத்தைப்பற்றி படிப்போம். n துகள்களின் அமைப்பின் மொத்தக்கோண வுந்தத்துக்கான கோவை ((7.31) ஆம் சமன்பாட்டை காண்க)

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i \qquad (7.55)$$

முதலில் சுழலும் ஒரு நெளியாப்பொருளின் ஏதோவொரு துகளின் கோணவுந்தத்தை கருதுவோம், பிறகு எல்லாத்துகள்களின் பங்களிப்பையும் கூட்டி பொருளின் மொத்தக்கோணவுந்தத்தை பெறுவோம்.

ஏதோவொரு துகளுக்கு $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$. சென்ற பகுதியில் கண்டவாறு, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OC} + \boldsymbol{CP}$ (படம் 7.17(ஆ)). $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ என்பதை பயன்படுத்தி

$$\boldsymbol{l} = (\boldsymbol{OC} \times m\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{CP} \times m\boldsymbol{v})$$

P என்ற இடத்திலுள்ள துகளின் நேரியத்திசைவேகத்தின் $(\boldsymbol{v})$ பருமனளவு $v = \omega r_\perp$; இங்கு $r_\perp$ CP இன் நீளம்; அதாவது சுழற்சியச்சிலிருந்து P இன் செங்குத்துத் தொலைவு. மேலும் $\boldsymbol{v}$ Pஇல் துகளின் வட்டப்பாதையின் தொடுகோடு. வலக்கை விதியை பயன்படுத்தி $\boldsymbol{CP} \times \boldsymbol{v}$ நிலையச்சுக்கு இணையானது என்பதை சரிபார்க்கலாம். நிலையச்சுக்கு (zஅச்சாக எடுத்தோம்) இணையான அலகுத்திசையன் $\hat{\boldsymbol{k}}$. எனவே,

$$\boldsymbol{CP} \times m\boldsymbol{v} = r_\perp(mv)\hat{\boldsymbol{k}} = mr_\perp^2\omega\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

($v = \omega r_\perp$ என்பதால்)

இவ்வாறே, $\boldsymbol{OC} \times \boldsymbol{v}$ நிலையச்சுக்கு செங்குத் தானது என்றும் சரிபார்க்கலாம். நிலையச்சுக்கு (zஅச்சு) நேரான $\boldsymbol{l}$இன் பகுதியான $\boldsymbol{l}_z$

$$\boldsymbol{l}_z = \boldsymbol{CP} \times m\boldsymbol{v} = mr_\perp^2\omega\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}_z + \boldsymbol{OC} \times m\boldsymbol{v}$$

$\boldsymbol{l}_z$ நிலையச்சுக்கு இணையானது, ஆனால் $\boldsymbol{l}$ நிலையச்சுக்கு இணையானதன்று என்பதை நோக்குக. பொதுவாக, ஒரு துகளின் கோணவுந்தம் சுழற்சியச்சுக்கு நேராக இருப்பதில்லை. அதாவது ஒரு துகளுக்கு $\boldsymbol{l}$ உம் $\boldsymbol{\omega}$ வும் இணையாக இருப்பது கட்டாயமில்லை. இதை நகர்வசைவில் இதற்கு நிகரான உண்மையுடன் ஒப்பிடுக. ஒரு துகளுக்கு $\boldsymbol{p}$ யும் $\boldsymbol{v}$யும் எப்போதும் இணையானவை.

பொருளின் மொத்தக்கோணவுந்தத்தை கணக்கிட பொருளின் ஒவ்வொரு துகளின் பங்கையும் கூட்டுகிறோம். இவ்வாறு

$$\boldsymbol{L} = \sum \boldsymbol{l}_i = \sum \boldsymbol{l}_{iz} + \sum \boldsymbol{OC}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i$$

zஅச்சுக்கு செங்குத்தான $\boldsymbol{L}$ இன் அகையை $\boldsymbol{L}_\perp$ என்றும் இணையான அகையை $\boldsymbol{L}_z$ என்றும் குறிப்போம்.

$$\boldsymbol{L}_\perp = \sum \boldsymbol{OC}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i \qquad (7.56)$$

இங்கு m_i i ஆம் துகளின் நிறை; $\boldsymbol{v}_i$ அதன் திசைவேகம்; $\boldsymbol{C}_i$ அதன் வட்டப்பாதையின் மையம்.

$$\boldsymbol{L}_z = \sum \boldsymbol{l}_{iz} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right) \omega\, \widehat{\boldsymbol{k}} = I\omega\, \widehat{\boldsymbol{k}} \qquad (7.57)$$

மேலுள்ள இறுதிப்படியைப்பெற, அச்சிலிருந்து i ஆம் துகளின் செங்குத்துத்தொலைவு r_i என்பதையும் $I = \sum m_i r_i^2$ என்ற கோணநிறை யின் வரையறையையும் பயன்படுத்தினோம்.

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_z + \boldsymbol{L}_\perp \qquad (7.58)$$

என்பதை நோக்குக.

இந்தப்படலத்தில் நாம் கருதிய நெளியாப் பொருள்கள் பெரும்பாலும் சுழற்சியச்சைப்பற்றி சமச்சீரானவை; அதாவது, சுழற்சியச்சு சமச்சீர்மை யச்சுகளுள் ஒன்று. இவ்வாறான பொருள்களில், ஒரு குறிப்பிட்ட $\boldsymbol{OC}_i$க்கு $\boldsymbol{v}_i$ திசைவேகமுள்ள ஒவ்வொரு துகளுக்கு நிகராகவும் அந்தத்துகளின் C_1 இல் மையமுள்ள வட்டப்பாதையில் விட்டத்தால் எதிரான புள்ளியில் $-\boldsymbol{v}_i$ திசைவேகமுள்ள மற்றொரு துகள் இருக்கிறது. இந்த இரண்டு துகள்களும் சேர்ந்து $\boldsymbol{L}_\perp$ க்கு பங்களிப்பது சுழியமாகிறது. இதன் விளைவாக சமச்சீரான பொருள்களுக்கு $\boldsymbol{L}_\perp$ சுழியமாகி,

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_z = I\omega\, \widehat{\boldsymbol{k}} \qquad (7.59)$$

என்றாகிறது.

சுழற்சியச்சியைப்பற்றி சமச்சீர்மை இல்லாத பொருள்களுக்கு $\boldsymbol{L}$ $\boldsymbol{L}_z$க்கு சமமாக வில்லை; அதனால் $\boldsymbol{L}$ சுழற்சியச்சுக்குநேராக இல்லை.

அட்டவணை 7.1ஐப்பார்த்து எந்தப் பொருள்களுக்கு $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_z$ சரியாயிருக்காது என்று சொல்லவியலுமா?

(7.59) ஆம் சமன்பாட்டை வகையிடுவோம். $\widehat{\boldsymbol{k}}$ நிலையான (மாறிலி) திசையன் என்பதால்,

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{L}_z) = \left(\frac{d}{dt}(I\omega)\right)\widehat{\boldsymbol{k}}$$

(7.33) ஆம் சமன்பாடு $d\boldsymbol{L}/_{dt} = \boldsymbol{\tau}$ என்கிறது. சென்ற பகுதியில் நாம் கண்டவாறு, நிலையச்சுச் சுழற்சியை கருதும்போது புறக்கோணவிசை களின் சுழலச்சுக்குநேரான அகைகளையே நாம் கருதவேண்டும். அதாவது $\boldsymbol{\tau} = \tau\widehat{\boldsymbol{k}}$ என்று நாம் எடுகொள்ளலாம்.

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_z + \boldsymbol{L}_\perp$ என்பதாலும் $\boldsymbol{L}_z$ இன் திசை $(\widehat{\boldsymbol{k}})$ மாறாததாலும், நிலையச்சுச்சுழற்சிக்கு

$$\frac{d\boldsymbol{L}_z}{dt} = \tau\, \widehat{\boldsymbol{k}} \qquad (7.60)$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}_\perp}{dt} = 0 \qquad (7.61)$$

இவ்வாறு, நிலையச்சைப்பற்றிய சுழற்சிக்கு கோணவுந்தத்தின் அச்சுக்குச்செங்குத்தான அகை மாறிலி. $\boldsymbol{L}_z = I\omega\, \widehat{\boldsymbol{k}}$ என்பதால், (7.60) ஆம் சமன்பாட்டின்படி

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = \tau \qquad (7.62)$$

என்றாகிறது. கோணநிறை நேரத்துடன் மாறாமலிருந்தால்

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

(7.62)ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\tau = I\alpha \qquad (7.63)$$

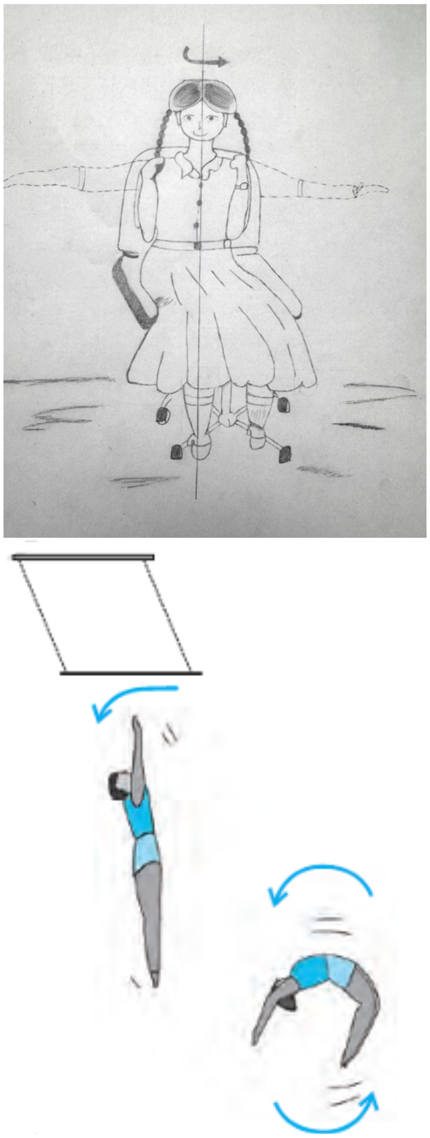
இந்த சமன்பாட்டை (7.54) முன்பு வேலையையும் இயக்கவாற்றலையும் கருதி வருவித்திருக்கிறோம்.

7.13.1 கோணவுந்தத்தின் அழியாக்காப்பு

இப்போது நிலையச்சுச்சுழற்சியின் சூழமை வில் கோணவுந்தத்தின் அழியாக்காப்பை மீண்டும் கருதுவோம். (7.62)ஆம் சமன்பாட்டிலி ருந்து, புறக்கோணவிசை சுழியாகும்போது

$$L_z = I\omega = \text{மாறிலி} \qquad (7.64)$$

சமச்சீரான பொருள்களுக்கு (7.59) ஆம் சமன்பாட்டினால், L_zஐ Lஆல் மாற்றிடலாம் (L, L_z முறையே $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{L}_z$ ஆகியவற்றின் பருமனளவுகள்).



படம் 7.36 (அ) கோணவுந்தத்தின் அழியாக்காப்பை செய்துகாட்டல். ஒருவர் சுழலும் இருக்கையில் அமர்ந்துகொண்டு கைகளை நீட்டும்போதும் மடக்கும்போதும் சுழல்வேகம் குறையவதையும் அதிகரிப்பதையும் காண்கிறோம். (ஆ) ஒரு கூத்தாடி தன் ஆட்டத்தில் கோணவுந்தத்தின் அழியாக்காப்பை பயன்படுத்தல்

இது துகளமைப்பில் கோணவுந்தத்தின் பொதுவான அழியாக்காப்பை விவரிக்கும் (7.34) ஆம் சமன்பாட்டின் ஒரு வடிவம். இந்த வடிவம் நிலையச்சுச்சுழற்சிக்கு தனித்துவமானது. (7.64) ஆம் சமன்பாடு நாம் அன்றாட வாழ்வில் எதிர்கொள்ளும் பல நிலைமைகளில் பயனாகிறது. நீங்கள் நண்பர்களுடன் இந்த பரிசோதனையை செய்துபார்க்கலாம். ஒருவர் ஒரு சுழலும் இருக்கையில் கைகளையும் கால்களையும் மடக்கி உடலுடன் சேர்த்து வைத்துக்கொண்டு அமர்க. மற்றொருவர் இருக்கையுடன் சேர்த்து அமர்ந்திருப்பவரை சுழற்றுக. இவ்வாறு இருக்கையை கணிசமான கோணவேகத்துடன் சுழலவிட்டபின் சுழல்பவர் கைகளை நீட்டுக. என்ன நிகழ்கிறது? சுழற்சிவேகம் குறைகிறது. கைகளை மீண்டும் மடக்கும்போது வேகம் மீண்டும் அதிகரிக்கிறது. இங்கு கோணவுந்தத்தின் அழியாக்காப்பு செயலாற்றுகிறது. இருக்கையும் அதில் அமர்ந்திருப்பவரும் சேர்ந்த சுழலமைப்பில் உள்ள உராய்வை புறக்கணித்தால், அமைப்பின் மீது சுழற்சியச்சைப்பற்றிய புறக்கோணவிசைகள் ஏதும் செயலாற்றவில்லை. எனவே $I\omega$ மாறிலி. கைகளை நீட்டுவது சுழற்சியச்சைப் பற்றிய கோணநிறையை (I) அதிகரிக்கச் செய்கிறது. இது கோணவேகத்தை (ω) குறைக்கிறது. கைகளை உடலுடன் சேர்க்கும்போது எதிர்விளைவு நிகழ்கிறது.

கூத்தாடிகளும் சீருடற்பயிற்சியாளர்களும் உருளலால் வித்தைகாட்டும்போதும், நீச்சற்காரர்கள் வளைந்து நீர்ப்பாயும்போதும், வழுக்கு விளையாட்டாளர்களும் நடனமாடுவோரும் ஒற்றைக்காலில் சுழன்று ஆடும்போதும் கோணவுந்தத்தின் அழியாக்காப்பை நன்கு பயன்படுத்துகின்றனர்.

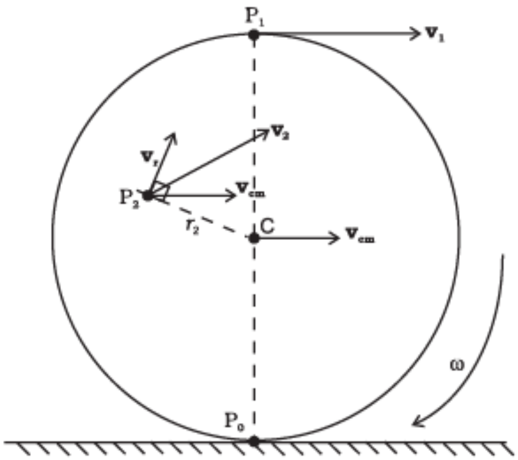
7.14 உருளலசைவு

அன்றாட வாழ்வில் அதிகமாக நாம் காண்பது உருளல். போக்குவரத்தில் பயன்படும் சக்கரங்கள் உருளலசைவுள்ளவை. குறிப்புமைக்காக நாம் ஒரு வட்டில் தொடங்குவோம். ஆனால் நம் முடிபுகள் எந்த உருளும் பொருளுக்கும் பொருந்துவன. வட்டு சறுக்காமல் உருள்கிறது எனக்கொள்வோம். அதாவது, எந்த நேரத்திலும் வட்டின் அடிப்பாகத்தில் பரப்பைத்தொடும் புள்ளி அசையாமலிருக்கிறது.

உருளலசைவு சுழற்சியும் நகர்ச்சியும் சேர்ந்த அசைவு என்பதை முன்பே சொல்லியிருக்கிறோம். ஒரு துகளமைப்பின் நகர்ச்சியசைவு அதன் நிறைமையத்தின் அசைவு என்பதை அறிவோம்.

நிறைமையத்தின் திசைவேகம் $\boldsymbol{v}_{\text{நிமை}}$ என்க. இதுவே வட்டின் நகர்ச்சித்திசைவேகம். உருளும் வட்டின் நிறைமையம் C என்ற அதன் வடிவமையத்தில் இருப்பதால் (படம் 7.37) Cயின் திசைவேகம் $\boldsymbol{v}_{\text{நிமை}}$. இது சமமட்ட பரப்புக்கு இணையானது. வட்டின் சுழற்சியசைவு Cஇன்வழி செல்லும் அதன் சமச்சீர்மைமையச்சைப்பற்றியது. எனவே, வட்டின் P_0 , P_1 , P_2 போன்ற ஒரு புள்ளியின் திசைவேகத்தில் இரண்டு பகுதிகள் உள்ளன. ஒன்று $\boldsymbol{v}_{\text{நிமை}}$ என்ற நகர்ச்சித்திசைவேகம்; மற்றது சுழற்சியால் ஏற்படும் $\boldsymbol{v}_r$ என்ற நேரியத்திசைவேகம். $\boldsymbol{v}_r$ இன் பருமனளவு $v_r = r\omega$; இங்கு r அச்சிலிருந்து (C யிலிருந்து) புள்ளியின் தொலைவு; ω வட்டு அச்சைப்பற்றி சுழல்வதன் கோணத்திசைவேகம். $\boldsymbol{v}_r$ என்ற திசைவேகம் Cயிலிருந்து நாம் கருதும் புள்ளியின் ஆரத்திசையனுக்கு செங்குத்தாக இருக்கிறது. படம் 7.37 P_2 என்ற புள்ளியின்

திசைவேகமான $\boldsymbol{v}_2$ஐயும் அதன் அகைகளாகிய $\boldsymbol{v}_r$ஐயும் $\boldsymbol{v}_{நிமை}$ஐயும் காட்டுகிறது. இங்கு $\boldsymbol{v}_r$ CP_2க்கு செங்குத்தானது.



படம் 7.37 ஒரு வட்டு சமமட்ட பரப்பில் சறுக்கலின்றி உருளும் அசைவு. எந்த நேரத்திலும் பரப்பைத்தொடும் வட்டின் புள்ளியான P_0 அசையாமலிருக்கிறது. வட்டின் நிறைமையம் $v_{நிமை}$ என்ற வேகத்தில் அசைகிறது. வட்டு Cயின்வழி செல்லும் அதன் அச்சைப்பற்றி ω என்ற கோணவேகத்துடன் சுழல்கிறது; $v_{நிமை} = R\omega$; இங்கு, R வட்டின் ஆரம்.

$\boldsymbol{v}_2$ P_0P_2 என்ற கோட்டுக்கு செங்குத்தானது என்று காண்பது எளிது. எனவே, P_0த்தின்வழி செல்வதும் $\boldsymbol{\omega}$ வுக்கு இணையானதுமான கோட்டை சுழற்சியின் உடனடியச்சு என்கிறோம்.

P_0த்தில் சுழற்சியால் ஏற்படும் நேரியத்திசை வேகமான $\boldsymbol{v}_r$ நகர்வுத்திசைவேகமான $\boldsymbol{v}_{நிமை}$க்கு முழுச்சரியாக எதிர்மமானது. மேலும் இந்த இடத்தில் $\boldsymbol{v}_r$இன் பருமனளவு $R\omega$; இங்கு R வட்டின் ஆரம். P_0த்தின் உடனடிவேகம் சுழியமாகவேண்டுமெனில் $v_{நிமை} = R\omega$ என்பது தேவைப்படுகிறது. எனவே, சறுக்கலற்ற சுழற்சிக்குத்தேவையான நிலவரம்

$$v_{நிமை} = R\omega \qquad (7.65)$$

அப்படியெனில், வட்டில் மேலுள்ள P_1 என்ற புள்ளியின் திசைவேகத்தின் $(\boldsymbol{v}_1)$ பருமனளவு $v_{நிமை} + R\omega = 2v_{நிமை}$. இதன் திசை சமமட்ட பரப்புக்கு இணையானது. (7.65)ஆம் சமன்பாடு எல்லா உருளும் பொருள்களுக்கும் சருக்கலின்மைக்கு தேவையான நிலவரம்.

7.14.1 உருளலசைவின் இயக்கவாற்றல்

நம் அடுத்த அலுவல் உருளும் பொருளின் இயக்கவாற்றலுக்கான ஒரு கோவையை பெறுவது. உருளும் பொருளின் இயக்க வாற்றலை நகர்தலின் இயக்கவாற்றலாகவும் சுழற்சியின் இயக்கவாற்ற லாகவும் பிரிக்கலாம். இது ஒரு துகளமைப்பின் பொதுவிதியின் ஒரு தனித்துவ வேற்றுநிலை. இந்த பொதுவிதியால் ஒரு துகளமைப்பின் இயக்கவாற் றலை (K) நகர்வசைவின் இயக்கவாற்றலாகவும் $\left(MV^2/_2\right)$ துகளமைப்பின் நிறைமையத்தைப்பற்றிய சுழற்சியசைவின் இயக்கவாற்றலாகவும் (K') பிரிக்கலாம். அதாவது

$$K = K' + \frac{MV^2}{2} \qquad (7.66)$$

இந்த பொதுவிளைவை எடுகோளாகக் கொண்டு (7.31ஆம் பயிற்சியை காண்க) அதை உருளலசைவுக்கு பயனாக்குவோம். நம் குறியீட்டில் உருளும் பொருளின் நிறைமையத்தின் இயக்கவாற்றல், அதாவது நகர்வசைவின் இயக்கவாற்றல் $\frac{1}{2}mv_{நிமை}^2$; இங்கு, m பொருளின் நிறை, $v_{நிமை}$ நிறைமையத்தின் திசைவேகம். உருளும் பொருளின் நிறைமையத்தைப்பற்றிய அசைவு சுழற்சி என்பதால் K' பொருளின் சுழற்சியின் இயக்கவாற்றலை குறிக்கிறது. எனவே உருளும் பொருளின் இயக்கவாற்றல்

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{நிமை}^2 \qquad (7.67)$$

கோணநிறையை (I) சுழலசைவாரத்தால் $I = mk^2$ என்று எழுதலாம். இங்கு k சுழலும் பொருளின் சுழலசைவாரம். இதையும் $v_{நிமை} = R\omega$ என்பதையும் பயன்படுத்தி

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\frac{mk^2v_{நிமை}^2}{R^2} + \frac{1}{2}mv_{நிமை}^2 \\ &= \frac{1}{2}mv_{நிமை}^2\left(1 + \frac{k^2}{R^2}\right) \qquad (7.68) \end{aligned}$$

என்பதை பெறுகிறோம்.

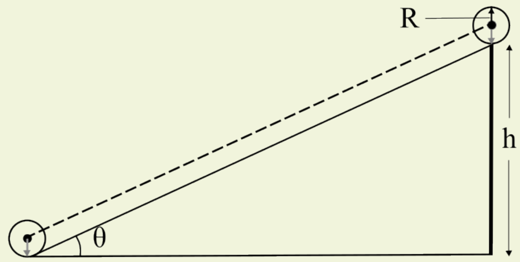
(7.68) ஆம் சமன்பாடு வட்டு, உருளை, வளையம், கோளம் போன்ற எந்த உருளும் பொருளுக்கும் பயனாகிறது.

சிக்கல் 7.16

ஒரு வளையம், ஒரு திண்மவுருளை, ஒரு திண்மக்கோளம் ஆகிய மூன்று பொருள்களும் ஒரு சாய்தளத்தில் சறுக்கலின்றி உருள்கின் றன. அவை ஓய்வுநிலையிலிருந்து தொடங்கு கின்றன. பொருள்களின் ஆரங்கள் சமம். எந்தப்பொருள் மீப்பெருமத்திசைவேகத்துடன் தரையை வந்தடைகின்றது?

தீர்வு

உருளும் பொருளின் ஆற்றலின் அழியாக்காப்பை எடுகொள்வோம். அதாவது உராய்வு போன்றவற்றால் ஆற்றலிழப்பு இல்லை எனக்கொள்கிறோம். எனவே உருளும்போது பொருள் இழக்கும் இயன்ம வாற்றல் அது பெறும் இயக்கவாற்றலுக்கு சமமாகவேண்டும் (படம் 7.38).



படம் 7.38

பொருள்கள் ஓய்வுநிலையில் தொடங்குவதால் இயக்க வாற்றலின் பெறுமம் இறுதியியக்கவாற்ற லுக்கு சமம். (7.67) ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$K=\frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)$$

இங்கு v பொருளின் (நிறைமையத்தின்) இறுதித்திசைவேகம். இந்த இயக்கவாற்றலை இயன்மவாற்றலுக்கு சமமாக்கி

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)$$

என்று பெறுகிறோம். அதாவது

$$v^2=\frac{2gh}{(1+k^2/R^2)}$$

இது பொருளின் நிறையை சார்ந்திராததை நோக்குக.

வளையத்துக்கு $k^2=R^2$. எனவே

$$v=\sqrt{\frac{2gh}{1+1}}=\sqrt{gh}$$

திண்மவுருளைக்கு,

$$k^2=\frac{R^2}{2}.\text{ எனவே, }v=\sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

திண்மக்கோளத்துக்கு,

$$k^2=\frac{2R^2}{5}.\text{ எனவே, }v=\sqrt{\frac{10gh}{7}}$$

இந்த விளைவுகளிலிருந்து இந்த மூன்று பொருள்களிலும் கோளத்துக்கு மீப்பெரும இறுதித் திசைவேகமும் வளையத்துக்கு மீக்குறைந்ததும் இருப்பதை காண்கிறோம்.

எல்லாப்பொருள்களுக்கும் ஒரே நிறை இருப்ப தாகக்கொண்டால், எது மீயதிய சுழற்சியியக்க வாற்றலுடன் சாய்தளத்தின் அடியில் வந்துசேரும்?

சுருக்கவுரை

1. நல்லியல்பாக, ஒரு பொருளின் வெவ்வேறு துகள்களிடையில் விசைகள் இருப்பினும் அவற்றிடையான தொலைவுகள் மாறாமலிருந்தால், அதை நெளியாப்பொருள் என்கிறோம்.
2. ஒரு புள்ளியிலோ கோட்டிலோ நிலையாகப்பொருத்திய நெளியாப்பொருளில் சுழற்சியசைவு மட்டுமே இருக்கிறது. அவ்வாறு பொருத்தாத நெளியாப்பொருளில் தூய நகர்வசைவோ நகர்வசைவும் சுழற்சியசைவும் சேர்ந்தோ இருக்கலாம்.
3. நிலையான அச்சைப்பற்றிய சுழற்சியில் நெளியாப்பொருளின் ஒவ்வொரு துகளும் அச்சில் மையமுள்ளதும் அச்சுக்குச்செங்குத்தான ஒரு தளத்தில் கிடப்பதுமான ஒரு வட்டப்பாதையில் அசைகிறது. சுழலும் நெளியாப்பொருளின் ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் ஒரே கோணத்திசைவேகம் இருக்கிறது.
4. தூய நகர்வில் பொருளின் ஒவ்வொரு துகளும் ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் ஒரே திசைவேகத்துடன் நகர்கிறது.
5. கோணத்திசைவேகம் ஒரு திசையன். அதன் பருமனளவு $\omega=d\theta/dt$; அதன் திசை சுழற்சியச்சுக்கு நேரானது. நிலையச்சைப்பற்றிய சுழற்சிக்கு $\boldsymbol{\omega}$ என்ற இந்தத்திசையனின் திசை மாறாதது.
6. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ என்ற இரண்டு திசையன்களின் திசையன்பெருக்கல் (குறுக்குப்பெருக்கல்) ஒரு திசையன். அதை $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ என்று எழுதுகிறோம். இதன் பருமனளவு $a\,b$ வவி θ ; திசையை வலஞ்சுழித்திருகாணிவிதி எனப்படும் வலக்கைவிதி தருகிறது.
7. நிலையச்சைப்பற்றி சுழலும் ஒரு நெளியாப்பொருளிலுள்ள ஒரு துகளின் நேரியத்திசைவேகம் $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$; இங்கு $\boldsymbol{r}$ நிலையச்சிலுள்ள ஒரு மூலத்தைப்பொறுத்து துகளின் இடநிலைத்திசையன். இந்த உறவு நிலையான ஒரு புள்ளியைப்பற்றிய சுழற்சியான பொதுவச்சுழற்சிக்கும் பயனாகிறது. இந்த வேற்றுவத்தில் $\boldsymbol{r}$ நிலையான புள்ளியிலிருந்து துகளின் இடநிலைத்திசையன்.
8. n துகள்கள் அடங்கிய துகளமைப்பின் நிறைமையத்தை

   $$\boldsymbol{R}=\frac{\sum m_i\boldsymbol{r}_i}{M}$$

   என்ற இடநிலைத்திசையனுள்ள புள்ளி என்று வரையறுக்கிறோம்.
9. துகளமைப்பின் நிறைமையத்தின் திசைவேகம் $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{P}/M$; இங்கு, $\boldsymbol{P}$ அமைப்பின் நேரியவுந்தம். நிறைமையத்தின் அசைவு பொருளின் எல்லா நிறையும் நிறைமையத்தில் செறிந்திருப்பதுபோலவும் பொருளின்மீது செயலாற்றும் எல்லாப்புறவிசைகளும் அந்தப்புள்ளியிலே

செயலாற்றுவதுபோலவும் நிகழ்கிறது. மொத்தப்புறவிசைகள் சுழியமெனில், அமைப்பின் மொத்தநேரியவுந்தம் மாறிலி.

10. ஒரு nதுகளமைப்பின் மூலத்தைப்பற்றிய கோணவுந்தம்

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$$

ஒரு nதுகளமைப்பின் மூலத்தைப்பற்றிய கோணவிசை

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

iஆம் துகளில் செயலாற்றும் $\boldsymbol{F}_i$இல் அகவிசைகளும் புறவிசைகளும் அடங்குகின்றன. நியூட்டனின் மூன்றாம் அசைவுவிதியையும் இரண்டு துகள்களிடையான விசை அவற்றை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டில் செயலாற்றுகிறது என்பதையும் எடுகொண்டு

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{அக}} = \boldsymbol{0}$$

என்றும்

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \tau_{\text{புற}}$$

என்றும் காட்டலாம்.

11. ஒரு நெளியாப்பொருள் எந்திரவியச்சமநிலையில் இருக்கும்போது
    a. அது நகர்வுச்சமநிலையில் இருக்கிறது; அதாவது அதன்மீதான மொத்தப்புறவிசைகள் சுழியம். $\sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$
    b. அது சுழற்சிச்சமநிலையில் இருக்கிறது. அதாவது, அதன்மீதான மொத்தப்புறக்கோணவிசைகள் சுழியம். $\sum \boldsymbol{\tau}_i = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$
12. ஒரு நீட்டப்பொருளின்மீதான மொத்த நிறையீர்ப்புக்கோணவிசை சுழியமாகும் புள்ளி அந்தப்பொருளின் நிறைமையம்.
13. ஒரு அச்சைப்பற்றி ஒரு நெளியாப்பொருளின் கோணநிறையை $\boldsymbol{I} = \sum m_i \boldsymbol{r}_i^2$ என்ற வாய்ப்பாட்டால் வரையறுக்கிறோம்; இங்கு, $\boldsymbol{r}_i$ அச்சிலிருந்து iஆம் புள்ளியின் செங்குத்துத்தொலைவு. சுழற்சியின் இயக்கவாற்றல் $K = \frac{1}{2} I\omega^2$.
14. இணையச்சுத்தேற்றம்: $I'_z = I_z + M\alpha^2$. இது ஒரு நெளியாப்பொருளின் ஒரு அச்சைப்பற்றிய கோணநிறையை நிறைமையத்தின்வழி செல்லும் இணையான அச்சைப்பற்றிய கோணநிறையிலிருந்து கணக்கிடும் முறையை தருகிறது. பொருளின் நிறையுடன் நிறைமைய அச்சிலிருந்து ஒரு அச்சின் செங்குத்துத்தொலைவின் வர்க்கத்தை பெருக்கிக்கிடைத்த தொகையை நிறைமைய அச்சைப்பற்றிய கோணநிறையுடன் கூட்டினால் புதிய அச்சைப்பற்றிய கோணநிறையை பெறுகிறோம்.
15. நிலையச்சைப்பற்றிய சுழற்சியின் அசைவியலும் இயங்கியலும் நேரியசைவுடன் ஒப்புமையானவை.
16. ஒரு நிலையான அச்சைப்பற்றி (zஅச்சு என்க) சுழலும் நெளியாப்பொருளுக்கு $L_z = I\omega$; இங்கு I zஅச்சைப்பற்றிய கோணநிறை. பொதுவாக, இத்தகைய பொருளுக்கு கோணவுந்தம் $(\boldsymbol{L})$ சுழற்சியச்சுக்குநேராக இல்லை. பொருள் சுழற்சியச்சைப்பற்றி சமச்சீர்மையாக இருந்தால் மட்டுமே $\boldsymbol{L}$ சுழற்சியச்சுக்குநேராக இருக்கிறது. அப்போது $|L| = L_z = I\omega$. நிலையச்சைப்பற்றி சுழலும் நெளியாப்பொருளில் கோணமுடுக்கத்தை $I\alpha = \tau$ என்ற வாய்ப்பாடு தருகிறது. பொருளில் செயலாற்றும் புறக்கோணவிசை (τ) சுழியமெனில், கோணவுந்தத்தின் நிலையச்சுக்கு இணையான அகை $L_z (= I\omega)$ மாறிலி.
17. சறுக்கலின்றி உருளும் அசைவுக்கு $v_{\text{நிமை}} = R\omega$; இங்கு, $v_{\text{நிமை}}$ (நிறைமையத்தின்) நகர்ச்சியசைவின் திசைவேகம், R பொருளின் ஆரம், m அதன் நிறை. இவ்வாறான உருளும் பொருளின் இயக்கவாற்றல் நகர்ச்சியசைவின் இயக்கவாற்றலும் சுழற்சியசைவின் இயகவாற்றலும் சேர்ந்த கூட்டுத்தொகை.

$$K = \frac{1}{2} m v_{\text{நிமை}}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

அளவு	அடையாளம்	பருமானங்கள்	அலகுகள்	குறிப்புரைகள்

கோணத்திசைவேகம்	ω	$[T^{-1}]$	$rad\ s^{-1}$	$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$
கோணவுந்தம்	L	$[ML^2T^{-1}$	$J\ s$	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$
கோணவிசை	τ	$[ML^2T^{-2}]$	$N\ m$	$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
கோணநிறை	I	$[ML^2]$	$kg\ m^2$	$I = \sum m_i r_i^2$

உங்கள் சிந்தனைக்கு

1. ஓரமைப்பின் நிறைமையத்தின் அசைவை தீர்மானிக்க அமைப்பின் அகவிசைகளைப்பற்றி அறியவேண்டியதில்லை. இதற்காக நாம் பொருளின்மீது செயலாற்றும் புறவிசைகளை மட்டும் அறிந்தால் போதும்.
2. ஒரு துகளமைப்பின் அசைவை நிறைமையத்தின் அசைவாகவும் (அமைப்பின் நகர்ச்சியசைவு) நிறைமையத்தைப்பற்றிய அசைவாகவும் பிரித்துக்கொள்வது துகளமைப்பின் இயங்கியலில் ஒரு பயனுள்ள செய்நுட்பம். இந்த செய்நுட்பத்தின் ஒரு சான்று துகளமைப்பின் இயக்கவாற்றலை (K) அமைப்பின் நிறைமையத்தைப்பற்றிய இயக்கவாற்றலாகவும் (K') நிறைமையத்தின் இயக்கவாற்றலாகவும் $\left(\frac{MV^2}{2}\right)$ பிரித்துக்கொள்வது.
$$K = K' + \frac{MV^2}{2}$$
3. சுழியமற்ற அளவுள்ள பொருளுக்கான (துகளமைப்புக்கான) நியூட்டனின் இரண்டாம் அசைவுவிதி துகள்களுக்கான நியூட்டனின் இரண்டாம் அசைவிவிதியின் அடிப்படையில் மட்டுமல்லாமல் நியூட்டனின் மூன்றாம் அசைவுவிதியின் அடிப்படையிலும் ஆனது.
4. ஒரு துகளமைப்பின் மொத்தக்கோணவுந்தம் நேரத்துடன் மாறும் வீதம் அமைப்பிலுள்ள மொத்த புறக்கோணவிசைக்கு சமம் என்பதை நிலைநாட்டுவதற்காக துகள்களுக்கான நியூட்டனின் இரண்டாம் அசைவுவிதி மட்டுமல்லாமல் நியூட்டனின் மூன்றாம் அசைவுவிதியும் எந்த இரண்டு துகள்களுக்குமிடையான விசைகள் அவற்றை இணைக்கும் கோட்டுக்கு நேராக செயலாற்றுகின்றன என்ற எடுகோளும் தேவைப்படுகின்றன.
5. மொத்தப்புறவிசை சுழியமாவதும் மொத்தப்புறக்கோணவிசை சுழியமாவதும் ஒன்றையொன்று சாராத நிலவரங்கள். ஒன்றில்லாமல் மற்றது இருக்கலாம். ஒரு இணைக்கட்டில் மொத்தப்புறவிசை சுழியம், ஆனால் மொத்தக்கோணவிசை சுழியமன்று.
6. அமைப்பின்மீதான மொத்தப்புறவிசை சுழியமெனில், அமைப்பின்மீதான மொத்தக்கோணவிசை மூலத்தைச்சாராதது.
7. ஒரு பொருளின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து மற்றதற்கு புவியீர்ப்புவிசை மாறாமலிருந்தால் மட்டுமே பொருளின் நிறையீர்ப்புமையம் அதன் நிறைமையத்துடன் ஒன்றுகிறது.
8. கோணவுந்தமும் $(\boldsymbol{L})$ கோணத்திசைவேகமும் $(\boldsymbol{\omega})$ இணைத்திசையன்களாயிருப்பது கட்டாயமில்லை. ஆனால், இந்தப்படலத்தில் உரையளித்தபடி, சுழற்சி நெளியாப்பொருளின் நிலையான சமச்சீர்மையச்சைப்பற்றி இருக்கும் எளிய தனித்துவ வேற்றுவத்தில் $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I\omega}$ சரியாகிறது; இங்கு, $\boldsymbol{I}$ பொருளின் சுழற்சியச்சைப்பற்றிய கோணநிறை.

பயிற்சிகள்

7.1 கீழ்க்கண்டவற்றின் நிறைமையங்களின் இருப்பிடங்களை தருக. (அ) கோளம், (ஆ) உருளை, (இ) வளையம், (ஈ) கனச்சதுரம். ஒவ்வொன்றும் சீரான அடர்வுடையது. நிறைமையம் பொருளின் உட்பகுதியில் இருப்பது கட்டாயமா?

7.2 HClமூலக்கூறின் இரண்டு அணுக்களுக்கிடையான தொலைவு சுமார் 1.27 Å $\left(1\text{Å} = 10^{-10}\ m\right)$. இந்த மூலக்கூறின் நிறைமையத்தின் தோராயமான இருப்பிடத்தை காண்க. ஐதரசவணுவைவிட குளோரினணு சுமார் 35.5 மடங்கு நிறையுள்ளது என்பதையும் அணுவின் கிட்டத்தட்ட எல்லா நிறையும் அணுக்கருவில் செறிந்திருக்கிறது என்பதையும் பயன்படுத்திக்கொள்ளலாம்.

7.3 ஒரு வழவழப்பான கிடைமட்டத்தரையில் V என்ற திசைவேகத்தில் சீராக அசையும் ஒரு தள்ளுவண்டியில் ஒரு பிள்ளை அசையாமல் அமர்ந்திருக்கிறார். பிள்ளை எழுந்து தள்ளுவண்டிக்குள் பலவிதமாக ஓடத்தொடங்கினால் (தள்ளுவண்டியும் பிள்ளையும் சேர்ந்த) அமைப்பின் திசைவேகம் என்ன?

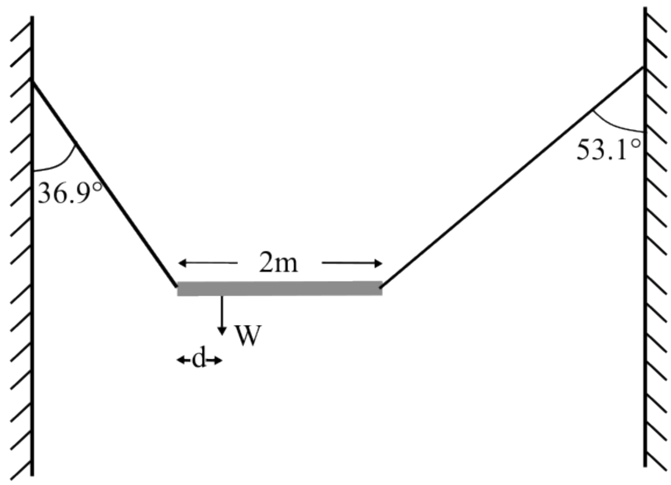
7.4 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ஆகிய இரண்டு திசையன்களிடையிலுள்ள முக்கோணத்தின் பரப்பு $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ இன் பருமனளவில் பாதி என்று காட்டுக.

7.5 $\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$இன் பருமனளவு $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ ஆகிய திசையன்கள் உருவாக்கும் இணைமுகியின் பருமனுக்கு சமம் என்று காட்டுக.

7.6 x, y, z ஆகிய அகைகளுள்ள $\boldsymbol{r}$ என்ற இடநிலைத்திசையனும் p_x, p_y, p_z ஆகிய அகைகளுள்ள $\boldsymbol{p}$ என்ற உந்தத்திசையனும் உள்ள ஒரு துகளின் கோணவுந்தமான $\boldsymbol{l}$இன் x, y, z அச்சுகளுக்குநேரான அகைகளை காண்க. துகள் xy தளத்தில் மட்டுமே அசைந்தால் கோணவுந்தத்தில் z அகை மட்டுமே உள்ளது என்று காட்டுக.

7.7 ஒவ்வொன்றும் m நிறையும் v வேகமுமுள்ள இரண்டு துகள்கள் இணைகோடுகளில் எதிரெதிர்த்திசைகளில் பயணிக்கின்றன. கோடுகளுக்கிடையான தொலைவு d என்க. இந்த இருதுகளமைப்பின் கோணவுந்தத்தை எந்தப்புள்ளியைப்பற்றி எடுத்தாலும் அதே கோணவுந்தத்திசையனை பெறுகிறோம் என்று காட்டுக.

7.8 W எடையுள்ள ஒரு சீரற்ற பாரையை ஓய்விலிருக்கும்படி புறக்கணிக்கத்தக்க எடையுள்ள இரண்டு சரங்களால் படம் 7.39இல் காட்டியபடி தொங்கவிடுகிறோம். சரங்கள் நெடுநிற்பத்துடன் தாங்கும் கோணங்கள் முறையே $36.9°$, $53.1°$. பாரை $2\ m$ நீளமுள்ளது. பாரையின் இடதுநுனியிலிருந்து அதன் நிறையீர்ப்புமையத்தின் (படத்தில் d என்று குறித்த) தொலைவை கணக்கிடுக.



படம் 7.39

7.9 ஒரு நாற்சக்கர வண்டியின் எடை $1800\ kg$. அதன் முன்னச்சிருசுக்கும் பின்னச்சிருசுக்குமுள்ள தொலைவு $1.8\ m$. அதன் நிறையீர்ப்புமையம் முன்னச்சிருசுக்கு $1.05\ m$ பின்னால் உள்ளது. ஒவ்வொரு முன்சக்கரத்திலும் பின்சக்கரத்திலும் சமத்தளத்தரை செலுத்தும் விசைகளை தீர்மானிக்க.

7.10 (அ) ஒரு கோளத்தின் எந்த விட்டத்தைப்பற்றியும் அதன் கோணநிறை $2MR^2/5$; இங்கு, M கோளத்தின் நிறையும், R ஆரமும். இந்த கோளத்தின் ஒரு தொடுகோட்டைப்பற்றிய கோணநிறையை காண்க.

(ஆ) M நிறையும் R ஆரமுமுள்ள ஒரு வட்டின் எந்த விட்டத்தையும்பற்றி அதன் கோணநிறை $MR^2/4$. வட்டின் செங்கோட்டுத்திசையிலானதும் அதன் விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளியின்வழி செல்வதுமான அச்சைப்பற்றிய கோணநிறையை காண்க.

7.11 ஒரே நிறையும் ஆரமும் உள்ள ஒரு உள்வமற்ற உருளைக்கும் ஒரு திண்மக்கோளத்துக்கும் சமப்பருமனளவுள்ள கோணவிசைகளை செலுத்துகிறோம். உருளை அதன் வழக்கமான சமச்சீரச்சைப்பற்றி கட்டின்றி சுழலலாம்; கோளம் அதன் மையத்தின்வழி செல்லும் ஒரு அச்சைப்பற்றி கட்டின்றி சுழலலாம். ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்துக்குப்பின் எது அதிகமான கோணவேகத்தை அடையும்?

7.12 $20\ kg$ நிறையும் $0.25\ m$ ஆரமுமுள்ள ஒரு திண்மவுருளை அதன் அச்சைப்பற்றி $100\ rad.s^{-1}$ வேகத்தில் சுழல்கிறது. உருளையின் சுழற்சியுடன் தொடர்பான இயக்கவாற்றல் என்ன? உருளையின் அச்சைப்பற்றி அதன் கோணவுந்தத்தின் பருமனளவு என்ன?

7.13 (அ) ஒரு சுழல்வட்டின் மையத்தில் ஒரு பிள்ளை இரண்டு கைகளையும் பக்கவாட்டில் நீட்டிக்கொண்டு நிற்கிறார். சுழல்வட்டை சுழற்றி அது 40 நிசு (நிமிடத்துக்கு சுழற்சிகள்) வேகத்தில் சுழலும்படி செய்கிறோம். பிள்ளை கைகளை மடக்கி கோணநிறையை தொடக்கத்திலிருந்ததன் $^2/_5$ மடங்காக

குறைத்தால் பிள்ளையின் கோணவேகம் என்ன? சுழல்வட்டு உராய்வில்லாமல் சுழல்கிறது எனக்கொள்க.

(ஆ) பிள்ளையின் சுழற்சியின் புதிய இயக்கவாற்றல் தொடக்கத்திலுள்ளதைவிட அதிகமாகிறது என்று காட்டுக. இயக்கவாற்றலின் இந்த அதிகரிப்பை எவ்வாறு விளக்கலாம்?

7.14 புறக்கணிக்கத்தக்க நிறையுள்ள ஒரு கயிற்றை $3\ kg$ நிறையும் $40\ cm$ ஆரமுமுள்ள ஒரு உள்வமற்ற உருளையின்மீது சுருணையாக சுற்றுகிறோம். கயிற்றை $30\ N$ விசையுடன் இழுத்தால் உருளையின் கோணமுடுக்கம் என்ன? கயிற்றின் நேரியமுடுக்கம் என்ன? சறுக்கல் இல்லை என்று கொள்க.

7.15 ஒரு சுழலியை $200\ rad.s^{-1}$ சீரான கோணவேகத்தில் வைத்திருக்க ஒரு பொறி $180\ N.m$ கோணவிசையை செலுத்தவேண்டியதிருக்கிறது. பொறிக்குத்தேவையான திறன் என்ன? (குறிப்பு: உராய்வில்லாதபோது சீரான கோணத்திசைவேகம் சுழியக்கோணவிசையை உள்ளுரைக்கிறது. நடைமுறையில் உராய்வுக்கோண விசையை எதிர்க்கவும் சேர்த்து கோணவிசையை செலுத்தவேண்டும்). பொறி 100% பயன்றிறனானது எனக்கொள்க.

7.16 R ஆரமுள்ள ஒரு சீரான வட்டிலிருந்து $R/2$ ஆரமுள்ள ஒரு துண்டை வெட்டி எடுத்துவிடுகிறோம். இந்த துளையின் மையம் மூலவட்டின் மையத்திலிருந்து $R/2$ தொலைவில் உள்ளது. இதனாn t' rல் விளையும் தட்டையான பொருளின் நிறையீர்ப்புமையத்தை காண்க.

7.17 ஒரு மீட்டர்க்கோலை அதன் நடுவில் ஒரு கத்திமுனையை வைத்து சமனாக்குகிறோம். ஒவ்வொன்றும் $5\ g$ நிறையுள்ள இரண்டு காசுகளை ஒன்றின்மேலொன்றாக $12\ cm$ குறியில் வைக்கிறோம். இப்போது கோல் $45\ cm$இல் சமனாகிறது. மீட்டர்க்கோலின் நிறை என்ன?

7.18 ஒரு திண்மக்கோளம் வெவ்வேறு சாய்வுக்கோணங்களுள்ள இருவேறு சாய்தளங்களில் ஒரே உயரத்திலிருந்து உருள்கிறது. (அ) இரண்டு வேற்றுவங்களிலும் அது ஒரே வேகத்துடன் கீழ் வந்துசேருமா? (ஆ) ஒரு சாய்தளத்தைவிட மற்றதில் உருள அதிக நேரம் ஆகுமா? (இ) ஆம் எனில், எது, ஏன்?

7.19 $2\ m$ ஆரமுள்ள ஒரு வளையத்தின் எடை $100\ kg$. அது ஒரு கிடைமட்டத்தரையில் உருளும்போது அதன் நிறைமையத்தின் வேகம் $20\ cm/s$. அதை நிறுத்த எவ்வளவு வேலை செய்யவேண்டும்?

7.20 ஆக்குசிசமூலக்கூறின் நிறை $5.30 \times 10^{-26}\ kg$. அதன் மையத்தின்வழி அணுவிடைக்கோட்டுக்கு செங்குத்தாக செல்லும் அச்சைப்பற்றிய கோணநிறை $1.94 \times 10^{-46}\ kg.m^2$. ஒரு வளிமத்தில் இந்த மூலக்கூறின் இடைமவேகம் $500\ m.s^{-1}$ஆகவும் அதன் சுழற்சியியக்கவாற்றல் நகர்ச்சியியக்கவாற்றலைப்போல் மூன்றிலிரண்டு பங்காகவும் இருந்தால், மூலக்கூறின் சராசரி கோணத்திசைவேகத்தை காண்க.

7.21 ஒரு திண்மவுருளை $30°$ சாய்வான ஒரு சாய்தளத்தில் உருண்டு ஏறுகிறது. சாய்தளத்தின் அடியில் உருளையின் நிறைமையத்தின் வேகம் $5\ m.s^{-1}$ எனில்,

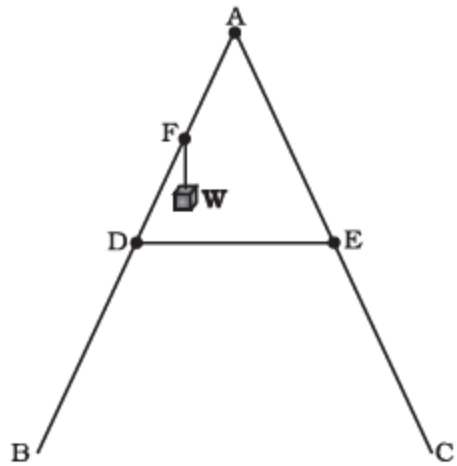
a. உருளை சாய்தளத்தில் எவ்வளவு தொலைவு ஏறும்?

b. மீண்டும் அடிக்கு வந்துசேர எவ்வளவு நேரமாகும்?

மேலும் பயிற்சிகள்

7.22 படம் 7.40இல் காட்டியபடி, A யில் இணைந்த ஒரு மடக்கேணியின் இரண்டு கால்களான BA , CA ஆகியவை $1.6\ m$ நீளமுடையவை. அவற்றின் நடுவிலுள்ள DE யில் $0.5\ m$ நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றை கட்டியிருக்கிறோம். B யிலிருந்து ஏணியின் காலின் $1.2\ m$ உயரத்திலுள்ள F இல் $40\ kg$ எடையை தொங்கவிடுகிறோம். தரை உராய்வற்றது என்ற எடுகோளுடனும் ஏணியின் எடையை புறக்கணித்தும் கயிற்றின்மீதுள்ள விறைப்பையும் தரை ஏணியின்மீது செலுத்தும் விசைகளையும் காண்க. ($g = 9.8\ m.s^{-2}$ எனக்கொள்க).

(உதவி: ஏணியின் ஒவ்வொரு பக்கத்தின் சமநிலையையும் தனித்தனியே கருதுக.)



படம் 7.40

7.23 ஒரு சுழலும் மேடையில் ஒரு மனிதர் கைகளை நீட்டிக்கொண்டு ஒவ்வொரு கையிலும் $5\ kg$ எடையுடன் நிற்கிறார். மேடையின் கோணவேகம் நிமிடத்துக்கு 30 சுழற்சிகள். மனிதர் கைகளை மடக்கி உடலுக்கருகில் கொண்டுவரும்போது அச்சிலிருந்து ஒவ்வொரு எடையின் தொலைவும் $90\ cm$ இலிருந்து $20\ cm$ ஆக குறைகிறது. மனிதனும் மேடையும் சேர்ந்த அமைப்பின் கோணநிறையான $7.6\ kg.m^2$ஐ மாறிலியாக கொள்ளலாம்.

a. அவரது புதிய கோணவேகம் என்ன? (உராய்வை புறக்கணிக்க.)

b. இந்த நிகழ்முறையில் இயக்கவாற்றல் அழியாக்காப்புறுகிறதா? இல்லையெனில், மாற்றம் எங்கிருந்து வருகிறது.

7.24 $500\ m/s$ வேகத்துடன் ஒரு கதவில் எய்யப்படும் $10\ g$ நிறையுள்ள ஒரு எய்விக்குண்டு முழுச்சரியாக கதவின் நடுவில் புதையுறுகிறது. கதவின் அகலம் $1.0\ m$, எடை $12\ kg$. அது ஒரு பக்கத்தில் கீல்களால் பொருத்தப்பட்டு நெடுநிற்பச்சைப்பற்றி கிட்டத்தட்ட உராய்வின்றி சுழல்கிறது. எய்விக்குண்டு புதைந்தவுடன் கதவின் கோணவேகத்தை காண்க.

(உதவி: கதவின் ஒருநுனியிலுள்ள நெடுநிற்பச்சைப்பற்றிய கோணநிறை $ML^2/3$.)

7.25 இரண்டு வட்டுகளின் (மையத்தின்வழி வட்டுக்குச்செங்குத்தாக செல்லும்) அச்சுகளைப்பற்றிய கோணநிறைகள் I_1, I_2 என்க. அவை முறையே ω_1, ω_2 என்ற கோணவேகங்களுடன் சுழலும்போது அவற்றின் அச்சுகள் ஒன்றும்படி முகத்துக்குமுகமாக தொடச்செய்கிறோம். (அ) இந்த இரட்டைவட்டமைப்பின் கோணவேகம் என்ன? (ஆ) சேர்ந்த அமைப்பின் இயக்கவாற்றல் இரண்டு வட்டுகளின் தனித்தனி இயக்கவாற்றல்களின் கூட்டலைவிட குறைவானது என்று காட்டுக. இந்த ஆற்றலிழப்பை எவ்வாறு விளக்கலாம்? $\omega_1 \neq \omega_2$ எனக்கொள்க.

7.26 (அ) செங்குத்தச்சுத்தேற்றத்தை நிறுவுக.

(உதவி: மூலத்தின்வழி xyதளத்துக்கு செங்குத்தாக செல்லும் அச்சிலிருந்து அந்த தளத்தில் கிடக்கும் (x, y) என்ற புள்ளியின் தொலைவின் வர்க்கம் $x^2 + y^2$).

(ஆ) இணையச்சுத்தேற்றத்தை நிறுவுக.

(உதவி: nதுகளமைப்பின் நிறைமையத்தை மூலமாகக்கொண்டால், $\sum m_i \boldsymbol{r}_i = 0$).

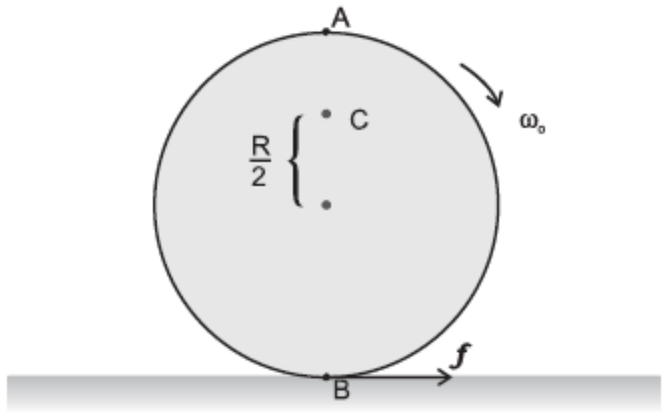
7.27 (வளையம், வட்டு, உருளை, கோளம் போன்ற) ஒரு உருளும் பொருள் h உயரமுள்ள ஒரு சாய்சதுரத்தில் உருண்டு அடிப்பாகத்தை அடையும்போது அதன் நகர்வுத்திசைவேகமான $\boldsymbol{v}$

$$v^2 = \frac{2gh}{1 + k^2/R^2}$$

என்பதை நிறைவேற்றுவதை இயங்கியற்கருத்துகளால் (அதாவது, விசைகளையும் கோணவிசைகளையும் கருதி) காட்டுக. k பொருளின் சமச்சீர்மையச்சைப்பற்றிய சுழலசைவாரம், R பொருளின் ஆரம். பொருள் தளத்தின் உச்சியில் ஓய்வில் தொடங்குகிறது.

7.28 தன் அச்சைப்பற்றி ω_0 கோணவேகத்தில் சுழலும் R ஆரமுள்ள ஒரு வட்டை கச்சிதமாக உராய்வற்ற ஒரு மேசையில் மென்மையாக (நகர்வுத்தள்ளல் ஏதுமில்லாமல்) வைக்கிறோம். படம் 7.41இல் காட்டிய

A, B, C ஆகிய புள்ளிகளின் நேரியத்திசைவேகங்கள் யாவை? தகடு அம்புக்குறி காட்டும் திசையில் நகருமா?



படம் 7.41

7.29 படம் 7.41இலுள்ள வட்டை காட்டிய திசையில் உருளச்செய்ய உராய்வு ஏன் தேவைப்படுகிறது என்று விளக்குக.

a. கச்சிதமான உருளல் தொடங்குமுன் Bயில் உராய்வுவிசையின் திசையையும் கோணவிசையின் வசத்தையும் தருக.
b. கச்சிதமான உருளல் தொடங்கியபின் உராய்வின் விசை என்ன?

7.30 ஒவ்வொன்றும் $10\ cm$ ஆரமும் $10\ \pi\ rad.s^{-1}$ தொடக்கக்கோணவேகமுமுள்ள ஒரு திண்மவட்டையும் வளையத்தையும் ஒரு கிடைமட்டமேசையில் நெடுநிற்பமாக ஒரேநேரத்தில் வைக்கிறோம். இரண்டில் எது முதலில் உருளத்தொடங்கும்? இயக்கவுராய்வின் கெழு $\mu_k = 0.2$.

7.31 $10\ kg$ நிறையும் $15\ cm$ ஆரமுமுள்ள ஒரு உருளை $30°$ சாய்வுள்ள ஒரு சாய்தளத்தில் கச்சிதமாக உருள்கிறது. நிலைமவுராய்வின் கெழு $\mu_s = 0.25$.

a. உருளையின்மீது செயலாற்றும் உராய்வுவிசை எவ்வளவு?
b. உருளலின்போது உராய்வுக்கெதிராக செய்யும் வேலை எவ்வளவு?
c. தளத்தின் சாய்வான θ அதிகரித்தால், அதன் எந்த மதிப்பில் உருளை கச்சிதமாக உருளாமல் சறுக்கத்தொடங்குகிறது?

7.32 கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொரு கூற்றையும் கவனமாக படித்து சரியா தவறா என்று காரணங்களுடன் கூறுக.

a. உருளலின்போது உராய்வின் விசை பொருளின் நிறைமையம் அசையும் திசையிலே செயலாற்றுகிறது.
b. உருளலின்போது தொடுகைப்புள்ளியின் உடனடிவேகம் சுழியம்.
c. உருளலின்போது தொடுகைப்புள்ளியின் உடனடிமுடுக்கம் சுழியம்.
d. கச்சிதமான உருளலசைவில் உராய்வுக்கெதிராக செய்யப்படும் வேலை சுழியம்.
e. ஒரு கச்சிதமாக *உராய்வற்ற* சாய்தளத்தில் உருளவிட்ட சக்கரம் (உருளாமல்) வழுக்கலசைவுக்கு உட்படும்.

7.33 துகளமைப்பின் அசைவை நிறைமையத்தின் அசைவாகவும் நிறைமையத்தைப்பற்றிய அசைவாகவும் பிரிப்பதில்

a. $\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}'_i + m_i\boldsymbol{V}$ என்று காட்டுக.

இங்கு, $\boldsymbol{p}_i$ iஆம் துகளின் உந்தம் (m_i அதன் நிறை), $\boldsymbol{p}'_i = m_i\boldsymbol{v}'_i$. $\boldsymbol{v}'_i$ நிறைமையத்தின் நோக்கீட்டில் iஆம் துகளின் திசைவேகம் என்பதை நோக்குக.

b. $K = K' + \frac{1}{2}MV^2$ என்று காட்டுக.

இங்கு, K துகளமைப்பின் மொத்த இயக்கவாற்றல்; K' துகள்களின் திசைவேகங்களை நிறைமையத்தின் நோக்கீட்டில் எடுக்கும்போது துகளமைப்பின் மொத்த இயக்கவாற்றல்; $\frac{1}{2}MV^2$ அமைப்பு மொத்தமாக நகர்வதன் (அதாவது அமைப்பின் நிறைமையத்தின்) இயக்கவாற்றல். இந்த விளைவை 7.14ஆம் பகுதியில் பயன்படுத்தினோம்.

c. $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}' + \boldsymbol{R} \times M\boldsymbol{V}$ என்று காட்டுக.

இங்கு, $\boldsymbol{L}' = \sum \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{p}_i{}'$ அமைப்பின் நிறைமையத்தைப்பற்றிய கோணவுந்தம். திசைவேகங்களை நிறைமையத்தின் ஒப்பீட்டில் எடுக்கிறோம். $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i' - \boldsymbol{R}$ என்பதை நினைவுகொள்க. மற்ற குறியீடுகள் பாடத்தில் பயன்படுத்திய செந்தரக்குறியீடுகள். $\boldsymbol{L}'$ஐயும் $M\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{V}$ஐயும் முறையே துகளமைப்பின் நிறைமையத்தைப்பற்றிய கோணவுந்தமாகவும் நிறைமையத்தின் கோணவுந்தமாகவும் கருதலாம்.

d. $\frac{d\boldsymbol{L}'}{dt} = \sum \boldsymbol{r}_i' \times \frac{d\boldsymbol{p}'}{\boldsymbol{dt}}$ என்று காட்டுக.

மேலும், $\frac{d\boldsymbol{L}'}{dt} = \boldsymbol{\tau}'_{\text{புற}}$ என்றும் காட்டுக.

இங்கு, $\boldsymbol{\tau}'_{\text{புற}}$ அமைப்பின்மீது நிறைமையத்தைப்பற்றி செயலாற்றும் எல்லா புறக்கோணவிசைகளின் கூட்டுத்தொகை.

(உதவி: நிறைமையத்தின் வரையறையையும் மூன்றாம் அசைவுவிதியையும் பயன்படுத்துக. இந்த இரண்டு பொருள்களிடையான அகவிசை அவற்றை இணைக்கும் கோட்டுக்குநேராக செயலாற்றுகிறது எனக்கொள்க.)

தூரியன் என்ற குறுங்கோள்

அனைத்துலக வானியலொன்றியம் (அவாம்) செக்கியக்குடியரசிலுள்ள பிராகில் 2004, ஆகத்து 24இல் நடைபெற்ற அவாம் 2006 பொதுக்கூட்டவையில் நம் கதிரவவமைப்பிலுள்ள கோள்களின் ஒரு புதிய வரயறையை மேற்கொண்டனர். இதன்படி தூரியன் ஒரு கோளன்று என்றாகிறது. அதாவது கதிரவவமைப்பில் புதன், வெள்ளி, புவி, செவ்வாய், வியாழன், சனி, உரேனசு, நெட்டியூன் ஆகிய எட்டு கோள்கள் உள்ளன. அவாத்தின் பயன்பாட்டில், துணைக்கோள்களைத்தவிர, கதிரவவமைப்பிலுள்ள கோள்களையும் மற்ற பொருள்களையும் கீழ்க்கண்ட மூன்று தனிப்பட்ட வான்வகைகளாக வரையறுக்கின்றனர்.

1. ‘கோள்’ என்பது கீழ்க்கண்ட பண்புகளுள்ள வான்பொருள். (அ) கதிரவனை சுற்றிவருகிறது; (ஆ) அதன் தன்னீர்ப்பு நெளியாப்பொருள்விசைகளை எதிர்த்து நீர்நிலைமச்சமநிலையடைய (கிட்டத்தட்ட கோள வடிவமாக) போதுமான நிறையுள்ளது; (இ) தன் சுற்றுப்பாதையின் அண்மையத்தை அகற்றியிருக்கிறது.
2. ‘குறுங்கோள்’ என்பது கீழ்க்கண்ட பண்புகளுள்ள வான்பொருள். (அ) கதிரவனை சுற்றிவருகிறது. (ஆ) அதன் தன்னீர்ப்பு நெளியாப்பொருள்விசைகளை எதிர்த்து நீர்நிலைமச்சமநிலையடைய (கிட்டத்தட்ட கோள வடிவமாக) போதுமான நிறையுள்ளது. (இ) தன் சுற்றுப்பாதையின் அண்மையத்தை அகற்றவில்லை. (ஈ) ஒரு துணைக்கோள் அன்று.
3. துணைக்கோள்களைத்தவிர கதிரவனைச்சுற்றிவரும் மற்ற எல்லா வான்பொருள்களும் ‘சிறிய கதிரவவமைப்புப்பொருள்’கள்.

கதிரவவமைப்பின் எட்டு கோள்களைப்போலல்லாமல் தூரியனின் சுற்றுப்பாதை ‘மற்றபொருள்’களுடனும் நெட்டியூனின் பாதையுடனும் மேற்கவிகிறது. ‘மற்றப்பொருள்’களில் இப்போது கதிரவவமைப்பின் மெரும்பான்மையான சிறுகோள்களும் பெரும்பான்மையான நெட்டியூன்கடந்த பொருள்களும் வாலுடுக்களும் மற்ற சிறு பொருள்களும் அடங்குகின்றன.

மேற்கண்ட வரையறையின்படி தூரியன் ஒரு குறுங்கோள்; இதை புதிய வகையான நெட்டியூன்கடந்த பொருள்களின் மாதிரியமாக கருதுகிறோம்.