படலம் 8

நிறையீர்ப்பியல்

8.1 முன்னுரை

பொருள்களனைத்தும் புவியை நோக்கி இழுக்கப்படுவதை நம் அன்றாட வாழ்வில் பொதுவாக காண்கிறோம். மேலே தூக்கி எறியப்படும் எப்பொருளும் புவியை நோக்கி கீழே விழுகிறது. மலைச்சரிவில் ஏறும் பொருள்கள் வேகக்குறைவை நோக்கியும் கீழிறங்கும் பொருள்கள் வேக அதிகரிப்பை நோக்கியும் நகர்கின்றன.

இவ்வகையான நிகழ்வுக்கு மேகங்களிலிருந்து விழும் மழைத்துளிகள்முதல் புவியை நோக்கி விழும் மேலும் பல பொருள்கள்வரை பல்வேறு சான்றுகளை காட்டலாம். அனைத்துப்பொருள்களும், அவற்றின் நிறைகள் எதுவாயினும், புவியை நோக்கி ஒரு மாறா முடுக்கத்துடன் விரைகின்றன என்பதை வரலாற்றில் முதன்முதலாக உணர்ந்தவர் இத்தாலிய இயற்பியலாளரான கலிலியோ கலிலி (1564-1642). இந்த உண்மையை அவர் பொதுமக்களுக்கு இயற்பியற்செயல்முறைகளால் எடுத்துக்காட்டினார். இதற்காக சில சோதனைகளை செய்து காட்டினார். சாய்ந்த பலகைகளில் மீது உருளும் பொருள்களை வைத்து அவற்றின் முடுக்கங்களை கண்டறிந்தார். இவற்றின்மூலம் பெற்ற எண்மதிப்பு பின்னாட்களில் நிறையீர்ப்பின் முடுக்கத்தின் எண்மதிப்போடு கிட்டத்தட்ட ஒத்துப்போனது.

உடுக்கள், கோள்கள் இன்ன பிறவற்றின் வானிய இயக்கங்களை நெடுங்காலமாக பல நாடுகளில் தனித்தனியாக பகுத்தாராய்ந்திருக்கின்றனர். பல நாடுகளின் வானியலின் ஆய்வாளர்கள் ஒவ்வொரு ஆண்டும் உடுக்களின் இருப்பிடம் மாறாமல் தெரிந்ததை கண்டுபிடித்தார்கள். இதில்ஒரு விந்தையாக, கோள்கள் அவற்றின் பின்புல உடுக்களிலிருந்து இடம் மாறியிருப்பதை கண்டுபிடித்தார்கள். வரலாற்றில் முதன்முறையாக கோள்களின்

இயக்கம்பற்றிய ஒரு ஒப்புருவை கிட்டத்தட்ட இரண்டாயிரம் ஆண்டுகளுக்கு முன்பு தாலமி என்பவர் முன்மொழிந்தார். புவிமைய ஒப்புரு என அழைக்கப்படும் இந்த ஒப்புருவின்படி, புவியை மையமாக வைத்து கதிரவனும் உடுக்களும் கோள்களும் சுற்றி வருவதாக முன்மொழிந்தார். மேலும் வானியற்பொருள்களின் இயக்கம் வட்டப்பாதையில் இருக்கிறது எனவும் கருதினர். கோள்களில் கண்டறிந்த இயக்கங்களை விளக்க, மிகவும் சிக்கலான வரைதிட்டங்களை தாலமி வெளியிட்டார். கோள்கள் வட்டப்பாதைகளில் சுற்றும்போது அந்த வட்டங்களின் மையங்கள் பெரும் வட்டப்பாதைகளில் சுற்றிக்கொண்டிருப்பதாக விவரித்தார். பிறகு போலந்து என்ற நாட்டைச்சேர்ந்த ஒரு துறவியான நிக்கலசு கோப்பர்நிக்கசு (1473-1543) நிலையான கதிரவனைச்சுற்றி கோள்கள் ஒரு வட்டப்பாதையில் சுற்றிவரும் ஒரு திட்டவட்டமான ஒப்புருவை முன்மொழிந்தார். அவரது இந்த கோட்பாட்டை அவர் சார்ந்திருந்த தேவாலயம் நிராகரித்தது. இதன் ஆதரவாளர்களுள் முக்கியமானவர் கலிலியோ. இவரும் இந்த நம்பிக்கைகளின் காரணமாக வெறுப்புக்குள்ளானார்.

கலிலியோ வாழ்ந்த அதே காலக்கட்டத்தில் தென்மார்க்கைச்சேர்ந்த மற்றொரு அறிவியலரான தைக்கோ பிராகி (2546-1601) வெறும் கண்ணால் கோள்களின் இயக்கத்தை உற்றுநோக்கி தகவல்களை சேகரித்துவைத்தார். அவ்வாறு சேகரிக்கப்பட்ட தகவல்களை பின்னாட்களில் அவரது உதவியாளரான யோகானசு கெப்பிளர் (1571-1640) தொகுத்தார். இத்தகைய தொகுப்புத்தகவல்களின் வாயிலாக மூன்று முக்கிய விதிகளை கெப்பிளர் வருவித்தார். இந்த விதிகள் நியூட்டனுக்கு தெரியவந்தபோது மிகப்பெரும் நிறையீர்ப்பிய விதிகளாக வடிவெடுத்தன.

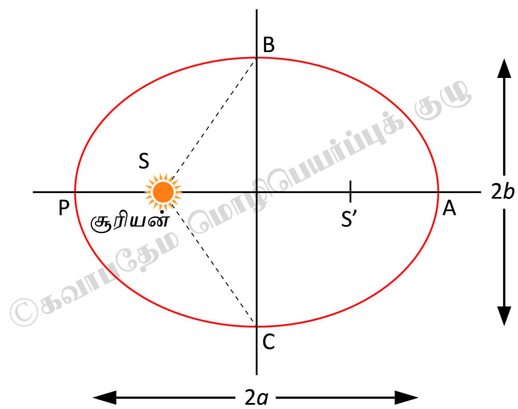
8.2 கெப்பிளரின் விதிகள்

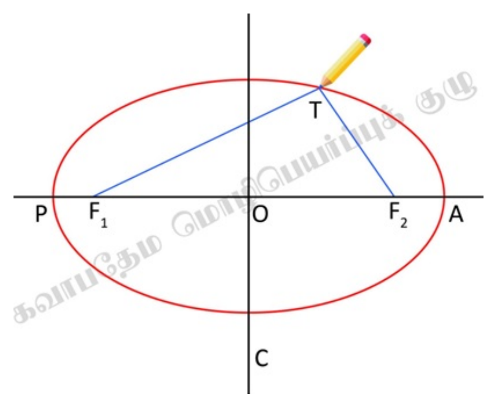
கெப்பிளரின் மூன்று விதிகளை பின்வருமாறு உரைக்கலாம்:

8.2.1 சுற்றுப்பாதைகளின் விதி

அனைத்துக்கோள்களும் கதிரவன் மையமாக உள்ள நீள்வட்டப்பாதைகளில் சுற்றிவருகின்றன. (படம் 8.1.அ) வட்டச்சுற்றுப் பாதைகளை மட்டுமே அனுமதித்த கோப்பர்நிக்கசின் ஒப்புருவிலிருந்து இந்த விதி விலகுகிறது. வட்டம் நீள்வட்டத்தின் ஒரு தனித்துவ வேற்றுவம்.

இரண்டு புள்ளிகளை மையமாக கொண்டு அமையும் நீள்வட்டத்தை பின்வருமாறு வரையலாம். படம் 8.1(ஆ) இல் உள்ளவாறு F_1, F_2 ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள்க. ஒரு நீளமான நூலை எடுத்து அதன் நுனிகளை இரு புள்ளிகளில் ஊசிகளால் அடித்துவிடுக. பென்சிலின் முனையால் அந்த நூலை தொய்வில்லாமல் பிடித்து வரைக (படம் 8.1ஆ இல் உள்ளபடி). இதனால் வரையப்படும் மூடிய வட்டப்பாதை நீள்வட்டம் என அழைக்கப் படுகிறது. இந்த நீள்வட்டத்தில் F_1, F_2 ஆகிய இரு புள்ளிகளுக்கிடையிலுள்ள தொலைவு எப்போதும் மாறிலியாக இருக்கிறது. இந்த புள்ளிகள் குவியங்கள் என அழைக்கப்படுகின்றன. படம் 8.1(ஆ)வில் உள்ளபடி F_1, F_2 ஆகிய இரு புள்ளிகளை இணைத்து நீட்டி நீள்வட்டத்தோடு இணைத்தால் அவை P , A ஆகிய புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன. PA என்ற கோட்டின் மையப்புள்ளி O நீள்வட்டத்தின் மையம் எனவும் $PO = AO$ என்ற நீளம் அரைநெட்டச்சு எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. ஒரு வட்டத்துக்கு இரண்டு குவியங்கள் ஒன்றாகி, அரைநெட்டச்சு வட்டத்தின் ஆரம் ஆகிவிடுகிறது.



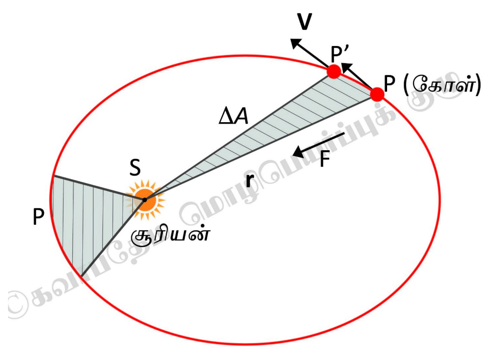


படம் 8.1(அ) கதிரவனை ஒரு கோள் சுற்றிவரும்போது ஒரு நீள்வட்டப்பாதை உருவாகிறது. இந்த படத்தில் கதிரவனின் அருகிலுள்ள புள்ளி கதிரவண்மை (P) எனவும் கதிரவனிலிருந்து தொலைவிலுள்ள புள்ளி கதிரவச்சேய்மை (A) எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. AP என்ற தொலைவில் பாதி நீள்வட்டத்தின் அரைநெட்டச்சு ஆகிறது (ஆ) நீள்வட்டம் வரைதல். ஒரு நூலின் இரு நுனிகளை F_1, F_2 என்ற இரு புள்ளிகளில் நிலையாக பிணைத்து

வைத்து பென்சிலின் முனையால் நூலை தொய்வில்லாமல் பிடித்து வரைகிறோம்.

8.2.2 பரப்புகளின் விதி

கதிரவனையும் கோளையும் இணைக்கும் கோடு சமக்காலத்தில் சமப்பரப்பை மெழுகுகிறது (படம் 8.2). கோள்கள் கதிரவனின் அருகில் இருக்கும்போது நகர்வதைவிட தொலைவிலிருக்கும்போது வேகமாக நகர்கின்றன என்று கண்டறிந்ததிலிருந்து இந்த விதியை பெறுகிறோம்.



படம் 8.2 P என்ற ஒரு கோள் கதிரவனை நீள்வட்டப்பாதையில் சுற்றிவருகிறது. இங்கு ΔA என்ற நிழலிட்ட பரப்பை Δt என்ற சிறு காலத்தில் கடக்கிறது

8.2.3 சீரொழுங்குநேரங்களின் விதி

ஒரு கோளின் சீரொழுங்குநேரத்தின் வர்க்கம் அது அசையும் நீள்வட்டப்பாதையின் அரைநெட்டச்சின் மும்மடிக்கு நேர்விழுக்காட்டில் அமைகிறது. கதிரவனை சுற்றிவரும் 8 கோள்களின் சீரொழுங்கு நேரங்களையும் அவற்றின் அரைநெட்டச்சின் மதிப்புகளையும் அட்டவணை 8.1 காட்டுகிறது.

கெப்பிளரின் சீரொழுங்குநேரவிதியை உறுதி செய்யும்வண்ணம் கோள்களின் அசைவுத்தகவல்கள் பட்டியலிடப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை 8.1 கோளசைவுகளின் அளவீடுகளிலிருந்து கிடைத்த தரவுகள் கெப்பிளரின் சீரொழுங்குநேரவிதியை உறுதிப்படுத்துகின்றன.

a அரைநெட்டச்சு, $10^{10} m$ இல்

T சீரொழுங்கு, ஆண்டில்

Q விகிதம் (T^2/a^3) $10^{-34}\ y^2\ m^{-3}$இல்

கோள்	a	T	Q
புதன்	5.79	0.24	2.95
வெள்ளி	10.8	0.615	3.0
புவி	15.0	1	2.96
செவ்வாய்	22.8	1.88	2.98
வியாழன்	77.8	11.9	3.01
சனி	143	29.5	2.98
யுரேனசு	287	84	2.98
நெட்டியூன்	450	165	2.99
தூரியன்[1]	590	248	2.99

கோணவுந்தத்தின் அழியாக்காப்புவிதி எந்த வொரு மையவிசைக்கும் செல்லுபடியாகிறது. பரப்புகளின் விதியை இதன் பின்விளைவாக புரிந்துகொள்ளலாம். ஒரு கோளின் மீது செயலாற்றும் மைய விசை அக்கோளையும் கதிரவனையும் இணைக்கும் திசையில் செயலாற்றுகிறது. கதிரவனை மையமாக எடுத்து, அதை சுற்றிவரும் கோளின் இடநிலையை $\boldsymbol{r}$ என்றும் உந்தத்தை $\boldsymbol{p}$ என்றும் குறிப்போம். m நிறையுள்ள கோள் ஒரு நேர இடைவெளியில் கடக்கும் பரப்பை பின்வருமாறு குறிக்கலாம்.

$$\Delta A = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\Delta t) \qquad (8.1)$$

ஆகையால், $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}/m$ என்பதை பயன்படுத்தி

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})}{m} = \frac{\boldsymbol{L}}{2m} \qquad (8.2)$$

இங்கு $\boldsymbol{v}$ திசைவேகம், L கோணவுந்தம் $(= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})$. $\boldsymbol{r}$ இன் திசையிலுள்ள ஒரு மைய விசைக்கு $\boldsymbol{L}$ ஒரு மாறிலி. எனவே, $\Delta A/\Delta t$ என்பது (8.2)ஆம் சமன்பாட்டின்படி மாறிலி. இதுவே பரப்புகளின் விதி. நிறையீர்ப்பு ஒரு மைய விசை.

யோகானசு கெப்பிளர்

(1571-1630)

இவர் ஒரு செருமானிய அறிவியலர். அவர் தைக்கோ பிராகியும் உடன்பணியாளர் களும் கடின உழைப்பால் பெற்ற கண்டறிதல்களின் அடிப்படையில் கோள்களின் இயக்கத்துக்கு மூன்று விதிகளை வகுத்தார். கெப்பிளரே ஒரு காலத்தில் பிராகிக்கு உதவியாளராக இருந்தார். மூன்று

[1] சென்ற படல த்தின் இறுதியிலுள்ள பெட்டிச்செய்தியை காண்க.

விதிகளை கண்டறிய கெப்பிளருக்கு பதினாறு ஆண்டுகள் ஆயின. கெப்பிளரை வடிவிய லொளியியலின் நிறுவுநராகவும் அறிகிறோம். ஒரு தொலைநோக்கியில் நுழைந்த பிறகு ஒளிக்கு என்ன ஆகிறது என்பதை முதலில் விவரித்தார்.

மைய விசைகள்

மையத்தைப்பொறுத்து ஒரு துகளின் கோணவுந்தம் மாறும் வீதத்தை

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

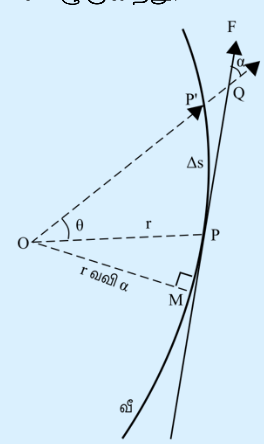
என்று குறிப்பது நாமறிந்ததே. $\boldsymbol{F}$ எனப்படும் விசையால் ஏற்படும் கோணவிசை சுழியமாகும்போது துகளின் கோணவுந்தம் அழியாக்காப்புடையது. F சுழியமமாகும் போதோ rஇன் திசையிலுள்ளபோதோ இது நிகழ்கிறது. மையவிசைகள் r இன் திசையிலுள்ளன. ஒரு மையவிசை எப்போதும் ஒரு நிலையான புள்ளியை நோக்கியோ அதிலிருந்து வெளிநோக்கியோ செயலாற்று கிறது. (கீழுள்ள படத்தை காண்க.). மேலும், மையவிசையின் பருமனளவு நிலையான புள்ளியிலிருந்து விசை செயலாற்றும் தொலைவான rஐ சார்ந்திருக்கிறது. அதாவது $F = F(r)$.

மையவிசையினாலான அசைவில் கோணவுந்தம் எப்போதும் ஆழியாக்காப்புறு கிறது. இதிலிருந்து இரண்டு முக்கியமான முடிவுகளை பெறுகிறோம்.

(அ) மைய விசையின்கீழ் ஒரு துகளின் அசைவு எப்போதும் ஒரு தளத்திலே இருக்கிறது.

(ஆ) விசையின் மையத்தைப்பொறுத்து துகளின் இடநிலைத்திசையன் மாறாத பரப்புத்திசைவேகமுள்ளது.

வேறுவிதமாகச்சொன்னால், மையவிசை யால் துகள் நகரும்போது இடநிலைத்திசை யன் சமமான நேரங்களில் சமமான பரப்புகளை மெழுகுகிறது.



படத்தில் மையவிசைக்குட்பட்ட துகளின் வீசுபாதையை வீ குறிக்கிறது. P என்ற இடநிலையில் விசை OPயின் திசையில் இருக்கிறது. விசையின் மையமான Oவை மூலமாக எடுக்கிறோம். Δt என்ற நேரத்தில் துகள் Pயிலிருந்து P'க்கு அசைகிறது. PP' என்ற வில் $\Delta s = v\,\Delta t$. Pயில் திசைவேகத்தின் திசையை வீசுபாதையின் தொடுகோடான PQ தருகிறது. Δtயில் மெழுகும் பரப்பளவு $POP' = \frac{PP'}{2} = (rv \text{ வலி } \alpha)\frac{\Delta t}{2}$.

இதிலிருந்து மேற்சொன்ன இரண்டு முடிவுகளையும் நிறுவ முயலுங்கள். இதற்காக, பரப்பு வேகம்

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r\, v \text{ வலி } \alpha$$

என்பதை நினைவுகொள்க. மேற்கண்ட விவாதத்தை கதிரவனின் நிறையீர்ப்பு விசையின்கீழ் அசையும் ஒரு கோளின் இயக்கத்திற்கு உடனடியாக பயன்படுத்த லாம். கதிரவன் அதிக நிறையுள்ளது என்பதால் அதை நிலையானதாக கொள்ளலாம். கோளின்மீது செயலாற்றும் கதிரவனின் நிறையீர்ப்புவிசை கதிரவனைநோக்கி செயல்டுகிறது என்பதால் இவ்விசை $F = F(r)$ என்பதை நிறைவுசெய்கிறது.

மேல் விவரித்த இரண்டு முடிவுகளும் கோளின் அசைவுக்கு பொருந்துகின்றன. உண்மையில், (ஆ) கெப்பிளரின் இரண்டாம் விதி.

சிக்கல் 8.1

படம் 8.1(அ)வில் P என்று காட்டிய கதிர வண்மையில் கோளின் வேகம் v_p எனவும் SP என்று காட்டிய கதிரவக்கோளின் தொலைவு r_p எனவும் கொள்க. $\{r_p, v_p\}$ ஆகியவற்றை நிகரான கதிரவச்சேய்மையளவுகளான $\{r_a, v_a\}$ ஆகியவற்றுடன் தொடர்புறுத்துக. BAC, CPB ஆகிய பரப்புகளை கடக்க கோள் சமநேரத்தை எடுக்குமா?

தீர்வு

P இல் $\boldsymbol{r}_p$யும் $\boldsymbol{v}_p$யும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை என்பதை படத்தில் பார்த்தே அறிவதால், அங்கு கோணவுந்தத்தின் பருமளவு $L_p = m_p r_p v_p$ இதைப்போல், $L_a = m_a r_a v_a$. கோணவுந்தத்தின் அழியாக்காப்பி னால்,

$$m_p r_p v_p = m_a r_a v_a$$

அதாவது,

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p}$$

படம் 8.1இல் $SBAC$ என்ற பரப்பு $SBPC$யைவிட பெரியது கெப்பிளரின் இரண்டாம் விதியின் படி, சமநேரத்தில் கோள் சமப்பரப்பை கடக்கிறது. எனவே, கோள் BACஐ கடக்க CPBயைவிட அதிகநேரம் எடுக்கிறது.

8.3 அனைத்துவ நிறையீர்ப்புவிதி

நியூட்டன் கவனித்த ஆப்பிள் விழுந்த கணக்கீட்டிலிருந்து அவர் ஒரு அனைத்துவ நிறையீர்ப்பு விதியை வந்தடைந்தார். இது புவியின் நிறையீர்ப்பையும் கெப்பிளர் கண்டுபிடித்த கோள்களின் இயக்க விதிகளையும் பின்னாட்களில் விளக்கியது. நிலா புவியை R_m என்ற ஆரமுள்ள சுற்றுவட்டப் பாதையில் சுற்றிவருவதால் புவியின் நிறையீர்ப்பினால்

$$a_m = \frac{V^2}{R_m} = \frac{4\,\pi^2 R_m}{T^2} \qquad (8.3)$$

என்ற பருமனளவுள்ள மையநோக்கிய முடுக்கத்துக்குள்ளாகிறது. இங்கு நிலாவின் திசைவேகமான Vயும் அதன் சீரொழுங்கு நேரமான Tயும் $V = 2\pi R_m/T$ என்ற உளவுள்ளவை. இங்கு T சுமார் 27.3 நாட்கள், $R_m = 3.84 \times 10^8\,m$. இவற்றை (8.3)ஆம் சமன்பாட்டில் இட்டு a_m ஐ கணக்கிட்டால், புவியின் பரப்பில் புவியீர்ப்புமுடுக்கம் தரும் மதிப்பைவிட மிகக்குறைவான மதிப்பை பெறுகிறோம்.

தொலைவு அதிகமாகும்போது புவியின் நிறையீர்ப்புவிசை குறைவதை இது தெளிவாக காட்டுகிறது. தொலைவின் வர்க்கத்தின் புரட்டுவிழுக்காட்டில் புவியின் நிறையீர்ப்பு விசை குறைகிறது என்று கொண்டால்

$$\frac{g}{a_m} = \frac{R_m^2}{R_R^2} \cong 3600 \qquad (8.4)$$

என்றாகிறது. இது $g = 9.8\,m\,s^2$ மதிப்புடனும் (8.3) ஆம் சமன்பாட்டில் கண்ட மதிப்புடனும் ஒத்துப்போகிறது.

இதிலிருந்து நியூட்டன் அனைத்துவ நிறையீர்ப்புவிதியை பின்வருமாறு எழுதினார்.

புடவியிலுள்ள ஒவ்வொரு பொருளும் மற்ற ஒவ்வொரு பொருளையும் அவற்றின் நிறை களின் பெருக்குத்தொகைக்கு நேர்விழுக்காட்டி லும் அவற்றிடையான தொலைவின் வர்க்கத்துக்கு புரட்டுவிழுக்காட்டிலுமான ஒரு விசையால் ஈர்க்கிறது.

இந்த மேற்கோள் கிட்டத்தட்ட நியூட்டனின் புகழ்பெற்ற *இயற்கைத்தத்துவத்தின் கணிதக் கொள்கை* என்ற நூலிலிருந்து எடுக்கப்பட்டது.

கணிதவழியில் நியூட்டனின் நிறையீர்ப்பு விதியை பின்வருமாறு எழுதலாம். m_1 என்ற புள்ளிநிறையால் m_2 என்ற புள்ளிநிறையின்மீது

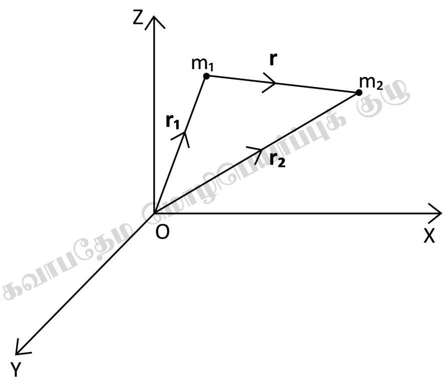
$$|\boldsymbol{F}| = G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2} \qquad (8.5)$$

என்ற விசை செயலாற்றுகிறது. (8.5)ஆம் சமன்பாட்டை திசையன்வடிவில்

$$\boldsymbol{F} = G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}(-\hat{\boldsymbol{r}}) = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$
$$= -G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} = -G\,\frac{m_1\,m_2}{|r|^3}\boldsymbol{r}$$

என்று எழுதலாம்; இங்கு G அனைத்துவ நிறையீர்ப்புமாறிலி. $\hat{\boldsymbol{r}}$ படம் 8.3இல் காட்டியபடி m_1 , m_2 ஆகியவற்றுக்கிடையான அலகுத்திசையன். படம் 8.3இல் காட்டியபடி $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$.

நிறையீர்ப்பு விசை கவர்ச்சியானது; அதாவது $\boldsymbol{F}$ இன் திசை $-\boldsymbol{r}$க்கு நேரானது. m_2 என்ற புள்ளிநிறையால் m_1 என்ற புள்ளிநிறைமீது செயலாற்றும் விசை நியூட்டனின் மூன்றாவது விதியால் $-\boldsymbol{F}$.ஆகிறது. எனவே, முதற்பொருள் இரண்டாம் பொருளின்மீது செலுத்தும் விசை $\boldsymbol{F}_{12}$ என்றும் இரண்டாம் பொருள் முதற் பொருளின்மீது செலுத்தும் விசை $\boldsymbol{F}_{21}$ என்றுமிருந்தால், $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$.

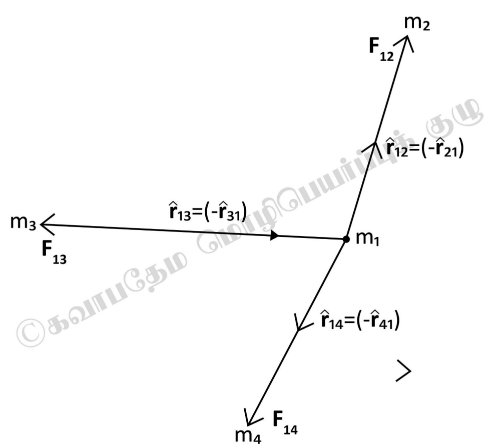


படம் 8.3 m_2ஆல் m_1இல் ஏற்படும் நிறையீர்ப்புவிசை $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$இன் திசையிலுள்ளது.

(8.5)ஆம் சமன்பாட்டை பயன்படுத்தும்முன், இந்த விதி **புள்ளி**நிறைகளை குறிக்கிறது என்பதில் நாம் கவனமாயிருக்கவேண்டும். நாம் பரும அளவுகளுள்ள பொருள்களுக்கு இவ்விதியை பயன்படுத்த விரும்புகிறோம். அமைப்பில் பல புள்ளிநிறைகளின் தொகுப்பு இருந்தால், அவற்றுளொன்றின்மீதுள்ள விசை மற்ற புள்ளிவிசைகள் செலுத்தும் நிறையீர்ப்பு விசைகளின் திசையன்கூட்டல். (படம் 8.4).

m_1இல் மொத்த விசை

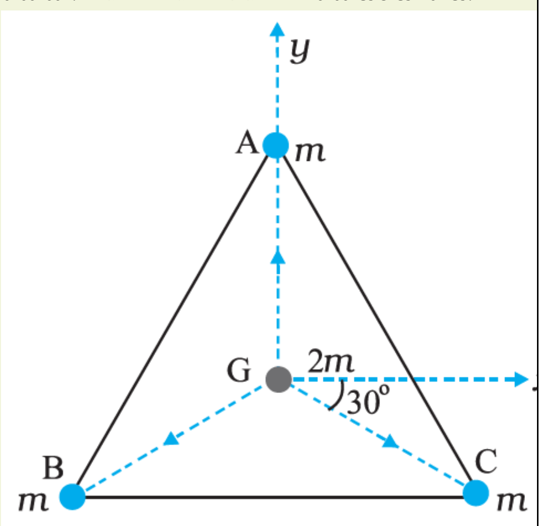
$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{Gm_2m_1}{r_{21}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{21} + \frac{Gm_3m_1}{r_{31}^2} + \hat{\boldsymbol{r}}_{31} + \frac{Gm_4m_1}{r_{41}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{41}$$



படம் 8.4 புள்ளிநிறையான m_1 இன்மீதுள்ள நிறையீர்ப்பவிசை m_2, m_3, m_4 ஆகியவை செலுத்தும் விசைகளின் திசையன்கூட்டல்

சிக்கல் 8.2

ABC என்ற சமப்பக்க முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு உச்சியிலும் $m\,kg$ அளவுள்ள சமமான நிறைகளை பொருத்துகிறோம். (அ) முக்கோணத்தின் மையத்தில் வைத்த $2m\,kg$ நிறையின்மீது செயலாற்றும் விசை என்ன? (ஆ) Aயில் வைத்த நிறை இரட்டித்தால், விசை என்ன? $AG = BG = CG = 1$ எனக்கொள்க.



படம் 8.5 ABC என்ற முக்கோணத்தின் உச்சிகளில் மூன்று சமமான நிறைகளும் மையத்தில் இருமடங்கான நிறையும்.

தீர்வு

(அ) GC க்கும் நேர்ம x அச்சுக்கும் இடையான கோணம் $30°$; GB க்கும் எதிர்ம x அச்சுக்கும் இடையான கோணமும் அதுவே. திசையக் குறியீட்டில் இந்த விசைகள்.

$$\boldsymbol{F}_{GA} = \frac{Gm(2m)}{1}\hat{\boldsymbol{j}};$$

$$\boldsymbol{F}_{GB} = \frac{Gm(2m)}{1}(-\hat{\boldsymbol{\imath}}\,\text{உவவி}\,30\,° - \hat{\boldsymbol{j}}\,\text{வவி}\,30°);$$

$$\boldsymbol{F}_{GC} = \frac{Gm(2m)}{1}(+\hat{\boldsymbol{\imath}}\,\text{உவவி}\,30 - \hat{\boldsymbol{j}}\,\text{வவி}\,30°)$$

மேலமைவுக்கொள்கையையும் திசையக் கூட்டலையும் பயன்படுத்தி $2m$ மீது செயல்படும் நிறையீர்ப்பு விசையான F_R என்பதை

$$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_{GA} + \boldsymbol{F}_{GB} + \boldsymbol{F}_{Gc}$$
$$= 2Gm^2(-\hat{\boldsymbol{\imath}}\,\text{உவவி}\,30° - \hat{\boldsymbol{j}}\,\text{வவி}\,30°)$$
$$+2Gm^2(\hat{\boldsymbol{\imath}}\,\text{உவவி}\,30° - \hat{\boldsymbol{j}}\,\text{வவி}\,30°) = 0$$

என்று பெறுகிறோம். மறுவழியாக, சமச்சீர்மையின் அடிப்படையிலும் விசையின் விளைவுமம் சுழியம் ஆகவேண்டும் என எதிர்பார்க்கலாம்.

(ஆ) Aயிலுள்ள நிறை இரட்டித்தால்,

$$\boldsymbol{F'}_{GA} = \frac{G2m2m}{l}\hat{\boldsymbol{j}} = 4Gm^2\hat{\boldsymbol{j}};$$

$$\boldsymbol{F}'_{GB} = \boldsymbol{F}_{GB};\ \ \boldsymbol{F}'_{Gc} = \boldsymbol{F}_{GC};$$

$$\boldsymbol{F}'_R = \boldsymbol{F}'_{GA} + \boldsymbol{F}'_{GB} + \boldsymbol{F}'_{GC} = 2Gm^2\hat{\boldsymbol{j}}$$

ஒரு பருமளவப்பொருளுக்கும் (புவி போன்றது) ஒரு புள்ளிநிறைக்கும் இடையிலான நிறையீர்ப்புவிசைக்கு (8.5)ஆம் சமன்பாடு நேரடியாக பொருந்துவதில்லை. பருமளவுப் பொருளிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிநிறையும் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிநிறையில் ஒரு விசையை செலுத்துகிறது. இந்த விசைகளனைத்தும் ஒரே திசையில் இல்லை.

பருமளவுப்பொருளின் மொத்த விசையை பெற எல்லாப்புள்ளிநிறைகளுக்கும் இந்த விசைகளை திசையன் கூட்டல் முறையில் சேர்க்க வேண்டும்.

நுண்கணிதத்தை பயன்படுத்தி இதை எளிதாக செய்யலாம். அதைச்செய்யும்போது இரண்டு தனித்துவ வேற்றுவங்களில் எளிய விதிகள் கிடைக்கின்றன.

(அ) சீரான அடர்வுள்ள உள்வமற்ற கோளத்துக்கும் அதற்கு வெளியுள்ள ஒரு புள்ளிநிறைக்குமிடையான நிறையீர்ப்புவிசை கோளத்தின் மொத்த நிறையும் ஒரு புள்ளியில் செறிந்திருப்பதுபோல் செயலாற்றுகிறது.

பண்பியமாக இதை பின்வருமாறு புரிந்து கொள்ளலாம்

கோளத்தின் பல்வேறு பகுதிகளிலிருந்து எழும் நிறையீர்ப்புவிசைகளை புள்ளிநிறையை மையத்துடன் இணைக்கும் கோட்டுக்கு நேரான அகையாகவும் அதற்கு செங்குத்தான அகையாகவும் பிரிக்கலாம். கோளத்தின் எல்லாப்பகுதிகளின் விசைகளையும் சேர்த்து கூட்டும்போது மையத்துடன் புள்ளிநிறையை இணைக்கும் கோட்டுக்கு செங்குத்தான விசைகள் ஒன்றையொன்று நீக்கி கோட்டுக்கு நேராக செயலாற்றும் விசை மட்டுமே

மிஞ்சுகிறது. இந்த விசையின் பருமனளவு மேலே குறிப்பிட்டபடி செயலாற்றுகிறது.

(ஆ) சீரான அடர்வுள்ள உள்வமற்ற கோளத்துக்கும் அதன் உள்ளுள்ள புள்ளி நிறைக்குமிடையான நிறையீர்ப்பு விசை சுழியம்.

இதையும் நாம் பண்படிப்படையில் தெளிவாக புரிந்துகொள்ளலாம். உள்வமற்ற கோளத்தின் பல்வேறு பகுதிகள் புள்ளிநிறையை பல்வேறு திசைகளில் ஈர்க்கின்றன. இந்த விசைகள் முற்றிலும் ஒன்றையொன்று ஈடுசெய்கின்றன.

நியூட்டனின் அடிக்கொள்கைகள்

கெப்பிளர் தனது மூன்றாவது விதியை சுமார் 1619இல் வகுத்திருந்தார். அதிலிருந்து சுமார் எழுபது ஆண்டுகளுக்குப்பிறகு 1687 இல் நியூட்டனின் தலைசிறந்த படைப்பான *இயற்கைத்தத்துவத்தின் கணித அடிக் கொள்கைகள்* (*அடிக்கொள்கைகள்* என்று சுருக்கமாகவும் அழைக்கப்படுகிறது) வெளி யானபோது நிறையீர்ப்பின் அடிப்படையான அனைத்துவ விதி அறிவிக்கப்பட்டது.

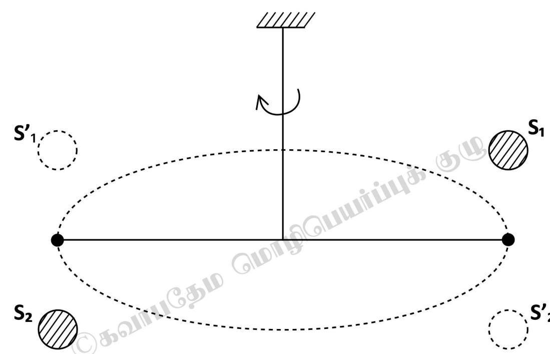
1685ஆம் ஆண்டில், எடுமண்டு ஏலீ (புகழ்பெற்ற ஏலீயின் வாலுடுவின் பெயர்க்காரண மானவர்), கேம்பிரிசில் நியூட்டனை சந்திக்க வந்தார்; புரட்டு வர்க்க விதியின் கீழ் நகரும் பொருளின் பாதையின் தன்மையைப்பற்றி அவரிடம் கேட்டார். தயக்கமின்றி நியூட்டன் அந்தப்பாதை ஒரு நீள்வட்டமாக இருக்க வேண்டும் என்று விடையளித்தார்; மேலும், 1665ஆம் ஆண்டில் கொள்ளைநோய் நிலவியதால் அவர் கேம்பிரிசிலிருந்து தனது பண்ணைக்கு சென்று ஓய்வுபெறுவது கட்டாயமானபோது, கணக்கீடு களை செய்திருந்ததாகவும் சொன்னார். புன்வாய்ப்பாக, நியூட்டன் தனது கணக்கீட்டாவணங்களை இழந்துவிட்டார்.

நியூட்டன் தனது படைப்புகளை புத்தக வடிவில் தயாரிக்கும்படி தூண்டி அதற்கான வெளியீட்டு செலவை ஏற்கவும் ஏலீ ஒப்புக்கொண்டார். நியூட்டன் பதினெட்டு மாத உழைப்பில் இந்த சாதனையை செய்தார். *அடிக்கொள்கைகள்* அறிவியலின் தலைசிறந்த படைப்பு. இயற்பியலாளர் இலகிராஞ்சு இதனை "மனித மனத்தின் மிகப்பெரிய சாதனை" என்றார். இந்தியாவில் பிறந்த வானியற்பியலரும் நோபல் சூடியவருமான சு. சந்திரசேகர் பத்து ஆண்டுகள் செலவழித்து அடிக்கொள்கைக ளைப்பற்றி ஒரு விரிவுரையை எழுதினார். பொது வாசகருக்கான நியூட்டனின் அடிக்கொள்கைகள் என்ற தலைப்புடைய அவரது நூல் நியூட்டன்முறைகளின் அழகை யும் தெளிவையும் வெளிப்படுத்துகிறது.

8.4 நிறையீர்ப்புமாறிலி

அனைத்துவ நிறையீர்ப்புவிதியிலுள்ள G என்ற நிறையீர்ப்புமாறிலியின் மதிப்பை எனுரி கேவண்டிசு என்ற ஆங்கிலேய அறிவியலர் 1798இல் சோதனைவழி தீர்மானித்தார். அவர் பயன்படுத்திய செயற்கருவியை படம் 8.6 காட்டுகிறது.

AB என்ற பாரையின் நுனிகளில் இரண்டு ஈயக்கோளங்களை இணைத்து பாரையை ஒரு நிலையான ஆதாரத்திலிருந்து மெல்லிய கம்பியால் தொங்கவிடுகிறோம். இரண்டு பெரிய ஈயக்கோளங்களை சிறிய கோளங்களின் அருகில் எதிரெதிர்த்திசைகளில் கொண்டுவரு கிறோம். பெரிய கோளங்கள் அருகிலுள்ள சிறிய கோளங்களை படத்தில் காட்டியபடி F பருமனளவுள்ள சமமான எதிர்த்திசையிலான விசைகளால் ஈர்க்கின்றன. பாரையில் நிகர விசை இல்லை; ஒரு கோணவிசை மட்டுமே உள்ளது. இது F ஐ பாரையின் நீளத்தால் பெருக்கியதற்கு சமம். இந்த கோணவிசையால் தொங்கும் கம்பி சற்று முறுங்குவதால் அதன் மீளமைக்கோணவிசை நிறையீர்ப்பின் கோணவிசையை சமனாக்குகிறது. கம்பியின் முறுக்கக்கோணம் θ எனில், மீளமைக் கோணவிசை $\tau\theta$; இங்கு τ மீளமைக்கோண விசையின் கோணவிகிதம். τவை சாராவகை யில் அளக்கலாம்; சான்றாக, தெரிந்த கோணவிசையை செலுத்தி முறுக்கக் கோணத்தை அளக்கலாம்.



படம் 8.6 கேவண்டிசின் பரிசோதனையின் திட்டப்படவரைவு. S_1, S_2 ஆகிய பெரிய கோளங்கள் A, Bஇலுள்ள நிறைகளின் இருபுறமும் வைக்கப்படுகின்றன (நிழலிட்டு காட்டப்பட்டவை). பெரிய கோளங்களை நிறைகளின் மறுபுறம் கொண்டுசெல்லும்போது (புள்ளியிட்ட வட்டங்கள் காட்டுகின்றன) திருப்புவிசை மாறுவதால் AB என்ற பாரை சிறிது சுழல்கிறது. சுழற்சியின் கோணத்தை சோதனைமூலம் அளவிடலாம்.

கோளங்களுக்கிடையான நிறையீர்ப்பு விசை நிறை அவற்றின் மையங்களில் செறிந்திருப்பது போல் செயலாற்றுகிறது. பெரிய கோளத்துக்கும் அதன் அருகிலுள்ள சிறிய கோளத்துக்குமான தொலைவு d எனவும், M, m ஆகியவை அவற்றின் நிறைகள் எனவும்

கொண்டால், பெரிய கோளத்துக்கும் சிறிய கோளத்துக்குமிடையான நிறையீர்ப்பு விசை.

$$F = G\frac{Mm}{d^2} \qquad (8.6)$$

L பாரையின் நீளம் எனில், Fஇலிருந்து எழும் கோணவிசை Fஐ Lஆல் பெருக்குவதற்கு சமம். சமநிலையில் இது மீளமைக்கோணவிசைக்கு சமமாகிறது.

$$G\frac{Mm}{d^2 L} = \tau\,\theta \qquad (8.7)$$

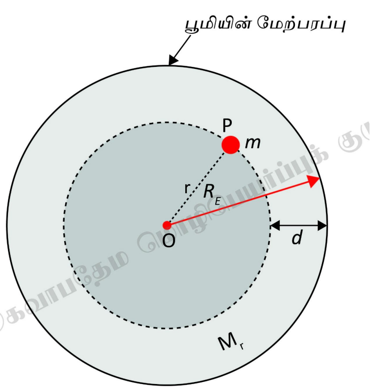
θவை கண்டறிவதன்மூலம் Gஐ தீர்மானிக்கலாம். கேவண்டிசின் பரிசோதனைக்குப்பின் G இன் மதிப்பு மேம்பட்டது; இப்போது ஏற்கப்படும் மதிப்பு:

$$G = 6.67 \times 10^{-11} N\frac{m^2}{kg^2} \qquad (8.8)$$

8.5 புவியீர்ப்பால் முடுக்கம்

புவியை ஒரு கோளமாகவும் இந்த கோளத்தில் மையமொன்றிய மிகப்பல கோளக்கூடுகள் இருப்பதாகவும் கற்பனை செய்யலாம். மையத்தி னருகில் சிறிய கூடுகளும் பரப்பினருகில் பெரிய கூடுகளும் இருக்கின்றன. புவிக்கு வெளியிலுள்ள ஒரு புள்ளியை கருதுக. அனைத்து கூடுகளும் அப்புள்ளியில் ஒரு நிறையீர்ப்பு விசையை செலுத்துகின்றன. அனைத்து கூடுகளின் மொத்த நிறை புவியின் நிறைக்கு சமம். புள்ளி எல்லா கூடுகளுக்கும் வெளியே உள்ளதால் ஒவ்வொரு கூடும் மையத்தில் குவிந்த விசையை புள்ளியின்மீது செலுத்துகிறது. எனவே, புவிக்கு வெளியே உள்ள புள்ளி உணரும் புவியின் முழு நிறையீர்ப்புவிசை நிறையும் அதன் மையத்தில் குவிந்துள்ளது போலாகிறது.

புவிக்கு உட்பக்கத்திலுள்ள புள்ளிக்கு நிலைமை வேறு. இதை படம் 8.7 காட்டுகிறது.



படம் 8.7 m என்ற நிறை புவியின் பரப்பிற்கு கீழே d ஆழத்தில் அமைந்துள்ள ஒரு சுரங்கத்தில் உள்ளது. புவியின் நிறை $M_ப$, ஆரம் $R_ப$. புவியை நாம் கோள சமச்சீராக கருதுகிறோம்.

புவி மையமொன்றிய கோளங்களால் ஆனது என்றும் m என்ற ஒரு புள்ளிநிறை மையத்திலிருந்து r தொலைவிலுள்ள P என்ற இடத்தில் இருப்பதாகவும் கொள்வோம். rஐ விட அதிக ஆரமுள்ள ஒரு கோளக்கூட்டினுள் P உள்ளதால், சென்ற பகுதியில் கண்டபடி, இந்தக்கூடு எந்த நிறையீர்ப்பு விசையையும் செலுத்தவில்லை. ஆரங்கள் $\leq r$ உள்ள பல கோளக்கூடுகள் சேர்ந்து ஆரம் r உள்ள ஒரு கோளத்தை உருவாக்குகின்றன. எனவே, இந்த சிறிய கோளம் Pயிலுள்ள mஇன்மீது தன் நிறையான M_r மையத்தில் செறிந்துள்ளது போன்ற ஒரு விசையை செலுத்துகிறது. இவ்வாறு, Pயிலுள்ள mஇன்மீதான விசையின் பருமனளவு

$$F = \frac{Gm(M_r)}{r^2} \qquad (8.9)$$

முழுப்புவியும் சீரான அடர்வுள்ளது என்று கொள்வோம். அப்படியெனில், புவியின் நிறையை

$$M_ப = \frac{4\pi}{3}R_ப^3\rho; \qquad \text{அதாவது} \quad \frac{4\pi\rho}{3} = \frac{M_ப}{R_ப^3}$$

என்று எழுதலாம்; இங்கு ρ புவியின் (சீரான) அடர்வும் $R_ப$ அதன் ஆரமும். சிறிய கோளத்தின் நிறை

$$M_r = \frac{4\pi}{3}\rho r^3$$

எனவே, (8.9)ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$F = Gm\left(\frac{4\pi\rho}{3}\right)\frac{r^3}{r^2} = \frac{Gm\,M_ப}{R_ப^3}r \qquad (8.10)$$

m என்ற நிறை புவியின் பரப்பில் இருந்தால், $r = R_ப$ என ஆகிறது. அப்போது, நிறையீர்ப்புவிசை

$$F = G\frac{M_ப m}{R_ப^2} \qquad (8.11)$$

இந்த நிறை பெறும் முடுக்கத்தை பொதுவாக g என்ற குறியீட்டால் குறிக்கிறோம். இது $F = mg$ என்று நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியுடன் தொடர்பானது. இதனால்

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM_ப}{R_ப^2} \qquad (8.12)$$

g என்ற முடுக்கம் எளிதில் அளவிடக்கூடியது. புவியின் ஆரமான $R_ப$ இன் மதிப்பை நாம் அறிவோம். கேவண்டிசின் சோதனைமூலமோ வேறு முறையாலோ பெற்ற Gஇன் அளவீட்டையும் (8.12)ஆம் சமன்பாட்டையும் பயன்படுத்தி $M_ப$ஐ மதிப்பிடலாம். இதனாலே "கேவண்டிசு புவியை எடைபோட்டார்" என்று கூற்று உருவாயிற்று.

8.6 புவியின் பரப்புக்கு கீழும் மேலும் நிறையீர்ப்புமுடுக்கம்

படம் 8.8(அ)இல் காட்டியபடி புவியின் பரப்பிலிருந்து h என்ற உயரத்திலுள்ள m எனற ஒரு புள்ளிநிறையை கருதுக.

புவியின் ஆரத்தை $R_{\text{ப}}$ஆல் குறிக்கிறோம். இப்புள்ளி புவிக்கு வெளியே உள்ளதால் புவியின் மையத்திலிருந்து அதன் தொலைவு $(R_{\text{ப}}+h)$. புள்ளிநிறையின்மீதான விசையின் பருமனளவை $F(h)$ குறித்தால், (8.5) ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$F(h)=\frac{GM_{\text{ப}}m}{(R_{\text{ப}}+h)^2} \qquad (8.13)$$

என்று பெறுகிறோம்.

இதிலிருந்து

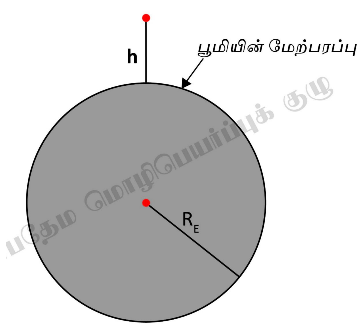
$$g(h)=\frac{F(h)}{m}=\frac{GM_{\text{ப}}}{(R_{\text{ப}}+h)^2} \qquad (8.14)$$

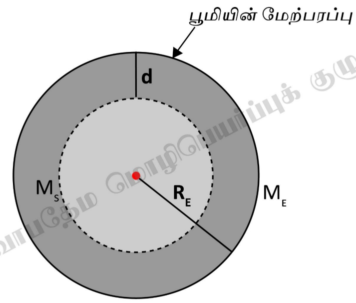
என்பதை பெறுகிறோம். இது புவியின் பரப்பிலுள்ள $g=GM_{\text{ப}}/R_{\text{ப}}^2$ என்ற மதிப்பை விட சிறிதாயிருப்பது தெளிவு. $h<<R_{\text{ப}}$ எனும்போது (8.14) ஆம் சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்தை ஈருறுப்புக்கோவையை பயன்படுத்தி விரிவாக்கி

$$g(h)=\frac{GM_{\text{ப}}}{R_{\text{ப}}^2\left(1+\frac{h}{R_{\text{ப}}}\right)^2}=g\left(1+\frac{h}{R_{\text{ப}}}\right)^{-2}$$

$$g(h)\cong g\left(1-\frac{2h}{R_{\text{ப}}}\right) \qquad (8.15)$$

என்று பெறுகிறோம். உயரம் (h) மாறும்போது gஇன் மதிப்பு $(1-2h/R_{\text{ப}})$ என்ற காரணியால் மாறுவதை (8.15)ஆம் சமன்பாடு உரைக்கிறது.





படம் 8.8 (அ) h என்ற உயரத்திலிருந்து புள்ளிநிறை m உணரும் முடுக்கம் $F(h)/m\equiv g(h)$. (ஆ) d என்ற ஆழத்தில் g. இந்த வேற்றுவத்தில் $(R_{\text{ப}}-d)$ என்ற சிறிய ஆரமுள்ள கோளமே gக்கு பங்களிக்கிறது.

புவியின் பரப்புக்குக்கீழ் d ஆழத்திலுள்ள ஒரு புள்ளிநிறையான m ஐ கருதுக. படம் 8.8 (ஆ)வில் காட்டியபடி புவியின் மையத்திலிருந்து அதன் தொலைவு $(R_{\text{ப}}-d)$. புவியை $(R_{\text{ப}}-d)$ ஆரமுள்ள ஒரு சிறிய கோளமும் d தடிமனுள்ள ஒரு ஓடும் சேர்ந்ததாக கருதலாம். தடிமன் d உள்ள வெளிப்புற ஓட்டினால் m மீது செயலாற்றும் விசை சுழியமாவதை முந்தைய பிரிவில் கண்டோம். சிறிய $(R_{\text{ப}}-d)$ ஆரமுள்ள கோளத்தின் விசை அதன் மொத்த நிறையும் கோளத்தின் மையத்தில் செறிந்திருப்பதுபோல் செயலாற்றுகிறது. சிறிய கோளத்தின் நிறை M_s எனில்,

$$\frac{M_S}{M_{\text{ப}}}=\frac{(R_{\text{ப}}-d)^3}{R_{\text{ப}}^3} \qquad (8.16)$$

இங்கு, கோளத்தின் பருமனும், அதனால் நிறையும், ஆரத்தின் மும்மடிக்கு நேர்விழுக்கா டானவை என்பதை பயன்படுத்தினோம்.

இதனால், புள்ளிநிறையில் விசை

$$F(d)=\frac{G\,M_s m}{(R_{\text{ப}}-d)^2} \qquad (8.17)$$

இதில் M_Sஇன் மதிப்பை இட்டு

$$F(d)=G\,M_{\text{ப}}\,m\frac{(R_{\text{ப}}-d)}{R_{\text{ப}}^3} \qquad (8.18)$$

என்று பெறுகிறோம். எனவே d எனும் ஆழத்தில் நிறையீர்ப்பின் முடுக்கத்தின் மதிப்பு

$$g(d)=\frac{F(d)}{m}=\frac{GM_{\text{ப}}}{R_{\text{ப}}^3}(R_{\text{ப}}-d)$$

$$=\frac{g(R_{\text{ப}}-d)}{R_{\text{ப}}}=g\left(1-\frac{d}{R_{\text{ப}}}\right) \qquad (8.19)$$

அதாவது, புவியில் ஆழமாக செல்ல செல்ல நிறையீர்ப்பின் முடுக்கம் $\left(1-{}^{d}/_{R_{\text{ப}}}\right)$ என்ற விழுக்காட்டில் குறைகிறது. பூவியீர்ப்புமுடுக்கம் பரப்பில் பெருமமாயிருந்து மேலோ கீழோ

செல்லச்செல்ல குறைகிறது என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

8.7 நிறையீர்ப்பின் இயன்மவாற்றல்

இயன்மவாற்றல் என்பது ஒரு பொருள் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் இருக்கிறபோது அதில் அடங்கியிருக்கும் ஆற்றல் என நாம் முன்பு உரைத்தோம். ஒரு பொருளின்மீது செயலாற்றும் விசைகளால் அதன் இருப்பிடம் மாறும்போது அதன் இயன்மவாற்றலில் ஏற்படும் மாற்றம் அதன்மீது செயல்படும் விசை பொருளின்மீது செய்யும் வேலைக்கு சமம். ஒரு விசை செய்யும் வேலை அதன் பாதையை சாராமல் இருந்தால் அது பாதைசாராவிசை என வழங்குகிறது.

நிறையீர்ப்புவிசை ஒரு பாதைசாராவிசை. ஒரு பொருளில் இவ்விசையிலிருந்து எழும் இயன்மவாற்றலை நாம் கணக்கிடலாம். அவ்வாற்றலை நிறையீர்ப்பின் இயன்மவாற்றல் என அழைக்கிறோம். புவியின் பரப்புக்கருகில் புவியின் ஆரத்தைவிட சிறிய தொலைவான உயரங்களிலுள்ள புள்ளிகளை கருதுவோம். இதுபோன்ற சூழமைவுகளில், நிறையீர்ப்புவிசை நடைமுறையில் mgக்கு சமமான ஒரு மாறிலியாகவும் புவியின் மையத்தை நோக்கியும் உள்ளது. புவியின் பரப்பிலிருந்து h_1 உயரத்தில் ஒரு புள்ளியையும் அதற்கு மேல் செங்குத்தாக h_2 என்ற உயரத்தில் மற்றொரு புள்ளியையும் நாம் கருதினால், m என்ற நிறையை முதல் புள்ளியிலிருந்து இரண்டாவது புள்ளிக்கு உயர்த்த தேவைப்படும் வேலையை W_{12} என்று குறிக்கிறோம்.

$$W_{12} = \text{விசை} \times \text{இடப்பெயர்ச்சி}$$
$$= mg(h_2 - h_1) \qquad (8.20)$$

தரையிலிருந்து h என்ற உயரத்தில் இயன்மவாற்றலை

$$V(h) = mgh + V_0 \qquad (8.21)$$

என்று, V_0 ஒரு மாறிலியாயிருக்குமாறு எழுதினால்

$$W_{12} = V(h_2) - V(h_1) \qquad (8.22)$$

என்பது தெளிவு. ஆகவே, துகளை நகர்த்துவதில் செய்யப்படும் வேலை அதன் இறுதிநிலைக்கும் தொடக்கநிலைக்குமிடையான இயன்மவாற்ற லின் வேறுபாடு ஆகிறது. (8.22)ஆம் சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலியான V_0 நீங்குகிறது. புவியின் பரப்பிலுள்ள புள்ளிக்கு $h = 0$ எனும்போது $V(h = 0) = V_0$ என்ற சமன்பாட்டை பெறுகிறோம். எனவே, V_0 புவியின் பரப்பிலுள்ள இயன்மவாற்றல்.

புவியின் பரப்பிலிருந்து குறிப்பிலா தொலைவுகளிலுள்ள புள்ளிகளை கருதினால், மேற்கண்ட முடிவு செல்லுபடியாகாது; ஏனெனில், நிறையீர்ப்புவிசை mg என்ற ஒரு மாறிலி என்பது சரியில்லை. இருப்பினும், மேற்கண்ட உரையிலிருந்து, புவிக்கு வெளியில் ஒரு புள்ளியிலுள்ள துகள்மீது புவியின் மையத்தைநோக்கி செயலாற்றும் நிறையீர்ப்புவிசை

$$F = \frac{GM_{\text{பு}} m}{r^2} \qquad (8.23)$$

என்பதை நாமறிவோம்; இங்கு $M_{\text{பு}}$ புவியின் நிறை, m துகளின் நிறை, r புவியின் மையத்திலிருந்து துகளின் தொலைவு. இப்போது, $r = r_1$ என்ற புள்ளியிலிருந்து செங்குத்தான பாதையில் $r = r_2$ என்ற புள்ளிக்கு $(r_2 > r_1)$ ஒரு துகளை நகர்த்த தேவையான வேலை

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{G\, M_{\text{பு}}\, m}{r^2} dr = -G\, M_{\text{பு}}\, m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) (8.24)$$

இது (8.20)ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து வேறுபடுகிறது. ஆனால், (8.21)ஆம் சமன்பாட்டுக்குப் பதிலாக, r எனும் தொலைவில்

$$V(r) = -\frac{GM_{\text{பு}} m}{r} + V_1 \qquad (8.25)$$

என்பது $r > R_{\text{பு}}$ க்கு சரியாகும்படி $V(r)$ ஐ எழுதலாம். இதனால், $W_{12} = V(r_2) - V(r_1)$ என்பதை மீண்டும் பெறுகிறோம். இதில் $r =$ முடிவிலி என இட்டால், $V\,(r\, = \text{முடிவிலி}) = V_1$ என்பது கிடைக்கிறது. இவ்வாறு V_1 முடிவிலியிலுள்ள இயன்மவாற்றல் என்றாகிறது. இரண்டு புள்ளிகளிடையான இயன்மவாற்றலின் வேறுபாடு என்பதற்கு (8.22), (8.24) ஆகிய சமன்பாடுகள் ஒரு திட்டவட்டமான பொருளை தருகின்றன. நம் வசதிக்காக, V_1ஐ சுழியமாக வைத்தால், ஒரு புள்ளியில் இயன்மவாற்றல் ஒரு துகளை முடிவிலியிலிருந்து அந்த புள்ளிக்கு இடமாற்றுவதற்கான வேலையின் அளவு என்று பொருளாகிறது.

ஒரு துகள்மீது புவியின் நிறையீர்ப்பு விசைகளாலான இயன்மவாற்றலை நாம் கணக்கிட்டுள்ளோம். இது துகளின் நிறைக்கு நேர்விழுக்காட்டில் உள்ளது.

பொதுவாக, rதொலைவிலுள்ள m_1, m_2 என்ற இரண்டு நிறைகளின் இயன்மவாற்றலை

$$V(r) = \frac{Gm_1 m_2}{r}$$

என்று வரையறுக்கிறோம். இங்கு, $r - \infty$ என்ற எல்லையில் $V = 0$ என்று தேர்ந்திருக்கிறோம்.

மேலும், ஒரு நிறையின் நிறையீர்ப்பால் ஏற்படும் இயன்மம் என்ற கருத்துரு புவிபோன்ற பெருநிறைகளுக்கு பயனுள்ளது. m என்ற நிறையிலிருந்து r தொலைவில் வைத்த ஓரலகு நிறையின் இயன்மவாற்றலை அந்த இடத்தில் mஇன் நிறையீர்ப்பியன்மம் என்றழைத்து $U(r)$ என்று குறிக்கிறோம். அதாவது,

$$U(r) = \frac{Gm}{r}$$

என்று வரையறுக்கிறோம்.

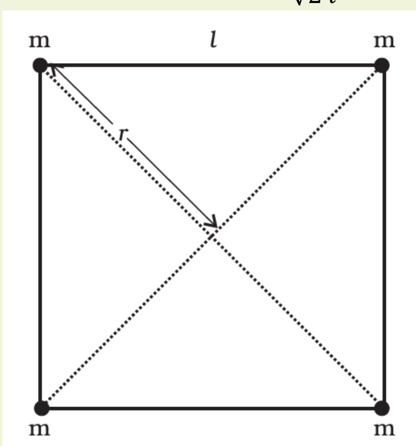
ஒரு தனித்த துகளமைப்பின் மொத்த இயன்மவாற்றல் அதன் சாத்தியமான அனைத்து

துகட்சோடிகளின் (மேற்கண்ட சமன்பாடு தரும்) ஆற்றல்களின் கூட்டுத்தொகைக்கு சமம். இது மேலமைவுக்கொள்கை பயனாதலுக்கு ஒரு சான்று.

சிக்கல் 8.3 lபக்க அளவுள்ள ஒரு சதுரத்தின் நான்கு மூலைகளில் வைக்கப்பட்டுள்ள துகள்களின் அமைப்பின் இயன்மவாற்றலை காண்க. மேலும், சதுரத்தின் மையத்திலுள்ள இயன்மத்தை காண்க.

தீர்வு lஅளவுடைய ஒரு சதுரத்தின் நான்கு மூலைகளில் வைக்கப்பட்டுள்ள துகள்களின் நிறைகள் ஒவ்வொன்றும் m என்க. படம் 8.9ஐ காண்க. நான்கு நிறைச்சோடிகள் l என்ற தொலைவிலும் இரண்டு சோடிகள் மூலைவிட்டத்தொலைவிலும் உள்ளன . ஆகவே,

$$V = -4\frac{G\,m^2}{l} - 2\frac{G\,m^2}{\sqrt{2}\,l}$$



படம் 8.9

சதுரத்தின் மையத்தில் $\left(r = \sqrt{2}l/_{2}\right)$ நிறையீர்ப்பின் இயன்மம்

$$U = -4\sqrt{2}\frac{Gm}{l}$$

அதாவது, அவ்விடத்தில் வைத்த ஒரலகு நிறை இந்த ஆற்றலை உணரும்.

8.8 விடுபடுதிசைவேகம்

ஒரு கல்லை மேனோக்கி வீசினால், அது மீண்டும் புவியில் விழுகிறது. எந்திரங்களை பயன்படுத்தி ஒரு பொருளை அதிக தொடக்க வேகத்துடன் ஏவவும் அது அதிக உயரங்களை அடையுமாறு செய்யவும் இயலும். நம் மனங்களில் இயல்பாக எழும் ஒரு வினா "ஒரு பொருள் புவிக்குத்திரும்பாத வகையில் அதிக தொடக்க வேகத்துடன் ஒரு பொருளை எறியவியலுமா?" என்பது.

இந்த வினாவுக்கு விடையளிக்க ஆற்றலின் அழியாக்காப்புக்கொள்கை உதவுகிறது. ஒரு பொருள் முடிவிலியை அடைந்ததாக கொள்வோம். அப்போது அதன் வேகம் v_f என்க. ஒரு பொருளின் ஆற்றல் இயன்மவாற்றலும் இயக்கவாற்றலும் சேர்ந்த கூட்டுத்தொகை. V_1 முடிவிலியில் பொருளின் நிறையீர்ப்பினாலான இயன்மவாற்றலை குறிக்கிறது. முடிவிலியில் எறிபொருளின் மொத்த ஆற்றல்

$$E(\infty) = V_1 + \frac{mv_f^2}{2} \qquad (8.26)$$

புவியின் மையத்திலிருந்து $h + R_{\text{ப}}$ தொலைவிலுள்ள ($R_{\text{ப}} =$ புவியின் ஆரம்) ஒரு புள்ளியிலிருந்து v_t என்ற தொடக்கவேகத்துடன் பொருள் வீசப்பட்டால், அதன் தொடக்க ஆற்றல்

$$E\left(h + R_{\text{ப}}\right) = \frac{1}{2}mv_t^2 - \frac{GmM_{\text{ப}}}{h + R_{\text{ப}}} + V_1 \qquad (8.27)$$

ஆற்றலின் அழியாக்காப்பின்படி, (8.26)ஆம் சமன்பாடும் (8.27) ஆம் சமன்பாடும் சமமாக வேண்டும். எனவே

$$\frac{mv_t^2}{2} - \frac{GmM_{\text{ப}}}{h + R_{\text{ப}}} = \frac{mv_f^2}{2} \qquad (8.28)$$

வலப்பக்கம் எதிர்மமாக இயலாதாகையால், இடப்பக்கமும் அவ்வாறே ஆகவேண்டும். ஆகவே, V_i

$$\frac{mv_t^2}{2} - \frac{GmM_{\text{ப}}}{h + R_E} \geq 0 \qquad (8.29)$$

என்றவாறு இருந்தால், ஒரு பொருள் முடிவிலியை அடையவியலும் (8.29) ஆம் சமன்பாட்டில் சமக்குறி இருக்கிறதுபோது v_tயின் மீச்சிறும மதிப்பு கிடைக்கிறது. இவ்வாறு, முடிவிலியை அடைய (அதாவது புவியிலிருந்து தப்பிக்க) ஒரு பொருளுக்குத்தேவையான மீச்சிறும வேகம்

$$\frac{1}{2}m(v_t^2)_{\text{மீச்சிறு}} = \frac{GmM_{\text{ப}}}{h + R_{\text{ப}}} \qquad (8.30)$$

ஒரு பொருள் புவியின் பரப்பிலிருந்து ($h = 0$) மேலே எறியப்படும் போது

$$(v_t)_{\text{மீச்சிறு}} = \sqrt{\frac{2GM_{\text{ப}}}{R_{\text{ப}}}} \qquad (8.31)$$

என்றும், $g = GM_{\text{ப}}/R_{\text{ப}}^2$ என்ற சமன்பாட்டை பயன்படுத்தி

$$(v_t)_{\text{மீச்சிறு}} = \sqrt{2gR_{\text{ப}}} \qquad (8.32)$$

என்றும் காண்கிறோம். G, $R_{\text{ப}}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை பயன்படுத்தும்போது $(v_t)_{\text{மீச்சிறு}} \approx 11.2$ கிமீ/நொ. இதை விடுபட்டு வேகம் என்றோ சில நேரங்களில் விடுபடு திசைவேகம் என்றோ அழைக்கிறோம்.

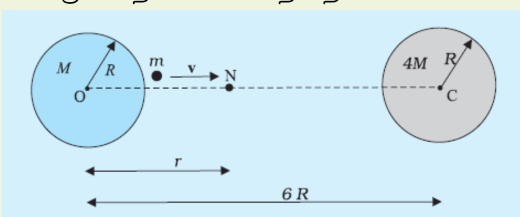
நிலாவின் பரப்பிலிருந்து எறியப்படும் பொருளுக்கும் (8.32) ஆம் சமன்பாட்டை பயன் படுத்தலாம்; இங்கு gயினிடத்தில் நிலாவின் நிறையீர்ப்புமுடுக்கத்தையும். $R_{\text{ப}}$வினிடத்தில் நிலாவின் ஆரத்தையும் வைக்கவேண்டும். நிலாவின் நிறையீர்ப்புமுடுக்கமும் நிலாவின் ஆரமும் புவியை விட சிறியவை. நிலாவின்

விடுபடுவேகம் வினாடிக்கு 2.3 km. இது புவியின் விடுபடுவேகத்தை விட ஐந்து மடங்கு சிறியது. நிலாவில் வளிமண்டலம் இல்லாததற்கு இதுவே காரணம். நிலாவில் வளிமமூலக்கூறுகள் உருவானால் அவை நிலாவின் விடுபடு வேகத்தைவிட அதிகமாகும்போது அதன் நிறையீர்ப்பு விசையிலிருந்து தப்பித்துவிடுவன.

சிக்கல் 8.4

R என்ற சம ஆரமும் M, $4M$ நிறைகளுமுள்ள இரண்டு சீரான திண்மக்கோளங்கள் மையத்துக்கு மையமான $6R$ தொலைவில், படம் 8.10இல் காட்டியபடி, நிலையாக உள்ளன.

m நிறையுள்ள ஒரு எறிவம் M நிறையுள்ள கோளத்தின் பரப்பிலிருந்து நேரடியாக இரண்டாவது கோளத்தின் மையத்தை நோக்கி ஏவப்படுகிறது. இரண்டாவது கோளத்தின் பரப்பை அடைய எறிவத்துக்கு தேவைப்படும் மீச்சிறும தொடக்கவேகத்தை காண்க.



படம் 8.10

தீர்வு

எறிவத்தின்மீது இரு கோளங்கள் ஒன்றுக்கொன்று எதிரான நிறையீர்ப்பு விசைகளை செலுத்துகின்றன. அவ்விரு விசைகள் ஒன்றையொன்று ஈடுசெய்யும் நடுவப்புள்ளியை N (படம் 8.10) என குறிப்போம்.

$ON = r$ எனில்

$$\frac{G\,M\,m}{r^2} = \frac{4\,G\,M\,m}{(6R-r)^2}$$

$$(6R-r)^2 = 4\,r^2$$

$$6R - r = \pm 2r$$

$$r = 2R, -6R$$

$r = -6R$ என்ற புள்ளி இந்த சிக்கலில் நமக்கு தேவையில்லை. இவ்வாறு $ON = r = 2R$. துகள் N என்ற நடுவப்புள்ளியை அடையும்படியான ஒரு திசைவேகத்துடன் அதனை ஏவுவது போதுமானது. அதன்பின் $4M$ நிறையுள்ள கோளின் நிறையீர்ப்புவிசை அதனை இழுத்துக்கொள்ளும். M நிறையுள்ள கோளின் பரப்பில் எந்திரவிய ஆற்றல் (தொடக்க ஆற்றல்)

$$E_t = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{G\,M\,m}{R} - \frac{4\,G\,M\,m}{5\,R}$$

N என்ற புள்ளியில் எறிவத்தின் வேகம் சுழியமாகிறது. எனவே, அங்கு எந்திரவிய ஆற்றல் முற்றிலும் இயன்மவாற்றல்.

$$E_N = -\frac{G\,M\,m}{2R} - \frac{4\,G\,M\,m}{4R}$$

எந்திர ஆற்றலின் அழியாக்காப்புக்கொள்கை யிலிருந்து, $E_t = E_N$, அதாவது

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{R} - \frac{4GM}{5R} = \frac{GM}{2R} - \frac{GM}{R};$$

$$v^2 = \frac{2GM}{R}\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right); \quad v = \left(\frac{3GM}{5R}\right)^{\frac{1}{2}}$$

இங்கு கவனிக்கவேண்டிய ஒன்று என்னவென்றால், நடுவப்புள்ளியில் எறிவத்தின் வேகம் சுழியமெனினும், அது அதிக நிறையுள்ள $4M$ கோளத்தில் விழும்போது வேகம் சுழியமாக இருக்காது. இந்த வேகத்தை கணக்கிட்டுக் காண்பதை மாணவர்களுக்கு பயிற்சியாக விடுகிறோம்.

8.9 புவியின் துணைக்கோள்கள்

புவித்துணைக்கோள்கள் புவியைச்சுற்றி வரும் பொருள்கள். இவற்றின் இயக்கம் கதிரவ னைச்சுற்றி வரும் கோள்களின் இயக்கத்தோடு ஒத்திருக்கிறது. எனவே கெப்பிளர் வரையறுத்த கோள்களின் இயக்கவிதிகள் இவற்றுக்கும் பொருந்துகின்றன. குறிப்பாக, இவற்றின் சுற்றுப் பாதைகள் புவியைச்சுற்றி வட்டமாகவோ நீள்வட்டமாகவோ உள்ளன. நிலா புவியின் ஒரே இயற்கைத்துணைக்கோள். நிலா 27.3 நாட்களான சீரொழுங்குநேரத்துடன் கிட்டத்தட்ட வட்டமான சுற்றுப்பாதையில் புவியை சுற்றி வருகிறது. இது தோராயமாக நிலா தன் சொந்த அச்சைப்பற்றி சுழலும் காலத்திற்கு சமம். 1957 முதல், தொழினுட்ப முன்னேற்றத்தின் விளைவாக இந்தியா உட்பட்ட பல்வேறு நாடுகள் தொலைத்தகவற் றொடர்பு, புவியியற்பியல், வானிலையியல் போன்ற துறைகளில் நடைமுறைப்பயன்பாட்டுக்கான துணைக் கோள்களை ஏவிவருகின்றன.

புவியின் மையத்திலிருந்து $(R_{பு} + h)$ தொலைவில் வட்டச்சுற்றுப்பாதையிலுள்ள ஒரு துணைக்கோளை கருதுவோம்; இங்கு $R_{பு}$ புவியின் ஆரம். துணைக் கோளின் நிறை M என்றும், அதன் வேகம் v என்றும் கொண்டால். சுற்றுப்பாதைக்குத் தேவையான மையநோக்கு விசை

$$F(\text{மையநோக்கு}) = \frac{mv^2}{R_{பு} + h} \qquad (8.33)$$

இந்த மையநோக்குவிசையை

$$F(\text{நிறையீர்ப்பு}) = \frac{GmM_{பு}}{(R_{பு} + h)^2} \qquad (8.34)$$

என்ற புவியீர்ப்புவிசை சமனமாக்குகிறது. இங்கு $M_{பு}$ புவியின் நிறை. இரண்டு விசைகளையும் சமமாக்கி mஐ நீக்கிவிட்டு

$$v^2 = \frac{GM_{பு}}{R_{பு} + h} \qquad (8.35)$$

என்பதை பெறுகிறோம். இவ்வாறு, h அதிகரிக்கும்போது v குறைகிறது. (8.35) ஆம் சமன்பாட்டில் $h = 0$ எனும்போது வேகம்

$$v^2(h=0) = \frac{GM}{R_{பு}} = gR_{பு} \qquad (8.36)$$

என்றாகிறது. இங்கு $g = GM/R_{பு}^2$ என்ற தொடர்பை பயன்படுத்தினோம். ஒவ்வொரு சுற்றிலும் துணைக்கோள் $2\pi(R_{பு}+h)$ என்ற தொலைவை v என்ற வேகத்தில் கடக்கிறது. ஆகவே, (8.35) ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து v இன் மதிப்பை இட்டு, துணைக்கோளின் சீரொழுங்குநேரத்தை

$$T = \frac{2\pi\left(R_{பு}+h\right)}{v} = \frac{2\pi\left(R_{பு}+h\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM_{பு}}} \qquad (8.37)$$

என்று காண்கிறோம். (8.37) ஆம் சமன்பாட்டின் இருபக்கமும் வர்க்கமாக்கும்போது

$$T^2 = k\left(R_{பு}+h\right)^3, \qquad \text{இங்கு } k = \frac{4\pi^2}{GM_{பு}} \qquad (8.38)$$

இது கெப்பிளரின் சீரொழுங்குநேரவிதியை புவியைச்சுற்றியுள்ள துணைக்கோள்களின் இயக்கங்கள் பின்பற்றுவதை காட்டுகிறது. புவியின் பரப்புக்கு மிக அருகிலுள்ள துணைக்கோளுக்கு, (8.38)ஆம் சமன்பாட்டில் $R_{பு}$இன் ஒப்பீட்டில் hஐ புறக்கணிக்கலாம். எனவே, அத்தகைய துணைக் கோள்களுக்கான T

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R_{பு}}{g}} \qquad (8.39)$$

எண் மதிப்புகளை $g = 9.8\, m.s^{-2}$, $R_{பு} =$ 6400 கி.மீ என்று சமன்பாட்டில் மாற்றிட,

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{6.4\times10^6}{9.8}}\ s$$

இது தோராயமாக 85 நிமிடங்கள்.

சிக்கல் 8.5

செவ்வாய்க்கோளுக்கு போபசு, தெய்மாசு என்ற இரண்டு துணைக்கோள்கள் உள்ளன.

(i) போபசின் சுற்றுப்பாதையின் ஆரம் 9.4×10^3 கி.மீ.; அதன் சீரொழுங்குநேரம் 7 மணி, 39 நிமிடங்கள். செவ்வாய்க்கோளின் நிறையை கணக்கிடுக.

(ii) புவியும் செவ்வாயும் கதிரவனைச்சுற்றி வட்டமான சுற்றுப்பாதைகளில் அசைவதாக கருதுக. செவ்வாயின் சுற்றுப்பாதை ஆரத்தில் புவியின் சுற்றுப்பாதையைப்போல் 1.52 மடங்கானது எனில் ஒரு செவ்வாயாண்டில் எத்தனை நாட்கள் உள்ளன?

தீர்வு

(அ) (8.38) ஆம் சமன்பாட்டில் புவியின் நிறை இருக்குமிடத்தில் செவ்வாயின் நிறையான $M_{செ}$ஐ பயன்படுத்துவோம்.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{செ}}R_{செ}^3$$

$$M_{செ} = \frac{4\pi^2}{G}\frac{R_{செ}^3}{T^2}$$

$$= \frac{4\times(3.14)^2\times(9.4\times10^6\, m)^3}{6.67\times10^{-11}\, kg^{-1}\, m^3\, s^{-2}\times(459\times60\, s)^2}$$

$$= \frac{4\times3.14^2\times9.4^3}{6.67\times4.59^2\times6^2}\times10^{23}\, kg$$

$$= 6.48\times10^{23}\, kg$$

(ஆ) கெப்பிளரின் மூன்றாம் விதியின்படி

$$\frac{T_{செ}^2}{T_{பு}^2} = \frac{R_{செக}^3}{R_{புக}^3}$$

இங்கு $R_{செக}$ கதிரவன்செவ்வாயிடைத் தொலைவையும் $R_{புக}$ கதிரவன்புவியிடைத் தொலைவையும் குறிக்கின்றன.

$$T_{செ} = (1.52)^{\frac{3}{2}}\times365 \text{ நாள்} = 684 \text{ நாள்.}$$

புதன், செவ்வாய், தூரியன் ஆகியவற்றைத்தவிர மற்றெல்லாக்கோள்களின் சுற்றுப் பாதைகளும் மிகவும் கிட்டத்தட்ட வட்டமாக இருக்கின்றன என்பதை நாம் கவனிக்கிறோம். சான்றாக, புவிக்கு நெட்டச்சுக்கும் குற்றச்சுக்குமுள்ள விகிதம் $b/a = 0.99986$.

சிக்கல் 8.6

புவியை எடைபோடலாம் வாருங்கள்! நாமறிந்த தரவுகள் $g = 9.81\, m.s^{-2}$, $R_{பு} = 6.37\times10^6\, m$, நிலாவின் தொலைவு $R = 3.84\times10^8\, m$, நிலாவின் சீரொழுங்குநேரம் 27.3 நாட்கள். புவியின் நிறையை இரண்டு வெவ்வேறு வழிகளில் பெறுக.

தீர்வு

(8.12)ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$M_{பு} = \frac{gR_{பு}^2}{G} = \frac{9.81\times(6.37\times10^6)^2}{6.67\times10^{11}}\, kg$$

$$= 5.97\times10^{24}\, kg$$

நிலா புவியின் துணைக்கோள். கெப்பிளரின் மூன்றாவது விதியின் வருவித்தலிலிருந்து ((8.38)ஆம் சமன்பாடு)

$$T^2 = \frac{4\pi^2R_{பு}^3}{GM_{பு}}$$

$$M_{பு} = \frac{4\pi^2R_{பு}^3}{GT^2}$$

$$= \frac{4\times3.14^2\times3.84^3\times10^{24}}{6.67\times10^{-11}\times(27.3\times24\times60\times60)^2}$$

$$= 6.02\times10^{24}\, kg$$

இரண்டு முறைகளும் கிட்டத்தட்ட ஒரே விடையை தருகின்றன, அவற்றுக்கிடையான வேறுபாடு 1%க்கும் குறைவு.

சிக்கல் 8.7

(8.38) ஆம் சமன்பாட்டிலுள்ள k என்ற மாறிலியை நாளிலும் கிலோமீட்டரிலும் எழுதுக. $k = 10^{-13}\ s^2.m^{-3}$ என்பதும் புவியிலிருந்து நிலா $3.84\times 10^5\ km$ தொலைவிலுள்ளது என்பதுமான தரவுகளிலிருந்து அதன் சீரொழுங்குநேரத்தை நாள்களில் கணிக்க.

தீர்வு

$$k = 10^{-13}\ s^2.m^{-3}$$
$$= 10^{-13}\left(\frac{1}{(24\times 60\times 60)^2}d^2\right)(10^{-3}\ km)^{-3}$$
$$= 1.33\times 10^{-14}\ d^2.km^{-3}$$

(8.38) ஆம் சமன்பாட்டையும் k இன் மதிப்பையும் பயன்படுத்தி நிலாவின் சீரொழுங்குநேரத்தை கணக்கிடுகிறோம்.

$$T^2 = (1.33\times 10^{-14})(3.84\times 10^5)^3\ d^2$$
$$T = 27.3\ d$$

(8.38) ஆம் சமன்பாடு நீள்வட்டச்சுற்றுப் பாதைக்கும் பொருந்துகிறது. இதைக்காண, $(R_{பு}+h)$ என்பதனிடத்தில் நீள்வட்டத்தின் அரை நெட்டச்சை வைக்கிறோம். புவி இந்த நீள்வட்டத்தின் ஒரு குவியத்தில் இருக்கிறது.

8.10 சுற்றிவரும் செயற்கைக்கோளின் ஆற்றல்

(8.35)ஆம் சமன்பாட்டால் வட்டப்பாதையில் v எனும் திசைவேகத்தில் உள்ள செயற்கைக் கோளின் இயக்கவாற்றலை கணக்கிடலாம்.

$$\text{இகவா} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM_{பு}}{2(R_{பு}+h)} \qquad (8.40)$$

நிறையீர்ப்பின் இயன்மவாற்றலை முடிவிலியில் சுழியமாக கருதினால், புவியின் மையத்திலிருந்து $(R+h)$ தொலைவில் இயன்மவாற்றல்

$$\text{இயவா} = -\frac{GmM_{பு}}{R_{பு}+h} \qquad (8.41)$$

இங்கு இயக்கவாற்றல் நேர்மமாகவும் இயன்மவாற்றல் எதிர்மமாகவும் உள்ளன. எனினும் இயக்கவாற்றலின் மீப்பெரும மதிப்பு இயன்மவாற்றலின் மீப்பெரும மதிப்பில் பாதி அளவானது. மொத்த ஆற்றல் பின்வருமாறு.

$$\text{மொவா} = E = \text{இகயா} + \text{இயவா} = -\frac{GmM_{பு}}{2(R_{பு}+h)} \qquad (8.42)$$

வட்டத்தில் சுற்றும் துணைக்கோளின் மொத்த ஆற்றல் எதிர்மமாக இருப்பதன் காரணம் இயன்மவாற்றல் எதிர்மமாகவும் இயக்கவாற்றலைவிட இரு மடங்காகவும் இருப்பதே.

ஒரு துணைக்கோளின் சுற்றுப்பாதை நீள்வட்டமாக உள்ளபோது இயன்மவாற்றலும் இயக்கவாற்றலும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் மாறுபடு கின்றன. இங்கும் வட்டப்பாதையில் போலவே மாறிலியான மொத்த ஆற்றல் எதிர்மமாகவே இருக்கிறது. இதுவே நாம் எதிர்பார்ப்பது; ஏனெனில் மொத்த ஆற்றல் நேர்மமாகவோ சுழியமாகவோ இருந்தால் சுற்றிவரும் பொருள் முடிவிலிக்கு தப்பிச்சென்று விடும். துணைக்கோள்கள் எப்போதும் புவியிலிருந்து குறிப்பிட்ட தொலைவுகளில் இருப்பதால், அவற்றின் ஆற்றல்கள் நேர்மமாகவோ சுழியமாகவோ இருக்கவியலாது.

சிக்கல் 8.8

400 கிலோகிராம் நிறையுடைய துணைக்கோள் புவியைச்சுற்றி $2R_{பு}$ ஆரமுள்ள வட்டச்சுற்றுப்பாதையில் சுற்றிவருகிறது. அதை $4\ R_{பு}$ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டச்சுற்றுப் பாதைக்கு மாற்ற எவ்வளவு ஆற்றல் தேவை? இயன்மவாற்றலிலும் இயக்கவாற்றலிலுல் என்னென்ன மாற்றங்கள் நிகழும்?

தீர்வு

தொடக்கத்தில்

$$E_i = -\frac{GM_{பு}\,m}{4R_{பு}}$$

இறுதியில்

$$E_f = -\frac{GM_{பு}\,m}{8R_{பு}}$$

மொத்த ஆற்றலில் மாற்றம்

$$\Delta E = F_f - E_i = \frac{GM_{பு}m}{8R_{பு}} = \left(\frac{GM_{பு}}{R_{பு}^2}\right)\frac{mR_{பு}}{8}$$
$$= \frac{gmR_{பு}}{8}$$
$$= \frac{9.81\times 400\times 6.37\times 10^6}{8}\ J$$
$$= 3.13\times 10^9\ J$$

இயக்கவாற்றல் மொத்த ஆற்றல் அதிகரித்த அதே அளவில் குறைகிறது; அதாவது,

$$\Delta K = K_f - K_i = -3.13\times 10^9\ J$$

இயன்மவாற்றல் மொத்த ஆற்றலின் மாற்றத்தைப்போல் இரண்டு மடங்கு அதிகரிக்கிறது; அதாவது

$$\Delta V = V_f - V_i = -6.25\times 10^9\ J$$

8.11 புவிக்கிடப்பான துணைக்கோள்களும் முனையத்துணைக்கோள்களும்

(8.37) ஆம் சமன்பாட்டிலுள்ள T ஐ 24 மணி நேரமாகும்படி $(R_{பு}+h)$ இன் மதிப்பை அமைத்தால் ஒரு ஆர்வமான நிகழ்வு எழுகிறது. துணைக்கோளின் வட்டச்சுற்றுப்பாதை புவியின் நடுக்கோட்டுத் தளத்தில் இருந்தால், அத்தகைய துணைக்கோளின் சீரொழுங்குநேரம் புவி தன் அச்சில் திரும்பும் சீரொழுங்குநேரத்துடன் ஒத்திருப்பதால், புவியின் ஓரிடத்திலிருந்து அதை பார்க்கும்போது அது கிடப்புநிலையில் தோன்றுகிறது; அதாவது நகராமலிருப்பதாக

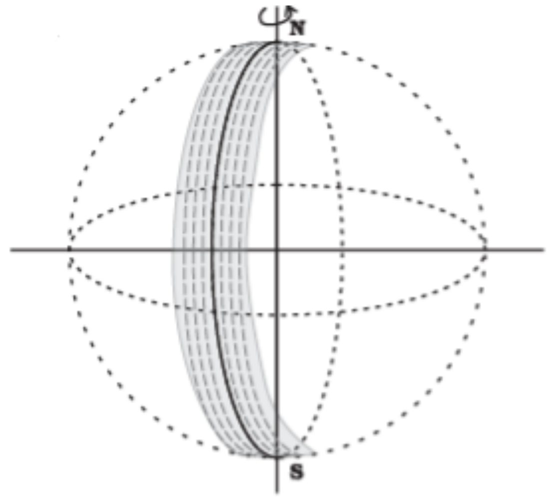
தோன்றுகிறது. இந்த நோக்கத்துடன் $(R_{ப} + h)$ என்ற தொலைவை கணக்கிடும்போது அது $R_{ப}$ இன் ஒப்பளவில் பெரியதாக இருப்பதை காண்கிறோம்.

$$R_{ப} + h = \left(\frac{T^2 G M_{ப}}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (8.43)$$

என்ற சமன்பாட்டில், $T = 24$ மணியெனில், $h = 35800$ கி.மீ என ஆகிறது. இது $R_{ப}$ ஐவிட மிகப்பெரியது. புவிநடுக்கோட்டின்மேல் $T = 24$ மணிநேரமுடைய வட்டச்சுற்றுப்பாதைகளி லுள்ள துணைக்கோள்களை புவிக்கிடப்புத் துணைக்கோள்கள் என்று அழைக்கிறோம். இத்தகைய துணைக்கோள்களை ஏவ மிகவும் திறன்வாய்ந்த ஏவூர்திகள் தேவைப்படினும், இவை மிகுந்த பயன்களை தருகின்றன.

ஒரு குறிப்பிட்ட அலைவெண்ணுக்கு மேலான மின்காந்த அலைகளை அயனிக்கோளம் எதிரொளிப்பதில்லை என்பது நாம் அறிந்தது. வானலையகற்பரப்புக்கு பயன்படும் அலை வெண்வீச்சான $2\,MHz$ முதல் $10\,MHz$ வரையானவை இந்த உய்ய அலைவெண்ணுக்கு கீழுள்ளவை. எனவே அவற்றை அயனிக்கோளம் எதிரொளிக்கிறது. இதனால், உணர்கொடியி லிருந்து அகற்பரப்பாகும் வானலைகளை நேரடியாகப்பெறுவதை புவியின் வளைவு தடுக்கக்கூடிய தொலைவிடங்களிலும் அயனிக்கோள எதிரொளிப்பால் பெறலாம்.

மாறாக, தொலைக்காட்சியின் அகற்பரப்பி லும் மற்ற தகவற்றொடர்பிலும் பயன்படும் அலைகள் அதிக அலைவெண்ணுள்ளவை; அவற்றை பார்வைக்கோட்டுக்கு அப்பால் பெற இயலாது. எனினும் ஒரு புவிக்கிடப்புத்துணைக் கோள் புவிக்குமேல் நிலையானதாக தோன்றுவ தால் அந்நிலையம் இந்த சமிக்கைகளைப்பெற்று, புவியில் ஒரு பரந்த பகுதிக்கு அவற்றை மீண்டும் அகற்பரப்பலாம். இந்தியா அனுப்பிய இநாது எனும் துணைக்கோள்கள் அத்தகைய புவிக்கிடப்புத் துணைக்கோள்களே. அவை இந்தியாவில் தொலை தகவற்றொடர்புக்கு பரவலாக பயன்படுகின்றன.



படம் 8.11 ஒரு முனையத்துணைக்கோள்.
புவியின் பரப்பில் (நிழலாகக்காட்டிய) ஒரு பட்டை துணைக்கோளின் ஒரு சுற்றலின்போது தெரிகிறது. துணைக்கோளின் அடுத்த சுற்றலுக்குள் புவி தன் அச்சில் சற்று சுழன்றிருப்பதால் அடுத்த பட்டை தெரிகிறது.

மற்றொரு வகையான துணைக்கோள்கள் முனையத்துணைக்கோள்கள் (படம் 8.11). இவை குறைந்த உயரத்திலுள்ள (500முதல் 800 கிமீ வரை) துணைக்கோள்கள்; ஆனால் அவை புவியின் முனைகளின்வழி வடக்குத்தெற்காக செல்கின்றன. இவ்வாறான ஒரு துணைக் கோளின் சீரொழுங்குநேரம் சுமார் 100 நிமிடங்கள் என்பதால் இது புவியின் ஒரு பகுதியை ஒவ்வொரு நாளும் பல முறை கடக்கின்றது. இருப்பினும், அதன் உயரம் புவியிலிருந்து சுமார் 500-800 கிமீ இருப்பதால் அதன் படப்பதிவி ஒரு சுற்றில் புவியின் சிறிய கீற்றை மட்டுமே காண இயலும். அருகிலுள்ள கீற்றுகளை அடுத்த சுற்றில் பார்க்கிறது. இதனால் ஒரு நாள் முழுவதும் துண்டுதுண்டாக துருவ துணைக்கோள் எடுத்த ஒளிப்படங்களால் முழுப்புவியையும் பார்க்க இயலும்.

இத்தகைய முனையத்துணைக்கோள்களால் புவியின் துருவப்பகுதிகளையும் நடுக்கோட்டுப் பகுதிகளையும் நல்ல பகுதிறனுடன் நெருங்கிய தொலைவில் காணலாம். அத்தகைய துணைக் கோள்களிலிருந்து சேகரிக்கப்படும் தகவல்கள் தொலையுணர்தல், வானிலையியல், சுற்றுச்சூழலாராய்ச்சி ஆகியவற்றுக்கு மிகவும் பயனளிக்கின்றன.

இந்தியாவின் விண்வெளிப்பாய்ச்சல்

இந்தியா தனது விண்வெளித்திட்டத்தை 1962ஆம் ஆண்டில் விண்வெளியாராய்ச்சிக் கான இந்தியநாட்டுச்செயற்குழுவை அமைத்தபோது தொடங்கியது. பிறகு அது **இ**ந்திய **வி**ண்ணாராய்ச்சிக்கான ஒருங்க மைப்**பு** (இவிபு) என 1969ஆம் ஆண்டில்

மாற்றப்பட்டது. நாட்டின் வளர்ச்சியில் விண்வெளித்தொழினுட்பத்தின் பங்கையும் முக்கியத்துவத்தையும் இவிபு அடையாளங் கண்டது. விண்வெளித்தொழினுட்பத்தை பொதுமக்களின் சேவைக்கு கொண்டுவந்தது. இந்தியா தனது முதல் தாழ்சுற்றுப்பாதைத் துணைக்கோளான ஆரியபட்டாவை 1975இல் ஏவியது. அதை ஏவ பயன்பட்ட ஊர்தியை அப்போதைய சோவியத்து ஒன்றியம் வழங்கியது. இவிபு தனது உண்ணாட்டு ஏவூர்தி மூலம் 1979ஆம் ஆண்டில் உரோகிணி என்ற துணைக்கோளை ஆந்திராவின் திருவரிக் கோட்டத்திலுள்ள சதீசு தவானின் வெளிமையத்திலிருந்து ஏவியது. இந்தியாவின் விண்வெளித்திட்டம் இவிபுவை உலகின் ஆறு பெரிய விண்வெளி நிறுவனங்களுள் ஒன்றாக ஆக்கியுள்ளது. இவிபு அகற்பரப்பு, தகவற் றொடர்பு, வானிலைமுன்கணிப்புகள், பேரழிவுமேலாண்மைக்கருவிகள், புவியியத் தகவலமைப்பு, நிலப்படவியல், வழிகாணல், தொலைமருத்துவம், தொலைக்கல்வி போன்ற பயன்பாடுகளில் துணைக்கோள்களையும் மற்ற கருவிகளையும் உருவாக்கி வழங்குகிறது. இந்த பயன்பாடுகளில் முழுத்தன்னிறைவை அடைய, 1990களின் முற்பகுதியில் செலவு குறைந்ததும் நம்பக மானதுமான **மு**னைய **து**ணைக்கோளேவூர்**தி** (முதுதி) உருவாக்கப்பட்டது. இதனால் முதுதி பல்வேறு நாடுகளின் துணைக்கோள்களுக்கு விருப்பமான ஏவூர்தியாக மாறியுள்ளது. 2001 ஆம் ஆண்டில் கனமானவையும் அதிக முயற்சி தேவைப்படுபவையுமான துணைக் கோள்களை ஏவுவதற்காக **பு**வியுடன்கால **து**ணைக் கோளேவூர்**தி** (புதுதி) உருவாக்கப் பட்டது. தொலையுணர்தல், வானியல், வானியற்பியல், வளிக்கோளவறிவியல், விண்வெளியாராய்ச்சி ஆகியவற்றுக்கான பல்வேறு ஆராய்ச்சி மையங்களும் தன்னாட்சிநிறுவனங்களும் இந்திய அரசின் விண்வெளித்துறையின்கீழ் செயலாற்று கின்றன. நிலாத்திட்டப்பணி (சந்திரயான்) கோள்களிடைத்திட்டப்பணி (மங்கல்யான்), இன்னபிற திட்டப்பணிகளின் வெற்றி இவிபுவின் முக்கிய சாதனைகள். இவிபுவின் எதிர்கால முயற்சிகளாக மனித விண்வெளிப் பயணத்திட்டங்களும் கனந்தூக்கும் ஏவூர்திகள், மறுபயனாகும் ஏவூர்திகள், குறையுறைவப்பொறிகள், சுற்றுப்பாதைக்கு ஒற்றைநிலையும் இரட்டைநிலையுமான ஊர்திகள் ஆகியவற்றின் வளராக்கமும் விண்வெளிப்பயனுக்கான தொகுமப் பொருள்களின் வளராக்கமும் பயனிடுதலும் இன்னபிறவும் உள்ளன. 1984ஆம் ஆண்டில் சோவியத்து ஒன்றியத்தின் விண்கலத்தில் சென்ற இராகேசு சர்மா விண்வெளிக்குச் சென்ற முதல் இந்தியர். (www.isro.gov.in)

8.12 எடையின்மை

ஒரு பொருளின் எடை என்பது எந்த விசையுடன் புவி அதை ஈர்க்கிறது என்பதை குறிக்கிறது. நாம் புவியின் பரப்பில் நிற்கும்போது நம் எடைக்கு எதிர்விசையை புவி செலுத்தி நம்மை நிலையில் வைத்திருக்கிறது. அதே கொள்கை தொங்கவிட்ட ஒரு விற்சுருட்டராசால் ஒரு பொருளின் எடையை அளவிடும்போது பயன்படுகிறது. நிறையீர்ப் புக்கு எதிரான விசை செயல்படாவிட்டால் பொருள் கீழே விழுகிறது. இவ்வாறான விசையையே விற்சுருள் பொருளின்மீது செலுத்துகிறது. விற்சுருளை பொருளின் புவியீர்ப்பு விசை சற்று கீழே இழுக்கிறது; விற்சுருள் பொருளின்மீது நெடுநிற்பமாக மேனோக்கி ஒரு விசையை செலுத்துகிறது.

இப்போது விற்சுருளின் மேல்நுனி எங்கும் பொருத்தப்படவில்லை என்று கற்பனை செய்து கொள்ளுங்கள். விற்சுருளின் இரு நுனிகளும் ஒரே முடுக்கத்தில் (g) அசைகின்றன. அப்போது விற்சுருள் நீளாமல் g என்னும் நிறையீர்ப்பு முடுக்கத்தால் இயங்கும் பொருளுக்கு எத்தகைய மேல்நோக்கிய விசையையும் அளிக்காது. விற்சுருள் நீட்டமடையாத சமநிலையில் தராசில் சுழிய அளவீடு பதிவாகிறது. விற்சுருளில் வைக்கப்பட்ட பொருள் ஒரு மனிதராக இருந்தால் அவர் மீது மேல்நோக்கிய விசை இல்லாததால் அவர் தனது எடையை உணர மாட்டார். இதனால், ஒரு பொருள் கட்டில்லா வீழ்ச்சியில் இருக்கும் போது, அது எடையற்றதுபோல தோன்றும். இந்த தோற்றப்பாட்டை பொதுவாக எடையின்மை என அழைக்கிறோம்.

புவியைச்சுற்றியுள்ள ஒரு துணைக்கோளில், துணைக்கோளின் ஒவ்வொரு பகுதியும் புவியின் மையத்தைநோக்கி ஒரு முடுக்கத்தில் உள்ளது. அது அந்த இடத்தில் புவியின் நிறையீர்ப்பு முடுக்கத்தின் மதிப்புக்கு சமம். இவ்வாறு துணைக்கோள் கட்டற்ற வீழ்ச்சிநிலையில் உள்ளது. இது உயரத்திலிருந்து புவியை நோக்கி விழுவதற்கு ஒப்பாகிறது. விண்வெளிக்கப்பலின் உள்ளிருக்கும் எல்லாமே தடங்கலற்ற வீழ்வில் இருக்கிறது விண்வெளி வீரர்கள் அதனுள் எந்த நிறையீர்ப்பு விசையையும் உணர்வதில்லை. புவியீர்ப்பே நமக்கு செங்குத்து திசையினை வரையறுக்கிறது. ஆனால் விண்வெளி வீரர்க ளுக்கு கிடைமட்டத்திசையோ செங்குத்துத் திசையோ இல்லாமல் எல்லாத்திசைகளும் ஒன்றாகவே இருக்கின்றன. துணைக்கோளில் மிதக்கும் விண்வெளிப்பயணர்களின் படங்கள் இந்த உண்மையை காட்டுகின்றன.

சுருக்கவுரை

1. நியூட்டனின் அனைத்துவ நிறையீர்ப்புவிதி r தொலைவிலுள்ள m_1 , m_2 ஆகிய நிறைகளுள்ள இரண்டு துகள்களுக்கிடையிலுள்ள நிறையீர்ப்புவிசை

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

என்கிறது; இங்கு, G அனைத்துவ நிறையீர்ப்புமாறிலி, இதன் மதிப்பு $6.672 \times 10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$

2. M_1 , M_2 , ... M_n ஆகிய நிறைகளுள்ள துகள்கள் m நிறையுள்ள ஒரு துகளின்மீது செலுத்தும் நிறையீர்ப்புவிசையை காண மேலமைவுக்கொள்கையை பயன்படுத்துகிறோம். M_1 , M_2 , ... M_n ஆகியவை தனித்தனியாக செலுத்தும் விசைகள் முறையே $F_1, F_2,$ .... F_n என்க. ஒவ்வொன்றையும் நிறையீர்ப்புவிதி தருகிறது. மேலைவுக்கொள்கையின்படி ஒவ்வொரு விசையும் மற்ற பருப்பொருள்களின் செல்வாக்கின்றியும் சார்பின்றியும் செயல்படுகிறது. இதன் விளைவும விசையான F_Rஐ திசையன்கூட்டலால் அறிகிறோம்.

$$F_R = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

3. கோள்களின் அசைவைப்பற்றிய கெப்பிளரின் விதிகள் பின்வருமாறு உரைக்கின்றன.
    a. எல்லாக்கோள்களும் கதிரவன் ஒரு குவியத்திலுள்ள நீள்வட்டமான சுற்றுப்பாதையில் அசைகின்றன.
    b. கதிரவனிலிருந்து ஒரு கோளுக்கு வரைந்த ஆரத்திசையன் சம நேர இடைவெளிகளில் சமப்பரப்புகளை கடக்கிறது. கோளின்மீதான நிறையீர்ப்பு மையவிசை என்பதாலும் அதனால் கோணவுந்தம் காப்புறுவதாலும் இது எழுகிறது.
    c. ஒரு கோளின் சீரொழுங்குநேரத்தின் வர்க்கம் நீள்வட்டச்சுற்றுப்பாதையின் அரைநெட்டச்சின் மும்மடிக்கு நேர்விழுக்காட்டில் இருக்கிறது.

    ஒரு கோள் கதிரவனை வட்டப்பாதையில் சுற்றும்போது அதன் சீரொழுங்குநேரமான Tயும் ஆரமான Rஉம்

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_{க}}\right) R^3$$

என்ற உறவுள்ளவை; இங்கு, $M_{க}$ கதிரவனின் நிறை. பெரும்பாலான கோள்கள் கதிரவனை கிட்டத்தட்ட வட்டச்சுற்றுப்பாதைகளில் சுற்றுகின்றன. நீள்வட்ட சுற்றுப்பாதைகளுக்கு, R ஐ அரைநெட்டச்சு என எடுத்தால் மேலுள்ள சமன்பாடு செல்லுபடியாகும்.

4. நிறையீர்ப்பின் முடுக்கம்.
    a. புவியின் பரப்பிலிருந்து h உயரத்தில்

$$g(h) = \frac{GM_{பு}}{(R_{பு} + h)^2}$$

$$g(h) \approx \frac{GM_{பு}}{R_{பு}^2}\left(1 - \frac{2h}{R_{பு}}\right), \qquad h \ll R_{பு} \text{ எனில்}$$

$$g(h) = g(0)\left(1 - \frac{2h}{R_{பு}}\right), \qquad \text{இங்கு } g(0) = \frac{GM_{பு}}{R_{பு}^2}$$

    b. புவியின் பரப்பிலிருந்து d ஆழத்தில்

$$g(d) = \frac{GM_{பு}}{R_{பு}^2}\left(1 - \frac{d}{R_{பு}}\right) = g(0)\left(1 - \frac{d}{R_{பு}}\right)$$

5. நிறையீர்ப்புவிசை பாதைசாராவிசை என்பதால் இயன்மவாற்றல் எனும் சார்பனை வரையறுக்கலாம். r என்ற இடைத்தொலைவிலுள்ள இரண்டு துகள்களின் நிறையீர்ப்பின் இயன்மவாற்றலை

$$W = -\frac{(G\, m_1 m_2)}{r}$$

என்று எழுதுகிறோம்; இங்கு $r \to \infty$ எனும்போது Wஐ சுழியமாக எடுத்தோம். ஒரு துகளமைப்பின் மொத்த இயன்மவாற்றல் அதிலுள்ள ஒவ்வொரு சோடித்துகளுக்கும் மேற்கண்டவாறு எழுதிய இயன்மவாற்றல்களின் கூட்டல். இது மேலமைவுக்கொள்கையிலிருந்து வருகிறது.

6. M பெருநிறையுள்ள ஒரு பொருளும் அதனருகில் m நிறையுடன் v திசைவேகத்தில் இயங்கும் ஒரு துகளும் அடங்கிய ஒரு தனியமைப்பு இருந்தால், துகளின் மொத்த எந்திர ஆற்றல்

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

அதாவது, மொத்த ஆற்றல் இயக்கவாற்றலையும் இயன்மவாற்றலையும் கூட்டிய தொகை. மொத்த ஆற்றல் அசைவின் ஒரு மாறிலி.

7. $M >> m$ என்றிருக்கும்போது, Mஐச்சுற்றி a ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில் m சுற்றும்போது அந்த அமைப்பின் மொத்த ஆற்றல்

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

இயன்மவாற்றலின் சுழியத்தை மேலே 5ஆம் புள்ளியில் சொன்னபடி எடுத்திருக்கிறோம். நீள்வட்டம் போன்ற ஒரு மூடிய சுற்றுப்பாதையில் கட்டுண்ட ஒரு அமைப்பின் மொத்த ஆற்றல் எதிர்மமாகிறது. இயன்மவாற்றலும் இயக்கவாற்றலும்

$$K = \frac{GMm}{2a}; \ W = -\frac{GMm}{a}$$

8. புவியின் பரப்பிலிருந்து விடுபடுதிசைவேகம்

$$v_{\text{விடு}} = \sqrt{\frac{2GM_{\text{பு}}}{R_{\text{பு}}}} = \sqrt{2gR_{\text{பு}}}$$

அதன் எண் மதிப்பு 11.2 மீ/நொ

9. ஒரு துகள் கோளச்சமச்சீரான நிறைப்பரவலுள்ள ஒரு உள்வமற்ற கோள ஓட்டுக்கோ திண்மக்கோளத்துக்கோ வெளியே இருந்தால், கோளம் தன் நிறை முழுவதும் மையத்தில் செறிந்திருப்பதைப்போல் தன்னை நோக்கித் துகளை ஈர்க்கிறது.

10. ஒரு துகள் சீரான கோள ஓட்டுக்குள் இருந்தால், துகள்மீது செயல்படும் நிறையீர்ப்புவிசை சுழியம். ஒருமைச்சீரான திண்மக்கோளத்துக்குள் இருக்கும் துகள்மீதான விசை கோளத்தின் மையத்தை நோக்கி செயல்படுகிறது. இந்த விசையை துகளின் உட்புறமுள்ள கோளத்தின் நிறை செலுத்துகிறது.

11. ஒரு புவிக்கிடப்புத்துணைக்கோள் புவியின் மையத்திலிருந்து சுமார் 4.22×10^4 km தொலைவில் புவிநடுக்கோட்டுத்தளத்தில் வட்டச்சுற்றுப்பாதையில் இயங்குகிறது.

இயலளவு	குறியீடு	பருமானங்கள்	அலகு	குறிப்புரை
நிறையீர்ப்புமாறிலி	G	$[M^{-1}L^3T^{-2}]$	$N.m^2.kg^2$	6.67×10^{-11}
நிறையீர்ப்பின் இயன்மவாற்றல்	$V(r)$	$[ML^2T^{-2}]$	J	$-\frac{GMm}{r}$ (திசையிலி)
நிறையீர்ப்பியன்மம்	$U(r)$	$[L^2T^{-2}]$	$J.kg^{-1}$	$-\frac{GM}{r}$ (திசையிலி)
நிறையீர்ப்பின் உரப்பு	$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{g}$	$[LT^{-2}]$	$m.s^{-2}$	$\frac{GM}{r^2}\hat{r}$ (திசையன்)

உங்கள் சிந்தனைக்கு

1. நிறையீர்ப்பால் ஒரு பொருள் இயங்கும்போது கீழ்காணும் அளவுகள் அழியாக்காப்புறுகின்றன.
   a. கோணவுந்தம்
   b. மொத்த எந்திர ஆற்றல்

   ஆனால் நேரிய உந்தம் அழியாக்காப்புறவில்லை.
2. கோணவுந்தத்தின் அழியாக்காப்பிலிருந்து கெப்பிளரின் இரண்டாம் விதி கிடைக்கிறது. எனினும், இது நிறையீர்ப்பின் புரட்டுவர்க்கவிதிக்கு தனித்துவமானதன்று; எந்த மையவிசைக்கும் ஏற்புடையது.
3. கெப்பிளரின் மூன்றாம் விதியிலும் ((8.1)ஆம் சமன்பாட்டை காண்க) $T^2 = k_S R^3$ என்பதிலும் k_S என்ற மாறிலி வட்டச்சுற்றுப்பாதையிலுள்ள எல்லா கோள்களுக்கும் பொதுவானது. இது புவியைச்சுற்றிவரும் துணைக்கோள்களுக்கும் பயனாகிறது ((8.38)ஆம் சமன்பாடு).

4. விண்வெளிக்கப்பலில் விண்வெளிவீரர் நிறையின்மையை உணர்கிறார். இதன் காரணம் நிறையீர்ப்பு விசை அங்கு சுழியம் என்பதன்று; விண்வெளிக்கப்பலும், விண்வெளிவீரரும் புவியை நோக்கி கட்டற்ற வீழ்ச்சியில் இருப்பதே காரணம்.
5. r என்ற இடைத்தொலைவிலுள்ள இரு துகள்களுக்கிடையான நிறையீர்ப்பின் இயன்மவாற்றலை பின்வருமாறு குறிக்கிறோம்.

$$V = -\frac{G\, m_1\, m_2}{r} + \text{மாறிலி}$$

இங்கு மாறிலிக்கு எந்த மதிப்பையும் கொடுக்கலாம் எளிமைக்காக நாம் சுழியமாக எடுத்து

$$V = -\frac{G\, m_1\, m_2}{r}$$

என்று கொள்கிறோம். இதிலிருந்து $r \to 0$ எனும் போது $V \to \infty$ என்பது தெளிவாகிறது. இந்த மாறிலியின் தெரிவினால் நிறையீர்ப்பின் இயன்மவாற்றலில் எந்த மாறுதலும் ஏற்படவில்லை என்பதை நோக்குக.
6. ஒரு பொருளின் மொத்த எந்திர ஆற்றல் என்பது அதன் இயக்கவாற்றலும் (இது எப்போதும் நேர்மமானது) இயன்மவாற்றலும் சேர்ந்த கூட்டல். முடிவிலியோடு ஒப்பிடும்போது (அதாவது முடிவிலியிலுள்ள பொருளின் நிலையாற்றல் சுழியம் எனின்), நிறையீர்ப்பின் இயன்மவாற்றல் ஒரு பொருளுக்கு எதிர்ம மதிப்புள்ளது. இதன் காரணமாகவே ஒரு துணைக்கோளின் மொத்த ஆற்றல் எதிர்மமாக இருக்கிறது.
7. இயன்மவாற்றலின் கோவையாக நாம் வழக்கமாக எதிர்கொள்ளும் $m\, g\, h$ என்பது மேற்கண்டவாறு மாறுபடும் நிறையீர்ப்பு இயன்மவாற்றலின் தோராய மதிப்பு.
8. இரண்டு துகள்களுக்கிடையான நிறையீர்ப்புவிசை மையநோக்கியது எனினும், சுழியற்ற பருமானமுள்ள இரண்டு நெளியாப்பொருள்களிடையான விசை அவற்றின் மையங்களை இணைக்கும் கோட்டில் இருப்பது கட்டாயமன்று. ஆனால் ஒரு கோளச்சமச்சீரான பொருளுக்கு அதற்கு வெளியிலுள்ள ஒரு துகள்மீதான விசை கோளத்தின் நிறை மையத்தில் செறிந்திருப்பதுபோல் செயலாற்றுகிறது.
9. ஒரு கோள ஓட்டின் உட்பகுதியிலுள்ள துகள்மீது நிறையீர்ப்பாற்றல் சுழியம்; எனினும், இந்த கோளம் வெளியிலிருந்து வரும் நிறையீர்ப்பு விசைகளுக்கு கவசமிடவில்லை. இது ஒரு மாழைக்கோளவோடு மின்விசைகளுக்கு கவசமிடுவதற்கு மாறானது. நிறையீர்ப்பு விசையை கவசமிட்டுத்தடுப்பது சாத்தியமன்று.

பயிற்சிகள்

8.1 பின்வரும் கேள்விகளுக்கு விடையளிக்க

a. ஒரு மின்மத்தை உள்வமற்ற கடத்தியினுள் வைப்பதன்மூலம் அதை மின்விசைகளிலிருந்து பாதுகாக்கலாம். இதைப்போல் உள்வமற்ற கோளத்தினுள் ஒரு பொருளை வைப்பதன்மூலம் அதனை புறநிறையீர்ப்பின் தாக்கத்திலிருந்து பாதுகாக்க இயலுமா?

b. புவியைச்சுற்றிவரும் ஒரு சிறிய விண்வெளிக்கப்பலிலுள்ள விண்வெளிவீரர் நிறையீர்ப்புவிசையை உணரமாட்டார். ஒருவேளை இந்த விண்வெளிக்கப்பல் பெரிதாக்கப்பட்டால் அவரால் நிறையீர்ப்பு விசையை உணரவியலுமா?

c. புவியின்மீது நிலாவின் நிறையீர்ப்புவிசையையும் கதிரவனின் நிறையீர்ப்புவிசையையும் ஒப்பிட்டால் கதிரவனின் இழுப்பு, நிலாவின் இழுப்பை விட அதிகமாக இருப்பதை காணலாம். எனினும் நிலாவின் ஈர்ப்பலைவிளைவு கதிரவனின் ஈர்ப்பலைவிளைவைவிட அதிகம். எவ்வாறு?

8.2 சரியானதை தேர்க

a. உயரம் அதிகரிக்கும்போது புவியீர்ப்பின் முடுக்கம் அதிகரிக்கிறது/குறைகிறது.

b. ஆழம் அதிகரிக்க புவியீர்ப்பின் முடுக்கம் அதிகரிக்கிறது/குறைகிறது. (புவி ஒரே சீரான அடர்வுள்ள கோளம் எனக்கொள்க.)

c. நிறையீர்ப்பின் முடுக்கம் புவியின்/பொருளின் நிறையை சாராதது.

d. புவியின் மையத்திலிருந்து r_1, r_2 என்ற தொலைவுகளிலுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கிடையான இயன்மவாற்றலின் விகிதத்தைக்குறிக்கும் $-G\, Mm\,(1/r_2 - 1/r_1)$ என்ற சமன்பாடு $mg(r_2 - r_1)$ என்ற சமன்பாட்டை விட அதிக/குறைந்த துல்லியமானது.

8.3 கதிரவனைச்சுற்றி புவியைவிட இருமடங்கு வேகத்தில் சுற்றும் ஒரு கோள் இருப்பதாக கொள்க. அதன் சுற்றுப்பாதையின் அளவு புவியின் ஒப்பளவில் எவ்வாறிருக்கும்?

8.4 வியாழனின் துளைக்கோள்களுள் ஒன்றான அயோவின் சீரொழுங்குநேரம் 1.769 நாள்கள்; சுற்றுப்பாதையின் ஆரம் $4.22 \times 10^{8}\ m$. வியாழனின் நிறை கதிரவனின் நிறையின் சுமார் ஆயிரத்திலொரு பங்கு எனக்காட்டுக.

8.5 உடுத்திரளில் ஒவ்வொன்றும் கதிரவநிறையுள்ள 2.5×10^{11} உடுக்கள் இருப்பதாக கொள்வோம். உடுத்திரண்மையத்திலிருந்து $50{,}000$ ஒளியாண்டு தொலைவிலுள்ள ஒரு உடு ஒரு சுற்றலை முடிக்க எவ்வளவு காலம் ஆகும்? பால்வீதியின் விட்டத்தை 10^{5} ஒளியாண்டாக எடுக்கலாம்.

8.6 சரியானதை தேர்க:

a. இயன்மவாற்றலின் சுழியத்தை முடிவிலியில் எடுத்தால், சுற்றும் துணைக்கோளின் மொத்த ஆற்றல் அதன் இயக்கவாற்றலின் / இயன்மவாற்றலின் எதிர்மம்.

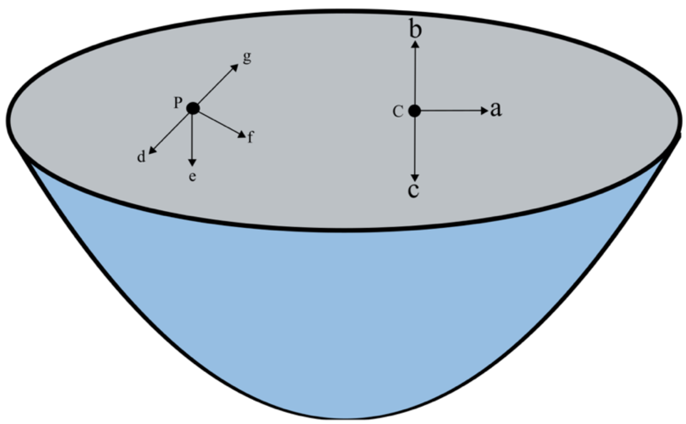
b. சுற்றும் ஒரு துணைக்கோளை புவியின் ஈர்ப்புக்கு எதிராக செலுத்த தேவைப்படும் ஆற்றல் அதே உயரத்திலுள்ள ஒரு நிலையான பொருளை புவியின் ஈர்ப்புக்கு எதிராக செலுத்த தேவைப்படும் ஆற்றலைவிட குறைவு / அதிகம்.

8.7 ஒரு பொருள் புவியிலிருந்து விடுபடும் வேகம் (அ) பொருளின் நிறையை, (ஆ) ஏவும் இடத்தை, (இ) ஏவும் திசையை, (ஈ) ஏவிடத்தின் உயரத்தை சார்ந்ததா?

8.8 ஒரு வாலுடு ஒரு மிகநீள்வட்டப்பாதையில் கதிரவனை சுற்றுகிறது. வாலுடுவின் சுற்றுப்பாதைமுழுவதிலும் அதன் (அ) நேரியத்திசைவேகம் (ஆ) கோணத்திசைவேகம் (இ) கோணவுந்தம் (ஈ) இயக்கவாற்றல் (உ) இயன்மவாற்றல் (ஊ) மொத்த ஆற்றல் மாறிலியா? வாலுடு கதிரவனின் மிகவருகில் வரும்போது ஏற்படும் நிறையிழப்பை புறக்கணிக்க.

8.9 ஒரு விண்வெளிப்பயணரை கீழ்க்காண்பவற்றுள் எந்தெந்த அறிகுறிகள் பாதிக்கலாம்? (அ) கால்வீக்கம், (ஆ) முகவீக்கம், (இ) தலைவலி, (ஈ) திசையமைவுச்சிக்கல்.

கீழ்க்காணும் இரண்டு பயிற்சிகளில், சரியான விடையை தேர்க.



படம் 8.12

8.10 சீரான நிறையடர்வுள்ள ஒரு அரைக்கோள ஓட்டின் மையத்தில் (C) நிறையீர்ப்பின் உரப்பு படம் 8.12இல் காட்டிய (அ) a (ஆ) b (இ) c (ஈ) 0 என்ற திசையில் இருக்கிறது.

8.11 முந்தைய பயிற்சியில், ஒரு குறிப்பற்ற P என்ற புள்ளியில் நிறையீர்ப்பின் உரப்பு (அ) d (ஆ) e (இ) f (ஈ) g என்ற திசையில் இருக்கிறது.

8.12 புவியிலிருந்து கதிரவனைநோக்கி ஒரு ஏவூர்தியை ஏவுகிறோம். புவியின் மையத்திலிருந்து எவ்வளவு தொலைவில் ஏவூர்தியின் நிறையீர்ப்புவிசை சுழியமாகிறது? கதிரவனின் நிறை $2 \times 10^{30}\ kg$, புவியின் நிறை $6 \times 10^{24}\ kg$. மற்ற கோள்களின் விளைவுகள் போன்றவற்றை புறக்கணிக்க. (சுற்றுப்பாதையின் ஆரம் $= 1.5 \times 10^{11}\ m.$

8.13 கதிரவனை எடைபோடுவது எப்படி? அதாவது, அதன் நிறையை மதிப்பிடுவது எவ்வாறு? கதிரவனைச்சுற்றி புவியின் சுற்றுப்பாதையின் ஆரம் $= 1.5 \times 10^{8}\ km.$

8.14 ஒரு சனியாண்டு 29.5 புவியாண்டுக்கு சமம். கதிரவனிலிருந்து புவியின் தொலைவு $1.5 \times 10^{8}\ km$ எனில், சனியின் தொலைவு என்ன?

8.15 ஒரு பொருள் புவியின் பரப்பில் $63\ N$ எடையுள்ளது. புவியின் ஆரத்தில் பாதிக்குச்சமமான உயரத்தில் பொருளின்மீதுள்ள நிறையீர்ப்புவிசை என்ன?

8.16 புவி சீரான நிறையடர்வுள்ளது என்ற எடுகோளுடன், புவியின் பரப்பில் $250\, N$ எடையுள்ள ஒரு பொருளுக்கு புவியின் மையத்திலிருந்து பாதி ஆழத்தில் என்ன எடை?

8.17 ஒரு ஏவூர்தியை புவியின் பரப்பிலிருந்து செங்குத்தாக 5 கிமீ/நொடி என்ற திசைவேகத்தில் ஏவுகிறோம். புவிக்கு திரும்புமுன் எவ்வளவு உயரத்தை அந்த ஏவூர்தி அடைந்திருக்கும்? இங்கு புவியின் நிறை $6.0 \times 10^{24}\, kg$; புவியின் சராசரி ஆரம் $= 6.4 \times 10^{6}\, m$; $G = 6.67 \times 10^{-11}\, N.m^{2}.kg^{-2}$.

8.18 ஒரு எறிவத்தின் விடுபடுவேகம் புவியின் பரப்பில் $11.2\, km/s$. ஒரு பொருளை இதன் மும்மடங்கு வேகத்தில் உயரே எறிகிறோம். புவியிலிருந்து வெகுதொலைவில் இந்த பொருளின் வேகம் எவ்வளவு இருக்கும்? (கணக்கீட்டுக்காக கதிரவனும் பிற கோள்களும் இருப்பதை புறக்கணித்துவிடுக.)

8.19 ஒரு துணைக்கோள் புவியின் பரப்பிலிருந்து 400 கிலோமீட்டர் உயரத்தில் சுற்றி வருகிறது. புவியில் நிறையீர்ப்பின் காரணமாக அந்த ஏவூர்தி எவ்வளவு ஆற்றலை உணர்கிறது? துணைக்கோளின் நிறை $200\, kg$. புவியின் நிறை $6.0 \times 10^{24}\, kg$; புவியின் சராசரி ஆரம் $6.4 \times 10^{6}\, m$; $G = 6.67 \times 10^{-11}\, N.m^{2}.kg^{-2}$.

8.20 கதிரவ நிறையுள்ள $(2 \times 10^{30}\, kg)$ இரு உடுக்கள் முட்டுமதத்திசையமைவில் ஒன்றையொன்று நெருங்குகின்றன. அவற்றுக்கிடையான தொலைவு 10^{9} கிலோமீட்டராக இருக்கும்போது அவற்றின் வேகம் புறக்கணிக்கத்தக்கதாக இருக்கிறது. அவை ஒன்றுடனொன்று மோதும்போது எவ்வளவு வேகம் இருக்கும்? ஒவ்வொரு உடுவின் ஆரமும் 10^{4} கி.மீ.; ஒன்றுடனொன்று மோதும்வரை அவை சிதையாமல் இருப்பதாகக் கொள்க. Gயின் மதிப்பை பயன்படுத்துக.

8.21 ஒரு கிடைமட்ட மேசையில் ஒவ்வொன்றும் 100 கிலோகிராம் நிறையும் 0.10 மீட்டர் ஆரமுமுள்ள 2 கோளவடிவப்பந்துகள் ஒரு மீட்டர் இடைத்தொலைவில் இருக்கின்றன. இந்த இரண்டு கோளங்களையும் இணைக்கும் நேர்கோட்டின் மையப்புள்ளியில் நிறையீர்ப்புவிசையும் நிறையீர்ப்பின் இயன்மவாற்றலும் எவ்வளவு? அவ்விடத்தில் வைக்கப்படும் பொருள் சமநிலையில் இருக்குமா? அந்த சமநிலை நிலைப்பானதாக இருக்குமா?

மேலும் பயிற்சிகள்

8.22 புவிக்கிடப்புத்துணைக்கோள்கள் புவியின் பரப்பிலிருந்து 36,000கிமீ தொலைவில் சுற்றிவருகின்றன என்பதை இப்பாடத்தில் படித்திருப்பீர்கள். அத்துணைக்கோளில் புவியின் நிறையீர்ப்பின் இயன்மம் எவ்வளவு? (இயன்மம் முடிவிலியில் சுழியம் எனக் கொள்க.) புவியின் நிறை $= 6.0 \times 10^{24}$ கிகி ; புவியின் சராசரி ஆரம் $= 6400$ கிமீ.

8.23 கதிரவனின் நிறை போல 2.5 மடங்கு நிறையுள்ள உடு 12 கிலோமீட்டர் அளவுக்கு சுருங்கி ஒரு நொடிக்கு 1.2 சுற்றுகள் வீதம் சுற்றுகிறது. (மீயளவமாக சுருங்கிய உடுக்களை நொதுமியுடுக்கள் என்கிறோம். (துடியுடுக்கள் எனப்படும் சில வான்பொருள்கள் இந்த வகையன.) இத்தகைய உடுவின் நடுக்கோட்டில் வைத்த ஒரு பொருள் நிறையீர்ப்பின் காரணமாக உடுவின் பரப்பையொட்டியே இருக்குமா? (கதிரவனின் நிறை $= 2 \times 10^{30}\, kg$)

8.24 ஒரு விண்வெளிக்கப்பல் செவ்வாய்க்கோளில் நிறுத்தப்பட்டுள்ளது. கதிரவக்குடும்பத்தைவிட்டு அந்த விண்வெளிக்கப்பல் தப்பிச்செல்ல எவ்வளவு ஆற்றலை செலவிடவேண்டும்? விண்வெளிக்கப்பலின் நிறை $1000\, kg$. கதிரவனின் நிறை $2 \times 10^{30}\, kg$; செவ்வாயின் நிறை $6.4 \times 10^{23}\, kg$; செவ்வாயின் ஆரம் $3395\, km$. செவ்வாயின் சுற்றுப்பாதையின் ஆரம் $2.28 \times 10^{8}\, km$; $G = 6.67 \times 10^{11}\, N.m^{2}.kg^{-2}$

8.25 ஒரு ஏவூர்தியை செவ்வாயின் பரப்பிலிருந்து செங்குத்தாக $2\, km/s$ என்ற திசைவேகத்தில் ஏவுகிறோம். செவ்வாயின் வளிமண்டலத்தின் தடையத்தால் அதன் தொடக்க ஆற்றலில் 20% ஐ இழக்கிறது. அவ்வூர்தி கீழே விழத்தொடங்கும்முன் எவ்வளவு உயரத்துக்கு சென்றிருக்கும்? செவ்வாயின் நிறை $6.4 \times 10^{23}\, kg$; செவ்வாயின் ஆரம் = $3395\, km$. $G = 6.67 \times 10^{11}\, N.m^{2}.kg^{-2}$.